Université de Montréal

Sur les propriétés topologiques des ensembles de Julia

par

Jacques Carette

Département de Mathématiques

Faculté des Arts et Sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention de

Maître ès sciences (M.Sc.)

en Mathématiques

Octobre 1991

©Jacques Carette,1991

Sommaire

Le but de ce Mémoire est d'exposer la théorie des systèmes dynamiques analytiques complexes le plus élémentairement possible, puis de donner un aperçu des diverses propriétés topologiques des ensembles de Julia.

A cette fin, quelques préliminaires sont premièrement présentés, puis le théorème fondamental de l'itération des fonctions rationnelles est exposé, avec plusieurs propriétés simples des ensembles de Julia. Puis, la théorie locale des itérées de fonctions rationnelles est présenté, avec plusieurs commentaires historiques mais selon un développement moderne; quelques propriétés intéressantes des complémentaires des ensembles de Julia sont aussi données. Ensuite, des propriétés topologiques telles les courbes de Jordan, les tangentes, la disconnexité et la densité sont discutées dans le contexte des ensembles de Julia. Finalement, une deuxième démonstrations du théorème fondamental est présentée puisqu'elle est intéressante par elle-même.

Table des Matières

Sommaire . . . . . **i**

Remerciements . . . . . **iv**

Introduction **1**

1 Itération des fonctions rationnelles **3**

1.1 Points périodiques 5

1.2 Familles normales 6

1.3 Conjugaisons 9

1.4 Points Critiques 10

2 Théorème Fondamental **13**

3 Résultats sur les ensembles de Fatou **24**

3.1 Domaines de Schröder et de Böttcher 27

3.2 Fleurs de Leau-Fatou 34

3.3 Disques de Siegel et points de Cremer 43

3.4 Anneaux de Herman 46

3.5 Propriétés topologiques des ensembles de Fatou 48

4 Propriétées topologiques des ensembles de Julia 50

4.1 Préliminaires 51

4.2 Les courbes de Jordan dans J 55

4.3 Les tangentes aux points de J 60

4.4 J totalement disconnexe 67

4.5 J=$\overline{\mathbb{C}}$ 68

5 Approche de Julia 70

5.1 E_f n'est pas vide 71

5.2 Théorème fondamental 75

5.3 Conclusion 77

Remerciements

Je voudrais remercier le Prof. Serge Dubuc de m'avoir laissé choisir moi-même le sujet de mon Mémoire, de ses commentaires toujours constructifs et de son support financier.

J'aimerais remercier le Prof. Dana Schlomiuk pour son support financier ainsi que moral.

J'aimerais remercier Eithne Murray pour sa patience envers mes longues heures de travail.

J'aimerais finallement remercier Jeremy Kahn, Tan Lei, Mitsuhiro Shishikura et John Milnor pour plusieurs conversations stimulantes.

Introduction

Au début du siècle, deux mathématiciens français Pierre Fatou et Gaston Julia commencent l'étude globale de l'itération des fonctions rationnelles sur la sphère de Riemann [17, 18, 19, 24]. La question fondamentale qu'ils s'étaient posées est la suivante: pour un point arbitraire $z \in \overline{\mathbb{C}}$, quelle est le comportement typique pour l'orbite $\{f^n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, où $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ est une fontion rationnelle. Cette question mène naturellement à une division de la sphère de Riemann en deux parties complémentaires - l'ensemble de Fatou F_f et l'ensemble de Julia J_f. Ce qui est surprenant est que l'ensemble de Julia J_f, qui est toujours un compact parfait non vide, a une structure topologique en général très compliquée. La structure des ensembles des Julia est aussi très diverse: par exemple, on peut avoir $J_f = \overline{\mathbb{C}}$, $J_f = S^1$, J_f un quasi-cercle non-rectifiable, un ensemble de Cantor, ou encore composé d'une infinité de courbes de Jordan qui sont la frontière d'un seul domaine. Il y a aussi un exemple d'ensemble de Julia assez exotique: il est homéomorphe au produit cartésien d'un cercle et d'un ensemble de Cantor, où chaque cercle devient un quasi-cercle sans tangente en aucun point.

Premièrement, les notions nécessaires de la théorie de l'itération des fonctions rationnelles de la sphère de Riemann sont exposées, ce qui donnera le langage requis pour étudier les ensembles de Julia. Ensuite, la notion exacte d'ensemble de Julia est définie, et plusieurs propriétés simples des ces ensembles sont démontrées en suivant le développement moderne de la théorie, qui a été introduit par Fatou. Le chapitre suivant contient plusieurs résultats qui concernent les ensembles de Fatou - mais chacun de ces résultats est nécessaire pour démontrer diverses propriétés topologiques des ensembles de Julia. Le dernier chapitre donne la plupart des résultats topologiques connus: conditions pour que l'ensemble de Julia soit une courbe de Jordan simple, qu'il existe des tangentes aux points de l'ensemble, que l'ensemble de Julia est totalement disconnexe, et qu'il soit identique à la sphère de Riemann. Puis, un exposé de quelques-uns des résultats du Chapitre 2 sont repris, cette fois en suivant l'exposition de Julia, c'est-à-dire en se concentrant sur les cycles répulsifs au lieu des points réguliers.

Chapitre 1

Itération des fonctions rationnelles

Puisque les ensembles de Julia proviennent de la théorie de l'itération des fonctions rationnelles d'une variable complexe, leur étude doit commencer par une exposition de cette théorie. Ceci permet de motiver leur étude ainsi que de donner un langage propre à son développement.

Le sujet de la théorie des itérées d'une fonction est l'étude qualitative du système dynamique engendré par une transformation analytique $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ de la sphère de Riemann. Par système dynamique, on entend le semi-groupe des itérées $\{f^{\circ n}\}_{n=0}^{\infty}$ où $f^{\circ 0}(z) = z, f^{\circ 1}(z) = f(z)$, et

$$f^{\circ n} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{\text{n fois}} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Le problème principal de la théorie se pose alors comme suit: quel est le

comportement typique des orbites $\{f^{\circ n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$?

On observe que les seules transformations analytiques de la sphère de Riemann sont les fonctions rationnelles et qu'elles peuvent être dénotées $f(z) = p(z)/q(z)$ où p et q sont des polynômes à coefficients complexes et sans facteurs communs. On dit qu'une fonction f d'un ouvert $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ est méromorphe si toutes ses singularités sont des pôles; on dit qu'une fonction est analytique sur la sphère de Riemann si elle est méromorphe sur $\overline{\mathbb{C}}$.

Définition 1.1. Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ une fonction rationnelle $f(z) = p(z)/q(z)$. On définit le *degré* de f: $deg(f) = \max(deg(p), deg(q))$.

Puisque l'itération de fonctions rationnelles de degré un (i.e. les transformations de Möbius) est simple et bien connue [1], f dénotera dorénavant une fonction rationnelle quelconque de degré ≥ 2.

Définition 1.2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $\{f^{\circ n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ est appellé l'*orbite* de z, dénoté par $O_f^+(z)$. L'*orbite inverse* de z, $O_f^-(z) := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid f^{\circ n}(\zeta) = z \ , \ n = 1, 2, \dots\}$, est aussi quelquefois définie par $\{(f^{-1})^{\circ n}(z)\}_{n=1}^{\infty}$, où f^{-1} dénote toutes les branches inverses de la fonction f. La *grande orbite* de z, $\mathcal{O}_f(z) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \exists n, m \in \mathbb{N}$ tel que $f^{\circ n}(z) = f^{\circ m}(\zeta)\}$. L'ensemble des points limites de $O_f^+(z)$ est dénoté $\omega_f(z)$. L'indice f sera omis si ceci ne crée pas d'ambiguïté.

Le problème principal de l'itération des fonctions rationnelles se pose alors facilement: pour $f(z)$ et z_0 donnés, quel est $\omega_f(z_0)$?

1.1 Points périodiques

Une première façon de différencier les orbites est de compter le nombre de points dans chaque orbite.

Définition 1.3. Si $\exists n > 0$ tel que $f^{\circ n}(z) = z$, alors z est un *point périodique*, et $O^+(z)$ est une *orbite périodique* (souvent appellé un cycle). La *période* de l'orbite est le plus petit entier n tel que $f^{\circ n}(z) = z$. Si la période de l'orbite est de un, on appellera habituellement z un *point fixe*.

Les points périodiques jouent un rôle important en théorie de l'itération et une définition naturelle nous permet d'obtenir plusieurs résultats sur la dynamique des points voisins à ces cycles:

Définition 1.4. Soit $O^+(z_0) = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\} \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ une orbite périodique de période n. On définit le *multiplicateur* de z_0 comme étant

$$\lambda = (f^n)'(z_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(z_i) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(f^{\circ i}(z_k)) \quad \text{où } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

Si $z_i = \infty$, alors on définit $f'(\infty) = (\phi \circ f \circ \phi^{-1})'(0)$ où $\phi(z) = 1/z$.

Remarque 1.5. Si z_0 est un point fixe, on remarque que si $|\lambda| < 1$ alors il existe un disque $D_r(z_0)$ centré en z_0 de rayon $r > 0$ tel que $f(D_r(z_0)) \subset D_{\delta r}(z_0))$, où $0 < \delta < 1$. De même manière, si $|\lambda| > 1$, alors il existe un disque $D_r(z_0))$ tel que $f(D_r(z_0)) \supset D_{\delta r}(z_0)$, où $\delta > 1$. Le même raisonnement se généralise aux cycles (on obtient alors un ensemble de disques qui se permutent l'un l'autre sous l'action de f, tout en gardant les propriétés d'inclusion précédentes).

Ceci motive donc la définition suivante:

Définition 1.6. Soit z_0 un point périodique et λ le multiplicateur du cycle. Alors le cycle est appellé *attractif*, *répulsif* ou *indifférent* si $|\lambda| < 1$,$|\lambda| > 1$, ou $|\lambda| = 1$ respectivement. Si $|\lambda| = 1$, avec $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, $\theta \in [0, 1)$ alors le cycle est appellé *rationnellement* ou *irrationnellement indifférent* selon que θ est rationnel ou irrationnel respectivement. Si $\lambda = 0$, on dit alors que le cycle est *super-attractif*. On appelle aussi *paraboliques* les cycles rationnellement indifférents (en général, on appelle parabolique un cycle tel que le multiplicateur λ est une racine de l'unité).

Il y a une autre possibilité pour qu'une orbite soit finie: l'orbite est éventuellement périodique, c'est-à-dire qu'il y a un entier $m > 0$ tel que $f^{\circ m}(z_0)$ est périodique. Si le plus petit entier m qui satisfait à cette condition est plus grand que zéro, alors on dit que z_0 est *pré-périodique*.

1.2 Familles normales

Une autre façon de différencier les orbites est selon la théorie de Montel (voir [1, 30]) sur les familles normales.

Définition 1.7. Une famille $\mathcal{F} = \{f_i : U \to \overline{\mathbb{C}} |\ i \in I\}$ de fonctions méromorphes définies dans un domaine $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ est une *famille normale* si chaque suite $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ possède une sous-suite qui converge uniformément sur chaque sous-ensemble compact de U.

Par un théorème de Weierstrass, on sait que de telles fonctions convergent vers une fonction analytique. On remarque que la fonction constante $g = \infty$ est une fonction limite acceptable.

Il est possible de caractériser les familles normales en terme de familles équicontinues:

Théorème 1.8. *(Arzela-Ascoli) Une famille $\mathcal{F} = \{f_i : U \to \overline{\mathbb{C}}\}$ est normale si et seulement si $\mathcal{F}$ est équicontinue sur tous les sous-ensembles compacts de U (pour la métrique sphérique).*

Démonstration. Voir [1]. □

Dans le contexte de l'itération des fonctions analytiques, on obtient alors les définitions suivantes (qui ont été le point de départ de Fatou dans sa recherche; la notation est moderne):

Définition 1.9. Soit $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, alors s'il existe un voisinage U de z_0 tel que la famille $\{f^{\circ i} : U \to \overline{\mathbb{C}}\}_{i=0}^{\infty}$ des itérées d'une fonction rationnelle f donnée est une famille normale, z_0 est dit un *point normal* ou *régulier*.

Définition 1.10. L'ensemble de Fatou d'une fonction rationnelle f, F_f, est l'ensemble des points réguliers de f. L'ensemble de Julia, J_f, est $\overline{\mathbb{C}} \setminus F_f$. L'indice f sera omis si ceci ne crée pas d'ambiguïté.

Par définition, on voit que F_f est ouvert, alors que J_f est un sous-ensemble compact de $\overline{\mathbb{C}}$. De plus, on voit une différence importante entre le comportement des orbites des points de F_f et J_f: selon le théorème 1.8, les orbites des

points de F_f restent près l'une de l'autre lorsqu'on considère des points assez voisins, alors que l'orbite de n'importe quel point de J_f va diverger de l'orbite de tous ses voisins. Intuitivement, on voit que les points z_0 pour lesquels il existe un voisinage où les orbites sont relativement simples appartiennent à F_f, alors que les points z_0 pour lesquels les orbites des points de tous les voisinages sont chaotiques appartiennent à J_f. On verra plus tard que cette intuition correspond aux définitions usuelles d'ordre et de chaos.

Il existe une autre condition de normalité très simple qui va nous être utile pour démontrer plusieurs propriétés:

Théorème 1.11. *(Montel) Soit $\mathcal{F} = \{f_i : U \to \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}\}$ une famille de fonctions méromorphes où a, b, c sont des constantes de $\overline{\mathbb{C}}$ distinctes, alors la famille $\mathcal{F}$ est normale.*

Démonstration. Voir [1, 30, 26] pour la démonstration du théorème tel qu'énoncé. Voir [29] pour une généralisation du théorème ainsi que sa démonstration. □

Corollaire 1.12. *On suppose que $g_k : U \to \overline{\mathbb{C}}, k = 1, 2, 3$ sont trois fonctions analytiques telles que pour tout z de U, les trois valeurs $g_1(z), g_2(z)$ et $g_3(z)$ sont distinctes. Soit $\mathcal{F} = \{f_i : U \to \overline{\mathbb{C}} |\ i \in I\}$ une famille de fonctions analytiques telles que $(\forall i \in I)(\forall z \in U) f_i(z)$ ne prend aucune des valeurs $g_1(z), g_2(z), g_3(z)$, alors la famille $\mathcal{F}$ est normale.*

Démonstration. Considérons la famille de fonctions $\{h_i : U \to \overline{\mathbb{C}} |\ i \in I\}$

définie par

$$h_i(z) = \frac{(f_i(z) - g_1(z))(g_3(z) - g_2(z))}{(f_i(z) - g_2(z))(g_3(z) - g_1(z))}$$

Par construction, h_i évite les 3 points $0, 1$ et ∞ et, par théorème 1.11, la famille est normale. Puisque les g_k sont analytiques, par le théorème 1.8, on voit bien que ceci implique $\mathcal{F}$ est une famille normale. $\square$

1.3 Conjugaisons

Les transformations de Möbius engendrent une relation d'équivalence utile à la théorie de l'itération. Puisqu'elles sont les seules fonctions rationnelles bijectives analytiques de la sphère de Riemann en elle-même, on peut définir le concept de fonctions rationnelles conjuguées globalement:

Définition 1.13. Soit f, g deux fonctions rationnelles, et M une transformations de Möbius telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f} & \overline{\mathbb{C}} \\ M\downarrow & & \downarrow M \\ \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{g} & \overline{\mathbb{C}} \end{array}$$

est commutatif, alors f et g sont *(globalement) conjuguées.*

On remarque immédiatement que si f et g sont conjuguées par M, alors $f^{\circ n}$ et $g^{\circ n}$ sont aussi conjuguées par M. Donc f et g engendrent essentiellement le même système dynamique en ce sens que la réponse à n'importe quelle question topologique sur le système engendré par g peut être déterminée à

partir de la réponse à cette même question sur f en lui appliquant la transformation M. Il est aussi évident que la relation de conjugaison est une relation d'équivalence, et donc on ne s'intéresse qu'aux systèmes dynamiques distincts modulo les conjugaisons.

Exemple 1.14. Soit $f(z) = az^2 + 2bz + c$ un polynôme quadratique arbitraire, $M(z) = az + b$, $d = ac + b - b^2$, et $p(z) = z^2 + d$. Alors $f(z)$ et $p(z)$ sont des polynômes conjugués puisque $M \circ f \circ M^{-1}(z) = p(z)$. On voit donc que dans le contexte des systèmes dynamiques, les polynômes quadratiques forment un espace complexe de dimension 1, et non de 3 comme il le semblerait a priori.

Il est aussi possible de définir des conjugaisons locales autour d'un point fixe en introduisant un changement de coordonnées $w = \phi(z)$ holomorphe dans un voisinage du point fixe, et on considère alors le comportement dynamique local de la fonction $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}(z)$. On dit alors que f est localement analytiquement conjuguée à g.

1.4 Points Critiques

Les points critiques jouent un rôle très important dans la dynamique des fonctions rationnelles. En fait, le comportement des orbites des points critiques contrôle pratiquement tout le comportement des autres orbites.

Définition 1.15. Les points c tels que $f(c) = v$ a une racine multiple sont les *points critiques* de f. Les points $v = f(c)$ où c est un point critique sont les *valeurs critiques* de f.

Remarque 1.16. Quand c et v sont finis, c est critique si $f'(c) = 0$; quand c est fini mais que $v = \infty$, c est critique si $z = c$ n'est pas un pôle simple de f. Quand $c = \infty$, c est critique précisément lorsque 0 est critiques pour la fonction $g(w) = 1/f(1/w)$. Topologiquement, les points critiques correspondent aux points où $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ n'est pas localement injective, ou autrement dit, ce sont les points de ramification du recouvrement ramifié $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.

Lemme 1.17. *Le nombre de points critiques de f est au plus $2d - 2$, où $d = \deg(f)$.*

Démonstration. Soit $p(z) = a_m z^m + \cdots + a_0$, $q(z) = b_n z^n + \cdots + b_0$, $f(z) = p(z)/q(z)$, et $d = \max(m, n)$. Au moyen d'une transformation de Möbius, on peut toujours transformer f tel que $d = m = n$ et que $z = \infty$ n'est pas un point critique. Alors les points critiques correspondent aux zéros de $f'(z)$ ainsi qu'aux zéros multiples de $q(z)$. Cependant, on remarque que le numérateur de $f'(z) = p(z)q'(z) - p'(z)q(z)$ compte déjà les zéros multiples de $q(z)$ ainsi ques zéros de $f'(z)$. Un calcul rapide démontre que $p(z)q'(z) - p'(z)q(z)$ est au plus de degré $2d - 2$ et donc que, comptés avec leur multiplicité, f n'a pas plus de $2d - 2$ points critiques. □

Remarque 1.18. On peut aussi démontrer ce résultat en utilisant la formule de Riemann-Hurwitz qui dit que si $g : T \to S$ est un recouvrement ramifié

d'une surface de Riemann compacte sur une autre, alors le nombre de points de ramification comptés avec multiplicité est égal a $\chi(S)d - \chi(T)$, où χ est la charactéristique de Euler. Ici, $T = S = \overline{\mathbb{C}}$ et $\chi(\overline{\mathbb{C}}) = 2$, et donc f a $2d - 2$ points critiques comptés avec multiplicité, et donc au plus $2d - 2$ points critiques.

Chapitre 2

Théorème Fondamental

Le développement de la théorie des ensembles de Julia sera exposé selon l'approche de Fatou, car celle-ci est plus simple et rapide que celle de Julia. Le langage est cependant plus moderne, et cet exposé s'inspire beaucoup de Milnor [29], avec quelques emprunts à Blanchard [3], Brolin [8], ainsi qu'à Lyubich [26, 27].

Théorème 2.1. *Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ un fonction rationnelle de degré ≥ 2, alors l'ensemble de Julia J_f n'est pas vide.*

Démonstration. Supposons que J soit vide. Alors une sous-suite $\{f^{\circ n_j}\}$ convergerait uniformément sur $\overline{\mathbb{C}}$ vers une fonction analytique $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, et donc à une fonction rationnelle. Puisque le degré de $f \geq 2$, $f(z) = z$ a au moins une solution dans $\mathbb{C}$, et alors un théorème de Montel sur les familles normales nous donne que le nombre de zéros (comptés avec multiplicité) de $f^{\circ n}$ est borné (voir [30] p.65). Mais le degré de $f^{\circ n}$ est égal à d^n (où d est

le degré de f) qui diverge à l'infini lorsque $n \to \infty$, d'où le nombre de zéros n'est pas borné, une contradiction, et donc J n'est pas vide. $\square$

On peut ensuite examiner différentes propriétés simples de J.

Définition 2.2. On dit qu'un ensemble X est *invariant* sous l'action d'une fonction f si $f(X) \subset X$. On dit que X est *complètement invariant* si en plus $f^{-1}(X) \subset X$.

Proposition 2.3. *J est complètement invariant sous l'action de f, c'est-à-dire que si $z \in J$, alors $\mathcal{O}(z) \subseteq J$.*

Démonstration. Il n'est nécessaire de démontrer que $z \in J$ si et seulement si $f(z) \in J$, puisque le résultat suivra par itération. Aussi, étant donné que F et J sont complémentaires, il suffit de montrer que $z \in F$ si et seulement si $f(z) \in F$.

Supposons que $\{f^{\circ n}\}_{n=0}^{\infty}$ soit une suite normale autour du point z. Donc il existe une suite de fonctions $\{f^{\circ n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ qui converge uniformément dans un voisinage de z. Puisque f est analytique, c'est une fonction ouverte, et alors par continuité, $\{f^{\circ n_j - 1}\}_{j=1}^{\infty}$ converge uniformément dans un voisinage de $f(z)$. Donc $f(z) \in J$. De la même manière, si $f(z) \in J$, alors $\{f^{\circ n_k + 1}\}_{k=1}^{\infty}$ converge uniformément dans un voisinage de $f(z)$, alors il existe un voisinage de z pour lequel $\{f^{\circ n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ converge uniformément (on prend la branche de f^{-1} qui envoie $f(z)$ à z, et donc un voisinage de $f(z)$ à un de z). Et donc on a que $z \in F$ si et seulement si $f(z) \in F$. $\square$

Cette proposition a un corollaire très intéressant qui permet de simplifier la démonstrations de plusieurs propriétés des ensembles de Julia.

Corollaire 2.4. *Pour tout $j > 0$, l'ensemble de Julia ne change pas si l'on remplace f par $f^{\circ k}$.*

Démonstration. Soit $\{f^{\circ n_i}\}_{i=0}^{\infty}$ une sous-suite de $\{f^{\circ n}\}_{n=0}^{\infty}$ qui converge uniformément dans un voisinage de $z \in F_f$. On peut donc en extraire un autre sous-suite dans laquelle tous les n_i ont le même reste modulo k, et qui naturellement converge uniformément dans le même domaine que $\{f^{\circ n}\}_{n=0}^{\infty}$. Soit $\{f^{\circ m_i k+p}\}_{i=0}^{\infty}$ cette nouvelle sous-suite. Par la proposition, puisque $z \in F_f$, alors $f^{\circ p}(z) \in F_f$, et donc on peut extraire de la suite $\{f^{\circ m_i k}\}_{i=0}^{\infty}$ une autre qui converge uniformément dans un voisinage de z, et donc $z \in F_{f^{\circ k}}$. Donc l'ensemble de Fatou de f est inclus dans celui de $f^{\circ k}$; l'inclusion inverse suit directement de la définition de suite normale. Donc l'ensemble de Fatou de f et de $f^{\circ k}$ sont les mêmes, et il en est de même pour les complémentaires. □

On peut maintenant démontrer assez facilement qu'il existe en fait plusieurs types de points qui appartiennent à l'ensemble de Julia:

Proposition 2.5. *Les points périodiques répulsifs et rationnellement indifférents de f sont dans J_f*

Démonstration. Par le corollaire 2.4, il suffit de considérer les points fixes répulsifs ainsi que les points fixes neutres de multiplicateur 1.

Considérons premièrement z_0 un point fixe répulsif. En conjugant f si nécessaire, on peut supposer que $z_0 = 0$. Alors le développement en série de

Taylor de $f(z)$ autour du point fixe à l'origine sera:

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \cdots \ |\lambda| > 1$$

Il s'en suit que $f^{\circ n}(z) = \lambda^n z + \cdots$ et puisque $\lim_{n\to\infty} |\lambda|^n = \infty$, on voit bien que $\{f^{\circ i}\}_{i=0}^{\infty}$ ne peut converger uniformément dans un voisinage de l'origine, et il s'en suit que $z \in J$. On utilise ici le résultat bien connu que si $\{f^{\circ n}\}_{n=0}^{\infty}$ converge dans un domaine, alors $\{(f^{\circ n})'\}_{n=0}^{\infty}$ converge aussi sur ce domaine.

Soit maintenant z_0 un point fixe neutre de multiplicateur 1. Pareillement, on peut supposer que z_0 est à l'origine. Alors le développement en série de Taylor de $f(z)$ autour de l'origine sera:

$$f(z) = z + a_i z^i + \cdots \text{ où } i \geq 2, \text{ et } a_i \neq 0.$$

On remarque alors qu'on peut itérer le résultat cité plus haut pour obtenir que si $\{f^{\circ n}\}_{n=0}^{\infty}$ converge dans un domaine, alors $\{(f^{\circ n})^{(i)}\}_{n=0}^{\infty}$ converge aussi sur ce domaine. On en déduit que le développement de $f^{\circ n} = z + n a_i z^i + \cdots$, et évidemment $\{f^{\circ n}\}_{n=0}^{\infty}$ ne peut être normale en z_0. □

Théorème 2.6. *Les points périodiques attractifs de f appartiennent à F_f.*

Démonstration. Par le corollaire 2.4, il suffit de considérer les points fixes. Soit z_0 un point fixe de f tel que $|\lambda| < 1$. Par la remarque 1.5, il existe un disque D centré en z_0 de rayon r tel que $f(D_r(z_0)) \subseteq D_{\lambda r}(z_0)$, et donc $f^{\circ n}(D_r(z_0)) \subset D_{\lambda^n r}(z_0) \to z_0$ lorsque $n \to \infty$. Il existe donc un voisinage de z_0 où $\{f^{\circ n}\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformément (ici vers z_0), et alors $z_0 \in F_f$. En fait, $D_r(z_0) \subset F_f$. □

Il est maintenant nécessaire d'introduire un nouveau concept comme outil supplémentaire pour présenter d'autres propriétés des ensembles de Julia. Heureusement, c'est un résultat simple qui découle directement du théorème de Montel (théorème 1.11).

Définition 2.7. Un point $z \in \overline{\mathbb{C}}$ est dit à *grande orbite finie* sous f si $\#\mathcal{O}_f(z) < \infty$. Soit $\mathcal{E}_f$ l'ensemble des points à grande orbite finie. Les points de $\mathcal{E}_f$ sont appelés *points exceptionels*. On maintiendra encore ici la convention usuelle sur les indices.

Proposition 2.8. *Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ une fonction rationnelle de degré ≥ 2, alors l'ensemble $\mathcal{E}$ de points à grande orbite finie a au plus deux points. Ces points, s'ils existent, doivent être des points critiques de f et appartiennent à F_f.*

Démonstration. On remarque premièrement que f transforme $\mathcal{O}(z)$ surjectivement en elle-même. D'où f est injective sur $\mathcal{O}(z)$ et $\mathcal{O}(z)$ est une réunion d'orbites périodiques sous f. Chaque point z de $\mathcal{O}(z)$ doit être critique (en fait $(d-1)$-fois critique, où $d = \deg f$), sinon $f(z)$ aurait deux ou plus préimages dans $\mathcal{O}(z)$, ce qui contredirait l'injectivité de f sur $\mathcal{O}(z)$. Puisque $f'(z) = 0$ en un point critique, tous les points de $\vee(z)$ font partie d'orbites périodiques super-attractives et appartiennet à F_f par le théorème 2.6.

S'il y avait trois points distincts à grande orbite finie, alors l'union des grandes orbites de ces points formerait un ensemble fini $\mathcal{E}_f$, et son complément $U = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}_f$ serait tel que $f(U) = U$. Donc $\{f^{\circ n}\}_{n=0}^{\infty}$ restreint à U serait

normale par le théorème de Montel (théorème 1.12), d'où U et $\mathcal{E}_f$ seraient contenus dans F_f, contredisant le théorème 2.1. □

Corollaire 2.9. *Si $\#\mathcal{E}_f = 1$, alors f est globalement conjuguée à un polynôme. Si $\#\mathcal{E}_f = 2$, alors f est globalement conjuguée à la transformation $z \mapsto z^{\pm d}$ où $d = \deg f$, et le signe est positif si $\mathcal{E}_f$ contient deux points, négatif s'il contient une orbite de période deux.*

Démonstration. Supposons que $\#\mathcal{E}_f = 1$. En utilisant une transformation de Möbius M qui place $z = \mathcal{E}_F$ à l'infini, et puisque $f^{-1}(z) = \{z\}$, on obtient une fonction $g(z) = M \circ f \circ M^{-1}(z)$ n'ayant aucun pôle sur $\mathbb{C}$, et donc g est un polynôme.

Supposons que $\#\mathcal{E}_f = 2$. On utilise une transformation de Möbius M qui place un point de $\mathcal{E}_f$ à l'infini et l'autre à l'origine qui conjuge f à une nouvelle fonction $g(z) = M \circ f \circ M^{-1}(z)$. Si les deux points sont fixes, alors par le raisonnement précédent, g est un polynôme, et 0 sera un zéro de multiplicité d puisqu'aucun autre point ne se transforme en 0. Donc f est conjuguée à Kz^d, où le K peut être éliminé par une autre conjugaison. De la même manière, si 0 est le seul pôle de g sur $\overline{\mathbb{C}}$ et ∞ est le seul zéro, et qu'ils forment un cycle de période deux, $g = Kz^{-d}$. En utilisant une autre transformation de Möbius pour éliminer le K, on obtient que f est conjuguée à z^{-d}. □

On voit bien que dans l'espace des fonctions rationnelles de degré d, modulo les conjugaisons, les fonctions $z^{\pm d}$ et les polynômes sont des cas spéciaux

en ce qui concerne l'itération des fonctions rationnelles. Leur étude est nettement plus facile, quoiqu'il reste à ce jour des questions ouvertes sur la dynamique des polynômes, même de degré deux.

Proposition 2.10. *Soit $z_0 \in J_f$, et N un voisinage de z_0 qui évite $\mathcal{E}_f$, alors $\cup_{n=1}^{\infty} f^{\circ n}(N) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}_f$.*

Démonstration. Soit $U = \cup_{n=1}^{\infty} f^{\circ n}(N)$, et $E = \overline{\mathbb{C}} \setminus U$. On a immédiatement que $f(U) \subset U$, que l'on peut aussi écrire $f^{-1}(E) \subset E$, par construction de U. Puisque $U \cap J_f \neq \emptyset$, on en déduit à l'aide du Théorème de Montel (théorème 1.11) que $\#E \leq 2$. Puisque E est fini et que f est surjective, alors $f^{-1}(E) = E$, et donc $E \subseteq \mathcal{E}_f$. Puisque $N \cap \mathcal{E}_f = \emptyset$, on vérifie que $(\forall n) f^{\circ n}(N) \cap \mathcal{E}_f =$ et ainsi $\mathcal{E}_f \subseteq E$. Obtient bien que $E = \mathcal{E}_f$. □

En particulier, on remarque que $J \subset U$. Ceci donne aussi un corollaire surprenant qui dit que J est nulle part dense ou alors J est la sphère de Riemann.

Corollaire 2.11. *Si Int(J_f) n'est pas vide, alors $J_f = \overline{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. Soit U ouvert contenu dans $\mathrm{Int}(J_f)$. Puisque J_f est invariant sous f, $f(U) \subseteq U$, et donc

$$J \supset \cup_{n \geq 0} f^{\circ n}(U) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}_f$$

Mais puisque J est fermé et $\mathcal{E}_f$ contient au plus deux points, $J_f = \overline{\mathbb{C}}$. □

On remarque aussi immédiatement que puisque $\mathcal{E}_f \not\subset J_f$, les polynômes n'ont jamais la sphère de Riemann comme ensemble de Julia. L'exemple

le plus simple de fonction rationnelle ayant $\overline{\mathbb{C}}$ comme ensemble de Julia est $\frac{(z-2)^2}{z^2}$; la démonstration de ce fait sera exposée au prochain chapitre.

Le prochain théorème donne une manière très pratique pour engendrer des images d'un ensemble de Julia car la fonction f est généralement expansive sur son ensemble de Julia, et donc f^{-1} y est contractive, ce qui rend cet algorithme insensible aux erreurs d'arrondissement.

Théorème 2.12. *Soit $z_0 \in J$, alors $O^-(z_0)$ est dense sur J, et par conséquent $\mathcal{O}(z_0)$ l'est aussi.*

Démonstration. Puisque $z_0 \notin \mathcal{E}_f$, une application du théorème 2.10 donne que chaque point $z \in J$ peut être approché d'aussi près que l'on veut par des points ζ dont l'orbite contient z_0. □

On rappele qu'un ensemble *parfait* est un ensemble fermé sans points isolés.

Corollaire 2.13. *J est un ensemble parfait.*

Démonstration. Puisque J est fermé, il suffit de démontrer qu'il est dense en lui-même. En d'autres mots, on veut produire un sous-ensemble de J qui y est dense et ne contient pas de points isolés. J est un ensemble totalement invariant sous f et du théorème 2.1 ainsi que de la proposition 2.3, on voit que J est un ensemble infini,que l'on peut appeler J_0. Donc, puisqu'il est fermé, il contient au moins un point limite z_0. Par le théorème précédent, $O^-(z_0)$ forme un ensemble dense de points contenus dans J. De plus, ces points ne sont pas isolés puisqu'ils sont aussi points limites des ensembles

des itérées inverses de J_0 évidemment contenus dans J, et donc J est un ensemble parfait. □

Nous pouvons maintenant presque démontrer le théorème fondamental sur les ensembles de Julia. On requiert d'abord les deux lemmes suivants:

Lemme 2.14. *Toutes les fonctions rationnelles $f(z) \not\equiv z$ de degré d ont exactement $d+1$ points fixes comptés avec leur multiplicité.*

Dans ce contexte, on définit la *multiplicité* d'un point fixe comme étant 1 si son multiplicateur $\lambda \neq 1$, et n si on peut écrire

$$f(z) = (z - z_0) + a(z - z_0)^n + (\text{termes de plus haut degré})$$

où $n \geq 2, a \neq 0$ et z_0 est le point fixe.

Démonstration. On peut supposer que le point à l'infini n'est pas un point fixe de f, en conjuguant f par une transformation de Möbius si nécessaire. Donc, en écrivant $f(z) = p(z)/q(z)$ où le degré de $q = d$ et le degré de p est au plus d. Alors l'équation $f(z) = z$ est équivalente à l'équation $p(z) = zq(z)$ de degré $d+1$, et f possède donc $d+1$ points fixes comptés avec leur multiplicité. □

Lemme 2.15. *Le nombre de cycles attractifs et de cycles neutres est fini.*

Démonstration. Voir le corollaire 3.13 pour les cycles attractifs et le corollaire 3.29 pour les cycles rationnellement indifférents. Les démonstrations de ces propositions ne nécéssite aucun outil mathématique non encore présenté,

mais elles appartiennent logiquement au chapitre des propriétés des ensembles de Fatou. La démonstration pour les cycles irrationnellement indifférents est longue et peu instructive, et ne sera pas exposée ici. Les idées principales se retrouvent dans [3], et des démonstrations complètes se trouvent dans [26, 29].

□

Et enfin le théorème fondamental:

Théorème 2.16. *Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ une fonction rationnelle de degré ≥ 2, alors J_f est égal à la fermeture de l'ensemble des cycles répulsifs.*

Démonstration. Puisque J est fermé, le théorème 2.5 nous donne que la fermeture de l'ensemble des cycles répulsifs est contenu dans J. Il reste à démontrer que tout point $z \in J$ est approché d'aussi près que l'on veut par des points de cycles répulsifs. Premièrement, puisque J est parfait, on peut exclure un nombre fini de points sans altérer la démonstration.

Soit $z_0 \in J$ un point qui n'est ni un point fixe, ni une valeur critique de f. En autres mots, on suppose que z_0 a exactement d pré-images $z_1, z_2, \ldots, z_d$, distincts entre eux-mêmes et de z_0, où $d \geq 2$ est le degré de f. On peut donc trouver un voisinage U de z_0 et d fonctions analytiques $\phi_j(z)$ définies sur U qui sont des fonctions inverses de f, c'est-à-dire que $f(\phi_j(z)) = z$ sur U avec $\phi_j(z_0) = z_j, j = 1, 2, \ldots, d$ par le théorème des fonctions implicites. Soit $g_1(z) = z$, $g_2(z) = \phi_1(z)$ et $g_3(z) = \phi_2(z)$, puis on considère la famille de fonctions holomorphes $\{h_n\}$ définie dans la démonstration du corollaire 1.12.

Puisque $z_0 \in J$, on en déduit que $\{h_n\}$ n'est pas normale et, par construction des g_1, g_2, g_3, qu'il existe un $n > 0$ et un $z \in U$ tels que $f^{\circ n}(z)$ doit prendre une des valeurs z, $\phi_1(z)$, ou $\phi_2(z)$. Mais ceci nous donne un point $z \in U$qui satisfait ou à $f^{\circ n}(z) = z$ ou à $f^{\circ n+1}(z) = f(\phi_j(z)) = z (j = 1, 2)$, en autres mots, z est un point périodique de période n ou $n + 1$ respectivement. Ceci démontre que $z_0 \in J$ peut être approché d'aussi près que l'on veut par des points périodiques; mais puisque tous les points périodiques sauf un nombre fini sont répulsifs, ceci complète la démonstration. □

Cette démonstration est essentiellement celle de Fatou. On exposera la démonstration de Julia pour ce même théorème au chapitre 5.

On obtient un corollaire intéressant et quelque peu suprenant:

Corollaire 2.17. *Soit U un ouvert qui rencontre J. Alors il existe $n > 0$ tel que $f^{\circ n}(U \cap J) = J$.*

Démonstration. Par le théorème fondamental, on sait qu'il existe un point de U périodique répulsif z_0 d'une certaine période, disons p. Donc z_0 est un point fixe pour l'application $g = f^{\circ p}$. Puisque z_0 est répulsif, on peut choisir un petit voisinage $V \subset U$ de z_0 tel que $V \subset g(V)$. Alors clairement on a que $V \subset g(V) \subset g^{\circ 2}(V) \subset \cdots$. Par la proposition 2.10, l'union des ouverts $g^{\circ i}(V)$ recouvre l'ensemble de Julia $J = J_f = J_g$. Puisque J est compact, il existe un $n > 0$ tel que $J \subset g^{\circ n}(V) \subset g^{\circ n}(U)$ pour un n suffisamment grand. Enfin, J est invariant sous f donc $f^{\circ np}(U \cap J) = J$. □

Chapitre 3

Résultats sur les ensembles de Fatou

Le but de ce chapitre est de donner assez d'information sur les ensembles de Fatou pour nous permettre de justifier nos théorèmes sur la structure topologique des ensembles de Julia. Cependant, quelques-un des résultats cités ne seront pas utilisés mais figurent ici pour présenter une image assez complète de la dynamique des fractions rationnelles sur leur ensembles de Fatou. En conséquent, des démonstrations dans ce chapitre ne seront souvent que des esquisses ou seront quelquefois même absentes.

On veut donc étudier le comportement de f sur son ensemble de Fatou F_f. Ceci nous mène de manière naturelle à cette définition:

Définition 3.1. Une *composante de Fatou* est une composante connexe de F. Un *domaine de Sullivan* est une composante de Fatou périodique.

Puisque F_f est complètement invariant sous l'action de f, on obtient immédiatement que f transforme une composante de Fatou U surjectivement sur une autre composante de Fatou U'. L'exposition du reste du chapitre est guidé par les deux théorèmes fondamentaux de la dynamique sur les ensembles de Fatou, dus à Sullivan (voir [37, 36]).

Théorème 3.2. *(Sullivan) Chaque composante de Fatou U est éventuellement périodique, c'est-à-dire qu'il existe des entiers $n \geq 0$ et $p \geq 1$ tels que $U' = f^{\circ n}(U)$ soit transformé en elle-même par $f^{\circ p}$.*

La démonstration de ce théorème se fait en utilisant des déformations quasi-conformes, et est nettement en dehors de la portée de ce mémoire. Pour les détails, voir [36].

Pour compléter la classification des composantes de Fatou, il suffit de trouver tous les types de composantes fixées par f ou une de ses itérées. On a cette fois le théorème suivant, où la définition exacte de chacuns des termes utilisés sera donnée lors de l'étude de chacun des cas.

Théorème 3.3. *(Sullivan) Soit U une composante de Sullivan qui est fixée par f, alors U est:*

1. *un bassin attractif immédiat pour un point fixe attractif*
2. *un bassin attractif immédiat pour un point fixe rationnellement indifférent*
3. *un disque de Siegel, ou*

4. un anneau de Herman

Démonstration. Voir [26, 29, 37]. La démonstration de ce théorème n'est pas vraiment difficile, mais elle utilise la théorie des surfaces de Riemann d'une manière essentielle, et tombe donc en dehors de la portée de ce mémoire. □

Remarque 3.4. Du point de vue de la dynamique locale sur la composante de Fatou, les points attractifs et super-attractifs sont différents et doivent être traités séparémment. On nomme donc domaine de Schröder un bassin attractif immédiat pour un point fixe attractif, et domaine de Böttcher un bassin attractif immédiat pour un point fixe super-attractif. Les bassins attractifs immédiats de points fixes rationnellement indifférents sont nommés des fleurs de Leau-Fatou.

Encore ici, il y a plusieurs routes de développement de la théorie de la dynamique locale (nommé ainsi car on se restreint à des domaines très spécifiques de la sphère de Riemann), et la route la plus élémentaire en termes modernes est énoncée le plus clairement par Milnor [29]. Cependant, l'approche de Lyubich [26] et de Sullivan [37, 36] qui utilisent la théorie des applications quasi-conformes, des espaces de Teichmüller et des recouvrements ramifiés donne des résultats impressionants. Il est à remarquer que la plupart des démonstrations des théorèmes sont classiques, mais que l'approche est moderne.

On commence alors par une description détaillée de chacun des types de domaines de Sullivan et de la dynamique dans ces domaines, puis on

utilisera toute cette théorie pour démontrer quelques résultats topologiques sur les ensembles de Fatou qui nous seront utiles au prochain chapitre.

3.1 Domaines de Schröder et de Böttcher

Pour les cycles attractifs, on a d'abord un concept local d'attraction.

Définition 3.5. Soit z_0 un point fixe attractif d'une fonction rationnelle f, alors le *bassin attractif immédiat* $\Omega^*(z_0)$ est la composante connexe de l'ensemble de Fatou qui contient z_0. Soit $B = \{z_1, \ldots, z_n\}$ un cycle attractif de période n de f. Alors le bassin attractfi immédiat est défini comme étant l'union des bassins attractifs immédiats des points fixes attractifs B de $f^{\circ n}$, c'est-à-dire $\Omega^*(B) = \Omega^*_{f^{\circ n}}(z_1) \cup \cdots \cup \Omega^*_{f^{\circ n}}(z_n)$. On remarque immédiatement que cette définition coïncide avec la précédente si $B =$ est formé d'un seul point fixe. Si le multiplicateur du point fixe ou du cycle est différent de zéro, alors $\Omega^*_f(B)$ est dit un *domaine de Schröder*.

Pour ces mêmes cycles, on a aussi un concept plus global de domaines d'attraction.

Définition 3.6. Soit $B = \{z_1, \ldots, z_n\}$ un cycle attractif de période $n \geq 1$, alors le *bassin attractif* $\Omega_f(B) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid f^{\circ in}(z) \to \zeta \text{ quand } i \to \infty, \zeta \in B\}$.

Il est d'abord nécessaire de justifier l'appelation de 'bassin attractif' pour Ω^*.

Proposition 3.7. *Soit* $B = \{z_1, \ldots, z_n\}$ *un cycle attractif de période* n, *alors* $\Omega_f^*(B) \subseteq \Omega_f(B) \subseteq F_f$.

Démonstration. Par la corollaire 2.4, il est suffisant de ne considérer que les points fixes. Soit $B = \{z_0\}$ un point fixe attractif de f. Donc les itérées de f sur un compact K de $\Omega_f(z_0)$ convergent uniformément vers z_0, et donc $\Omega_f(z_0) \subseteq F_f$. Aussi, puisque $\{f^{\circ n}\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformément vers la fonction holomorphe z_0 sur un ouvert $U \subseteq \Omega_f(z_0)$, voisinage de z_0 (qui existe par la discussion suivant la définition 1.4), il suit que $\{f^{\circ n}\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformément vers z_0 dans son domaine maximal de normalité $\Omega_f^*(z_0)$, et donc $\Omega_f^*(z_0) \subseteq \Omega_f(z_0)$. On remarque ici qu'un domaine est toujours considéré comme étant un ouvert connexe. □

On peut obtenir une propriété intéressante des frontières de ces bassins d'attraction.

Proposition 3.8. *Soit* $B = \{z_1, \ldots, z_n\}$ *un cycle attractif de période* n, *alors* $\partial\Omega^*(B) \subseteq J$, $\partial\Omega(B) = J$.

Démonstration. Il est encore suffisant de ne considérer que le cas où $B = \{z_0\}$ un point fixe. Puisque F est ouvert et que $\Omega(z_0) = \cup_{n=1}^{\infty}(f^{-1})^{\circ n}(\Omega^*(z_0))$, on a que $\partial\Omega \subseteq J$. Si U est un ouvert complètement invariant, alors $\overline{U}$ est aussi complètement invariant sous f; d'où $\overline{\Omega}$ est complètement invariant. Donc, par le théorème 2.12, $\partial\Omega = J$. Enfin, puique $\Omega^*(z_0)$ est une composante connexe de $\Omega(z_0)$, $\partial\Omega^*(B) \subseteq \partial\Omega(B) = J$. □

Du point de vue de la dynamique, au voisinage d'un point fixe attractif, on comprend très bien le comportement de toutes les orbites. Le théorème qui suit, démontré premièrement par G. Kœnigs en 1884, décrit exactement l'effet de f dans le cas où z_0 est un point fixe attractif, mais non super-attractif.

Théorème 3.9. *Soit $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ une fonction bien définie et holomorphe dans un voisinage de l'origine avec un point fixe de multiplicateur λ en $z = 0$. Si $0 < |\lambda| < 1$, alors il existe un changement de coordonnés local $w = \phi(z)$ avec $\phi(0) = 0$ tel que $\phi \circ f \circ \phi^{-1}(z)$ est la transformation linéaire $w \mapsto \lambda w$, pour $w \in U$ voisinage de l'origine. De plus, ϕ est unique modulo une multiplication par une constante non-nulle.*

Démonstration. Premièrement, on démontre l'unicité de ϕ. Supposons qu'il y ait une autre conjugaison ψ qui satisfait les conditions du théorème. Alors la composition

$$\psi \circ \phi^{-1}(w) = b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \cdots$$

est telle que $\lambda\psi \circ \phi^{-1}(w) = \psi \circ \phi^{-1}(\lambda w)$. En comparant les coefficients de deux développements, on obtient que $\lambda b_n = \lambda^n b_n$ pour tout n. Puisque $\lambda \neq 0$ et n'est pas non plus une racine de l'unité, alors $b_2 = b_3 = \cdots = 0$. Donc $\psi \circ \phi^{-1}(w) = b_1 w$, i.e $\psi(z) = b_1 \phi(z)$.

On démontre ensuite l'existence de ϕ lorsque $0 < |\lambda| < 1$. On choisit une constante $c < 1$ tel que $c^2 < |\lambda| < c$, et un voisinage de l'origine D_r tel que $f(D_r) \subset D_{cr}$ (voir la remarque 1.5). Donc, pour tout point $z_0 \in D_r$,

l'orbite $O^+(z_0)$ converge géométriquement vers l'origine, avec $|z_n| < rc^n$. Par le théorème de Taylor, il existe une constante k tel que pour tout $z \in D_r$,

$$|f(z) - \lambda z| \leq k|z^2|.$$

On obtient donc que

$$|z_{n+1} - \lambda z_n| \leq kr^2c^{2n}.$$

Si on définit les nombres $w_n = z_n/\lambda^n$, on a alors que

$$|w_{n+1} - w_n| \leq k'(c^2/|\lambda|)^n,$$

où $k' = kr^2/|\lambda|$. Ces différences convergent donc uniformément vers zéro, et donc les fonctions holomorphes $z_0 \mapsto w_n(z_0)$ convergent uniformément sur d_r à une fonction holomorphe $\phi(z_0) = \lim_{n\to\infty} z_n/\lambda^n$. On a immédiatement que $\phi \circ f(z) = \lambda\phi(z)$.

Par un argument identique, on montre que $|\phi(z) - z| \leq K|z^2|$ pour une constante K, et on obtient que $\phi'(0) = 1$, et donc $\phi(z)$ est un difféomorphisme local qui conserve les angles, i.e. un changement de coordonnés locales. □

Remarque 3.10. On remarque immédiatement que, puisque $\lambda \neq 0$, f^{-1} est une fonction bien définie localement autour de l'origine, ayant aussi un point fixe à l'origine de multiplicateur $1/\lambda$. On peut donc appliquer le théorème précédent et obtenir une conjugaison de f et $w \mapsto \lambda w$ sur un voisinage d'un point fixe répulsif.

Corollaire 3.11. *Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ une fonction ayant un point fixe attractif z_0 de multiplicateur $\lambda \neq 0$. Alors il existe une fonction holomorphe ϕ :*

$\Omega(z_0) \to \mathbb{C}$ *tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \Omega(z_0) & \xrightarrow{f} & \Omega(z_0) \\ \phi\downarrow & & \downarrow\phi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{z \mapsto \lambda z} & \mathbb{C} \end{array}$$

soit commutatif et que ϕ transforme un voisinage de z_0 difféomorphiquement sur un voisinage de zéro. De plus, ϕ est unique modulo une multiplication par une constante non-nulle.

Démonstration. Pour calculer $\phi(z)$ en un point arbitraire de $\Omega(z_0)$, on doit simplement suivre l'orbite de z jusqu'à ce qu'on se trouve en un point $z_n = f^{\circ n}(z)$ suffisamment près de z_0, puis on évalue la coordonnée de Kœnigs $\phi(z_n)$, et on multiplie par λ^{-n}. □

L'équation satisfaite par ϕ, soit $f \circ \phi(z) = \lambda\phi(z)$, s'appelle l'*équation fonctionnelle de Schröder*, et le corollaire 3.11 donne donc une vaste classe de solutions à cette équation. Il est intéressant de noter que Schröder croyait que cette équation n'admettait que très peu de solutions.

On peut maintenant obtenir un résultat très important car il permet d'obtenir une borne aux nombres de cycles de domaines de Kœnigs, résultat qui a déjà été utilisé au chapitre précédent dans la démonstration du théorème fondamental sur les ensembles de Julia.

Proposition 3.12. *Soit $B = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ un cycle attractif de f de période $n \geq 1$, mais non super-attractif. Alors il existe au moins un point*

critique c de f dans $\Omega^*(B)$. De plus, l'orbite de ce point critique n'est pas absorbée par B (i.e. il n'existe pas de m tel que $f^{\circ m}(c) \in B$).

Démonstration. On suppose d'abord que $B = \{z_0\}$ soit un point fixe de f. Si $\lambda = 0$, alors z_0 est un point critique. Supposons $\lambda \neq 0$. Donc on peut choisir un voisinage U de z_0 contenu dans $\Omega^*(z_0)$ et une branche de la fonction inverse f^{-1} qui est univoque et holomorphe sur U, tel que $f^{-1}(z_0) = z_0$. Maintenant, s'il n'existe aucun point critique dans $\Omega^*(z_0)$, la famille de fonctions $\{(f^{-1})^{\circ n}\}_{n=1}^{\infty}$, où f^{-1} est la branche choisie ci-haut, est définie sur U, et y est normale (puisqu'elle évite J). Ceci contredit le fait que z_0 est un point fixe répulsif pour f^{-1}. Donc il existe un point critique c dans $\Omega^*(z_0)$.

En appliquant ce résultat à $f^{\circ n}$, on voit qu'il y a un point critique c_1 de cette fonction dans $\Omega^*_{f^{\circ n}}(z_1)$. Soit $c_1 \mapsto c_2 \mapsto \cdots$ l'orbite $O_f^+(c_0)$. Par la règle de la dérivation des fonctions composées, au moins un des n points $c_1, c_2, \ldots, c_n$ doit être un point critique pour f. Puisque $c_i \in \Omega^*_{f^{\circ n}}(z_i)$, $c_i \in \Omega^*_f(B)$.

Pour démontrer que l'orbite de c n'est pas absorbée par B nécessite des outils plus rafinés. On suppose encore que $B = \{z_0\}$ est un point fixe de f. Soit $\Omega_0(z_0) = \Omega(z_0) \setminus \cup_{n=0}^{\infty}(f^{\circ n})^{-1}(z_0)$. Alors s'il n'y a pas de points critiques de f dans Ω_0, alors la fonction de Kœnigs ϕ est un recouvrement non-ramifié de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ par Ω_0. Mais ceci est impossible puisque Ω_0 est un domaine hyperbolique (i.e. il existe une représentation conforme sur disque unité). Alors, par construction, on a que l'orbite de c n'est pas absorbée par B. $\square$

Corollaire 3.13. *Il y a au plus* $2d-2$ *bassins attractifs immédiats de cycles attractifs.*

Démonstration. Ceci découle directement du lemme 1.17. □

On doit maintenant considérer la dynamique locale autour d'un cycle super-attractif. Le théorème suivant a été démontré au début du siècle par L.È.Böttcher.

Théorème 3.14. *Soit* $f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots$, *où* $n \geq 2$ *et* $a_n \neq 0$, *une fonction bien définie et holomorphe dans un voisinage de l'origine avec un point fixe de multiplicateur* $\lambda = 0$ *en* $z = 0$. *Alors il existe un changemant de coordonnées* $w = \phi(z)$ *holomorphe dans un voisinage de l'origine qui conjuge* f *à la transformation* $w \mapsto w^n$. *De plus,* ϕ *est unique modulo une multiplication par une racine* $(n-1)^{ième}$ *de l'unité.*

Démonstration. La démonstration est similaire à celle de Kœnigs. Cependant, on doit d'abord faire un changement de variable logarithmique, ce qui est plus délicat puisque le logarithme n'est pas univoque. Pour les détails techniques, voir [3, 5, 17, 26, 29]. □

Remarque 3.15. Il n'y a pas d'analogue au corollaire 3.11 dans ce cas car ceci nécéssiterait le calcul d'expressions de la forme $z \mapsto \sqrt[n]{\phi \circ f(z)}$ et la $n^{\text{ième}}$ racine ne peut, en général, être définie comme fonction univoque.

3.2 Fleurs de Leau-Fatou

Nous allons débuter par une proposition générale sur les points fixes neutres qui nous servira dans cette section ainsi que dans la prochaine.

Proposition 3.16. *Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ une fonction rationnelle avec un point fixe neutre en z_0. Alors $z_0 \in F$ si et seulement si f est localement, analytiquement conjuguée à $w \mapsto \lambda w$ dans un voisinage de z_0, ie si et seulement si il existe une solution analytique de l'équation fonctionnelle de Schröder*

$$\phi \circ f(z) = \lambda \phi(z)$$

sur un voisinage U de z_0 sur un disque D_r, $r > 0$ autour de l'origine..

Démonstration. S'il existe une conjugaison locale entre f et $w \mapsto \lambda w$, alors par définition de F, on a que $z_0 \in F$.

Réciproquement, supposons que $z_0 \in F$, et soit U la composante de Sullivan qui contient z_0. Soit $\tilde{U}$ le recouvrement universel de U. Puisque $U \cap J =$, U évite au moins 3 points, et le théorème de représentation conforme de Riemann nous dit que $\tilde{U}$ est isomorphe au disque unité D. On peut alors choisir un recouvrement $p : D \to U$ tel que $p(0) = z_0$ et un relèvement $\tilde{f}$ de $f|_U$ tel que $\tilde{f}(0) = 0$. Alors $\tilde{f} : D \to D$ et $|(\tilde{f})'(0)| = 1$, et une application du Lemme de Schwartz nous donne que $\tilde{f}(z) = \lambda z$. Le recouvrement universel p est alors la conjugaison analytique recherchée. □

Corollaire 3.17. *Les cycles rationnellement indifférents sont dans l'ensemble de Julia.*

Démonstration. Supposont le contraire. Soit p la période du cycle indifférent, et z_0 un des points du cycle. Alors, par le théorème, $f^{\circ p}$ est conjuguée à λz sur un voisinage du point fixe z_0. Puisque le point est rationnellement indifférent, $\lambda^q = 1$, pour un $q \geq 1$, et donc $f^{\circ pq}$ est analytiquement conjuguée à l'identité sur un voisinage de z_0, et donc $f^{\circ pq} =$ Identité sur ce voisinage. Puisque f est analytique, $f^{\circ pq}$ doit être l'identité sur $\overline{\mathbb{C}}$, ce qui contredit le fait que le degré de f est plus grand que un. □

Le modèle qu'on utilise pour la dynamique locale des cycles rationnellement indifférents est nettement plus complexe que celui utilisé pour tous les autres domaines; cependant, plusieurs résultats récents démontrent qu'il est beaucoup plus riche (voir [33]), et que la dynamique autour de tels cycles est qualitativement différente de celle des petites perturbations (rationnelles) de ces cycles en des cycles attractifs et/ou répulsifs. Nous allons donc exposer le modèle complet mais sans cependant fournir de démonstrations pour chacuns des énoncés. Les propositions qui nous serviront dans le prochain chapitre seront, elles, démontrées.

Il y a plusieurs façons d'aborder ce sujet; de l'approche de Leau-Fatou, Lyubich et Milnor, on a choisi celle de Milnor car est elle plus élémentaire que celle de Lyubich et plus lucide que celle de Leau-Fatou, même si elle est légèrement plus longue.

Comme auparavant, on considère premièrement les points fixes paraboliques.

Définition 3.18. Soit V un voisinage d'un point fixe parabolique assez petit pour que f transforme V difféomorphiquement sur un autre voisinage V' du point fixe. Un ouvert connexe U, avec fermeture compacte $\overline{U} \subset V \cap V'$, est une *pétale attractive* pour f au point fixe si

$$f(\overline{U}) \subset U \cup \{0\} \text{ and } \bigcap_{k \geq 0} f^{\circ k}(\overline{U}) = \{0\}.$$

De même façon, U' est une *pétale répulsive* pour f au point fixe si U' est un pétale attractive pour f^{-1}.

Pour rendre la discussion plus facile, considérons le point fixe à l'origine, avec $f = \lambda z + az^{n+1} +$(termes de plus haut degré), et $a \neq 0$. On rappelle que l'entier $n + 1 \geq 2$ est la *multiplicité* du point fixe.

Théorème 3.19. *(Leau-Fatou) Si l'origine est un point fixe parabolique de multiplicité $n + 1 \geq 2$, alors il existe n pétales attractives disjointes U_i et n pétales répulsives U_i' telles que l'union de ces $2n$ pétales ainsi que l'origine forme un voisinage N_0 de l'origine. Ces pétales sont alternantes, telles que chaque U_i ne rencontre que U_i' et U_{i-1}', où U_0' et U_n' doivent être identifiés.*

Démonstration. Soit

$$f(z) = z + az^{n+1} + O(z^{n+2}) \tag{3.1}$$

tel que $a \neq 0, n + 1 \geq 2$. On dit qu'un vecteur $v \in \mathbb{C}$ pointe dans une direction *attractive* pour le point fixe à l'origine de 3.1 si le produit av^n est réel et positif. Si on ignore les termes $O(z^{n+2})$ de f, alors ces directions correspondent aux vecteurs de v à $f(v) \approx v(1+av^n)$ qui pointent directement

vers l'origine. De même, si av^n est réel et négatif, on dit que v pointe dans une direction *répulsive*. On voit immédiatement qu'il y a n directions attractives qui sont séparées par n directions répulsives, et espacés régulièrement entre-eux.

On veut maintenant faire la substitution $w = b/z^n$, où $b = -1/(na)$. Ceci fait la correspondance entre un secteur entre deux directions répulsives dans le plan des z et le plan des w moins les réels négatifs. En particulier, un voisinage de zéro dans un des secteurs correspondra à un voisinage de l'infini dans le plan des w coupé. On peut alors réécrire la transformation 3.1

$$z \mapsto f(z) = z(1 + az^n + o(z^n))$$

lorsque $|z| \to 0$. En substituant $z = (b/w)^(1/n)$, la transformation dans le plan des w devient

$$w \mapsto b/f(z)^n = (b/z^n)(1 + az^n + o(z^n))^{-n} = w(1 - naz^n + o(z^n)).$$

Mais $z^n = b/w$ et $nab = -1$, et donc cette transformation se réduit à

$$w \mapsto w(1 + 1/w + o(1/w)) = w + 1 + o(1)$$

lorsque $|w| \to \infty$. Soit w' le nombre tel que $w \mapsto w'$.

Donc, si $\epsilon > 0$ est assez petit que $\sin\epsilon > 0$, alors on peut choisir un rayon r tel que $|w' - w - 1| < \sin\epsilon$ pour tout $|w| > r$. On a donc que la pente du vecteur de w à w' est telle que $|\text{pente}| < \tan\epsilon$, quand $|w| > r$.

On veut alors construire un pétale attractive pour le point à l'infini dans le plan des w. Soit $P = \{w = u + vi \mid |w| > r, u > c - |v|/\tan 2\epsilon\}$, où la

constante c est assez grande pour que tout les points de P aient $|w| > r$. On voit alors assez facilement que $w \mapsto w'$ induit une transformation sur P tel que $\overline{P}$ est transformé à l'intérieur de P, et que chaque orbite inverse (i.e. $w' \mapsto w$) partant de P doit éventuellement le quitter. En transportant ces propriétés aux plans des z, on a les conclusions voulues. □

On remarque immédiatement que si U_i est une pétale attractive, alors $\{f^{\circ k}\}_{k=0}^{\infty}$ restreint à l'adhérence de cette pétale converge uniformément vers zéro. Mais, si U_i' est une pétale répulsive, alors chaque orbite $z_0 \mapsto z_1 \mapsto \cdots$ qui commence à l'intérieur de U_i' doit éventuellement la quitter, et en fait doit quitter l'union $U_1' \cup U_1' \cup \cdots \cup U_n'$ des pétales répulsives. Cependant elle peut y retourner, et même y retourner infiniment souvent.

Ce théorème a plusieurs conséquences intéressantes:

Corollaire 3.20. *Il n'y a pas d'orbite périodique autre que le point fixe qui soit totalement contenue dans le voisinage N_0.*

Démonstration. Par les remarques précédentes, on voit immédiatement que l'orbite ne peut avoir de points dans une pétale attractive. Et puisque tous les points des pétales répulsives quittent éventuellement le voisinage, on voit bien qu'il ne peut y avoir d'orbite périodique totalement contenue dans le voisinage N_0. □

On peut aussi définir un concept de bassin attractif pour les points fixes périodiques qui ont des propriétés semblables à celui des points fixes attractifs.

Définition 3.21. Soit z_0 un point fixe parabolique d'une fonction rationnelle F, et U_i une pétale attractive de z_0, alors le *bassin attractif* $\Omega_i(z_0)$ consiste de tous les points z tel que leur orbite sous f rencontre éventuellement U_i, et donc converge vers z_0. Le *bassin attractif immédiat* Ω_i^* est la composante connexe de Ω_i qui contient U_i.

Remarque 3.22. La définition de pétale ne sera faite que pour les points fixes de multiplicateur 1. Ce qui veut dire que lorsqu'on veut faire la théorie locale des cycles paraboliques, il faut toujours considérer une certaine itérée de f (itérée assez élevée pour que chaque point du cycle soit un point fixe de l'itérée avec multiplicateur 1), et ensuite continuer le développement comme on le fait ici. On pourrait définir les notions de cycle de pétales, de bassins attractifs pour ces cycles, etc, mais ceci n'apporte rien de nouveau et ne sert qu'à rendre la notation plus complexe qu'elle ne l'est déjà. La seule difficulté est de démontrer que si le multiplicateur λ du cycle de période p est une racine $q^{\text{ième}}$ de l'unité, alors le nombre de pétales autour de z_0 comme point fixe attractif pour $f^{\circ Pq}$ est n ou, autrement dit, la multiplicité $n+1$ de z_0 comme point fixe de $f^{\circ pq}$ doit être 1 modulo q.

Il est immédiat que ces bassins $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ sont des ensembles ouverts disjoints.

Corollaire 3.23. *A moins qu'elle ne soit absorbée par le point fixe, l'orbite* $O_f^+(z_0)$ *converge vers le point fixe parabolique si et seulement si il tombe éventuellement dans une des pétales attractives* U_i*, et donc appartient au*

bassin attractif associé Ω_i.

Démonstration. Ceci est immédiat par définition de pétale et de bassin attractif ainsi que du théorème 3.19. □

Corollaire 3.24. *Chaque bassin attractif* Ω_i *fait partie de l'ensemble de Fatou* F_f, *mais chaque frontière* $\partial\Omega_i$ *fait partie de l'ensemble de Julia* J_f. *De ceci, on voit que chaque pétale répulsive* U_i' *doit rencontrer* J_f.

Démonstration. Puisque chaque point $z_0 \in \Omega_i$ sous f tombe éventuellement dans U_i, et que $U_i \subset F_f$ suit directement de la définition de U_i et de la normalité, alors par le fait que F_f est complètement invariant, on a que $\Omega_i \subset F_f$.

Par le corollaire 3.17, on sait que l'origine est dans J_f - on pourrait aussi démontrer ceci directement en regardant le développement de Taylor de f' autour de l'origine. Donc, chaque point dans $\mathcal{O}_f(0) \in J_f$. Si on a un point $z_1 \in \partial\Omega_i$ qui n'est pas dans la grande orbite de zéro, alors par le corollaire 3.23 on peut extraire une sous-suite de l'orbite de z_1 qui ne s'approche pas de l'origine à plus d'une distance ϵ. Puisque la suite des itérées $\{f^{\circ k}\}_{k=0}^{\infty}$ converge vers l'origine dans tous Ω_i, cette suite ne peut être normale dans aucun voisinage du point frontière z_1, et donc $\partial\Omega_i \subset J_f$. On veut maintenant démontrer que les pétales répulsives rencontrent l'ensemble de Julia. Supposont le contraire, et que U_i' ne rencontre pas l'ensemble de Julia. Alors f est normale sur $U_{i-1} \cup U_i' \cup U_i$, et sur cet ensemble $\{f^{\circ k}\}_{k=0}^{\infty}$ converge uniformément vers 0, ce qui contredit la remarque faite après le

théorème 3.19 □

Comme pour les points fixes attractifs (voir le corollaire 3.11), on peut décrire la géométrie des bassins attractifs à l'aide d'une certaine conjugaison. Cette fois-ci, on n'obtient non pas l'équation fonctionnelle de Schröder à résoudre, et où la conjugaison en est un solution, mais l'équation fonctionnelle d'Abel. Avant de procéder au théorème qui relie cette équation fonctionnelle au point fixes de multiplicateurs 1, on doit d'abord définir le domaine où existe cette solution:

Définition 3.25. Soit f une fonction rationnelle avec un point fixe de multiplicateur $\lambda = 1$, de multiplicité $n+1$. Soit U une des n pétales attractives, et U' une des n pétales répulsives. Alors on forme le *cylindre d'Écalle* pour U (U') en identifiant z et $f(z)$ lorsque les deux sont dans U (U'). Plus précisément, dans le cas d'une pétale attractive, on identifie z à $f(z)$ pour chaque $z \in U$, et on identifie z à $f(z)$ pour chaque $z \in U' \cap f^{-1}(U')$ dans le cas d'une pétale répulsive. On dénote ce nouvel espace par U/f (U'/f).

On note ici que cette définition, ainsi que le théorème suivant, se généralisent aux fonctions analytiques dans un domaine autour du point fixe de multiplicateur 1.

Théorème 3.26. *Le cylindre infini $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ est la représentation conforme de l'espace U/f. Il y a un unique (modulo une compostion avec une translation) plongement univalent α de U dans son recouvrement universel $\mathbb{C}$ qui satisfait*

à l'équation fonctionnelle d'Abel

$$\alpha(f(z)) = 1 + \alpha(z)$$

pour tout $z \in U \cap f^{-1}(U)$. *De plus, il existe un choix de* U *tel que l'image* $\alpha(U) \subset \mathbb{C}$ *contienne un demi-plan droit* $\{w : Re(w) > c\}$ *dans le cas d'une pétale attractive, un demi-plan gauche dans le cas d'une pétale répulsive.*

Démonstration. Voir [17, 29, 26]. □

Corollaire 3.27. *Soit* $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *une fonction rationnelle avec un point fixe de multiplicateur* 1, *et* U *une pétale attractive. Alors la fonction de Fatou* $\alpha : U \to \mathbb{C}$ *s'étend de façon unique à une fonction holomorphe et bien définie du bassin attractif correspondant* Ω, *et satisfaisant toujours l'équation fonctionnelle d'Abel. De plus, cette fonction est surjective mais n'est pas univalente; en fait, elle possède un point critique correspondant aux points critiques de* f *et de ses itérées.*

Corollaire 3.28. *Pour chaque pétale attractive* U_i, *le bassin attractif immédiat* Ω_i^* *contient au moins un point critique de* f.

Les démonstrations de ces corollaires suivent exactement celles du corollaire 3.11 et de la proposition 3.12, et seront laissées à la discrétion du lecteur. On peut enfin donner le résultat annoncé au lemme 2.15.

Corollaire 3.29. *Le nombre de pétales attractives est borné par* $2d - 2$, *et donc le nombre de cycles paraboliques l'est aussi.*

Démonstration. Ceci suit directement du corollaire précédent et du lemme 1.17. □

3.3 Disques de Siegel et points de Cremer

On considère maintenant les points fixes irrationnellement indifférent tel qu'il existe une solution à l'équation fonctionnelle de Schröder (voir la proposition 3.16).

Définition 3.30. Soit z_0 un point fixe de f de multiplicateur $|\lambda| = 1$ où $\lambda = e^{2\pi it}$, t irrationnel. On nomme alors z_0 un *point de Siegel* ou un *point de Cremer* selon si $z_0 \in F_f$ ou $z_0 \in J_f$ respectivement. Si z_0 est un point de Siegel, on nomme alors *disque de Siegel* la composante connexe U de l'ensemble de Fatou qui contient z_0.

De ceci, on peut ensuite obtenir les théorèmes suivants, qui sont très surprenants et qui donne un exemple intéressant de la différence entre les notions de 'presque toujours' au sens de Lebesgue et 'génériquement' au sens de Baire. Le premier théorème est essentiellement dû à Siegel [35], le deuxième à Cremer [10].

Théorème 3.31. *Pour presque tout λ sur le disque unité, une fonction holomorphe avec un point fixe de multiplicateur λ possède un disque de Siegel au point fixe.*

Théorème 3.32. *Pour un λ générique sur le disque unité, une fonction*

holomorphe avec un point fixe de multiplicateur λ ne peut être conjuguée à une rotation autour du point fixe, ie le point fixe est un point de Cremer.

En fait, les théorèmes de Siegel et de Cremer sont beaucoup plus précis et contiennent des descriptions de classes de nombres qui satisfont leur hypothèse. Ces conditions sont sur les propriétés diophantines du nombre t où $\lambda = e^{2\pi it}$. Les démonstrations de ces théorèmes nécéssitant un peu trop de théorie des nombres pour qu'on puisse les reproduire ici et leur faire justice, nous n'allons que donner les critères connus et ensuite donner des références pour les détails. Il est à noter qu'il reste encore plusieurs questions non-résolues dans cette section de la théorie.

Dans les prochains théorèmes, on notera t l'angle du multiplicateur $\lambda = e^{2\pi it}$, t irrationnel, et q_n les dénominateurs des approximants du développement de t en fraction continue. On supposera aussi que le point fixe est à l'origine.

Théorème 3.33. *(Bryuno [9]) Si t satisfait la condition $\Sigma \log(q_{n+1})/q_n < \infty$, alors toute fonction holomorphe de la forme*

$$f(z) = e^{2\pi it}z + a_2 z^2 + \cdots$$

a un disque de Siegel à l'origine.

En 1987, Yoccoz a démontré que ce résultats est le meilleur possible.

Théorème 3.34. *(Yoccoz [38]) Si t satisfait la condition $\Sigma \log(q_{n+1})/q_n =$*

∞, *alors pour la fonction quadratique*

$$f(z) = z^2 + e^{2\pi it}z$$

l'origine est un point de Cremer.

Cremer obtient un résultat valide pour toutes les fonctions rationnelles, mais sa classe de nombres est plus petite que celle de Yoccoz (mais elle est quand même 'pleine' au sens de Baire).

Définition 3.35. On dit qu'un nombre irrationnel $t \in (0,1)$ satisfait une *condition de Cremer* $\mathbf{C}r_d$ de degré d si

$$\limsup \frac{\log\log q_{n+1}}{q_n} > \log d.$$

En fait, on peut démontrer qu'un angle réel $t \in (0,1)$ générique satisfait $\mathbf{C}r_d$ pour chaque d. Cremer a démontré le théorème suivant:

Théorème 3.36. *Si t satisfait $\mathbf{C}r_d$ avec $d \geq 2$, alors pour toute fonction rationnelle de degré d ayant un point fixe z_0 de multiplicateur $\lambda = e^{2\pi it}$, z_0 est un point de Cremer.*

On remarque ici que les résultats présentés ici sont les plus modernes connus de l'auteur et que les conditions de plusieurs de ces théorèmes ont étés successivement améliorées par plusieurs auteurs. Pour les démonstrations de ces théorèmes ainsi que des exposés plus précis, voir Siegel [35], Cremer [10, 11], Yoccoz [38], Bryuno [9], Herman [21] et Douady [14].

Il y a cependant un résultat sur les disques de Siegel qui nous sera utile et qui est aussi facile à démontrer:

Proposition 3.37. *Chaque point de la frontière d'un disque de Siegel U appartient à l'adhérence de l'orbite d'un point critique.*

Démonstration. Supposont le contraire. On peut alors construire un petit disque V autour d'un point $z_0 \in \partial U$ tel que l'orbite de tous les points critiques évite V. Donc chaque branche de $(f^{\circ n})^{-1}$ peut être définie comme une fonction holomorphe univoque de V à $\overline{\mathbb{C}}$. Pour chaque n, choisissons la branche qui agit sur $U \cap V$ dans U par une 'rotation' de U. Puisque l'angle associé à cette rotation est irrationnel, on peut choisir une sous-suite de ces branches inverses qui convergent vers la carte identité sur $U \cap V$. C'est évidemment une famille normale puisqu'elle évite la partie centrale de U, et donc on peut extraire une sous-sous-suite $\{(f^{\circ n_i})^{-1}\}$ qui converge sur tout V, nécessairement à la carte identité sur V. Ceci implique que la suite correspondante des itérées $\{f^{\circ n_i}\}$ converge aussi vers l'identité sur V. Mais ceci contredit le corollaire 2.17. □

3.4 Anneaux de Herman

Le dernier type de domaine est beaucoup plus difficile à étudier car il ne correspond pas à un cycle. Cependant, des travaux de Shishikura [34] montrent que la plupart des propriétées de ces anneaux sont liées aux propriétées des disques de Siegel, car on peut obtenir des anneaux de Herman par chirurgie quasi-conforme sur des disques de Siegel et vice-versa.

Définition 3.38. Une composante U de l'ensemble de Fatou F_f est un *anneau de Herman* si U a comme représentation conforme un anneau $\mathcal{A}_r = \{z|\ 1 < |z| < r\}$, et que sur cet anneau la représentation conjugue f à une rotation irrationnelle, i.e. qu'il existe un isomorphisme ϕ, un réel $r > 1$ et un angle irrationnel $t \in (0,1)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U \\ \phi\downarrow & & \downarrow\phi \\ \mathcal{A}_r & z \overset{\frown}{\mapsto} \lambda z & \mathcal{A}_r \end{array}$$

où $\lambda = e^{2\pi i t}$.

Vu la difficulté des résultats sur les anneaux de Herman, nous n'allons que donner le résultat qui nous intéresse.

Proposition 3.39. *Si U est un anneau de Herman alors chaque point de la frontière de U appartient à l'adhérence de l'orbite d'un point critique. De plus, la frontière ∂U a deux composantes connexes infinies.*

Démonstration. La démonstration de la première partie est identique à celle de la proposition 3.37. Si un des deux ensembles frontières n'est pas infini, alors il doit consister en un seul point (puisque U est isomorphe à un anneau). Alors on obtiendrait un disque de Siegel avec son centre $z_0 \in J_f$, ce qui contredit que l'ensemble de Julia est parfait. □

3.5 Propriétés topologiques des ensembles de Fatou

On se restreint ici aux propriétés qui nous seront utiles au prochain chapitre.

Proposition 3.40. *On suppose que l'ensemble de Fatou F_f a une composante completement invariante U, alors toutes les autres composantes de F_f sont simplement connexes.*

Démonstration. Soit V une composante de F_f autre que U, γ une courbe de Jordan simple contenue dans V, et V_1, V_2 les composantes de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$. Alors une de ces composantes, disons V_1, ne rencontre pas $\overline{U}$ (puisque par la proposition proposition 3.8, la frontière de U est J_f). Donc nous avons $V_1 \subset F_f$, et alors $V_1 \subset V$, ce qui prouve que pour toute courbe de Jordan γ dans une autre composante de F_f, cette courbe borne un ensemble entièrement contenu dans F_f, et donc toutes les autres composantes de F_f sont simplement connexes. □

Proposition 3.41. *Soit $\mathcal{R}$ la famille des composantes de F_f et $\tilde{f}$ la fonction surjective induite par f sur $\mathcal{R}$. Soit $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}$ une famille de composantes de F_f complètement invariante sous $\tilde{f}$. Alors $\mathcal{L}$ est composé d'une, deux ou d'une infinité dénombrable de composantes.*

Démonstration. Supposont que $|\mathcal{L}| < \infty$. Alors $\tilde{f}$ est une bijection, et donc il existe un p tel que $(\tilde{f})^{\circ p} =$ identité. Toutes les composantes de $\mathcal{L}$ sont alors complètement invariantes sous l'action de $g = (\tilde{f})^{\circ p}$. Supposons que

$|\mathcal{L}| > 1$, alors par la proposition précédente, toutes les composantes $U \in \mathcal{L}$ sont simplement connexes. Puisque $g : U \to U$ est un recouvrement ramifié à N feuilles où $N = d^p$, la formule de Riemann-Hurwitz donne que U contient $N - 1$ points critiques de g. Mais puisque g a $2(N-1)$ points critiques, on obtient $|\mathcal{L}| = 2$. □

Corollaire 3.42. *Si l'ensemble de Fatou n'est pas vide, il ne peut avoir que 1,2 ou une infinité dénombrable de composantes.*

Chapitre 4

Propriétées topologiques des ensembles de Julia

Nous allons examiner quelques-unes des propriétés topologiques des ensembles de Julia. En particulier, nous allons donner des classes d'exemples où chacunes des propriétés sous discussion se réalise. Cependant, puisque la plupart sont des problèmes ouverts, ceci ne résultera pas en des théorèmes qui donnent une classification complète des fonctions rationnelles dont l'ensemble de Julia satisfait une propriété particulière.

Les propriétés qui vont être examinées sont les suivantes: les courbes de Jordan dans J, l'existence de tangentes aux points de J, des cas où J est totalement disconnexe et des cas où J=$\overline{\mathbb{C}}$. Nous allons encore une fois commencer par une section qui décrit quelques propriétés des ensembles de Julia qui seront utiles dans tout ce chapitre; la plupart d'entre elles

sont intéressantes par elles-mêmes, mais ne nous préoccuperont pas dans ce mémoire.

4.1 Préliminaires

Une des propriétés les plus pratiques pour obtenir des résultats concrets en dynamique complexe est en fait une notion importée de la dynamique continue, due à Smale.

Définition 4.1. On dit qu'une application f est *dilatante* sur un ensemble compact $X \subset \overline{\mathbb{C}}$ tel que $f(X) \subset X$ s'il existe des constantes $N > 0, k > 1$ et un voisinage V de X tel que

- $f^{-1}(X) \cap V = X$;
- $\|(f^{\circ n}(z))'\| \geq k$ $(z \in X, n \geq N)$.

Théorème 4.2. *Les propriétés suivantes d'une fonction rationnelle sont équivalentes:*

1. *f est dilatante sur son ensemble de Julia.*
2. *l'orbite de tout les points critiques de f converge vers des cycles attractifs.*

Avant de démontrer ce théorème, on doit d'abord établir certain lemmes qui nous seront très utiles. Pour le reste de cette section, on utilisera la notation suivante:

- $P_f = \overline{\left(\bigcup_c O_f^+(c)\right)}$, où l'union est sur tous les points critiques c de f.
- D est un ouvert simplement connexe.
- $\{I_j : D \to \overline{\mathbb{C}}\}$ est une suite de branches inverses de $f^{\circ n}$, où $I_0 =$ identité, $f \circ I_j = I_{j-1}$.

L'indice f de P_f seront omis si ceci ne crée pas d'ambiguïté.

Lemme 4.3. *Toute suite $\{I_j\}$ de branches inverses est normale sur D.*

Démonstration. On choisit une orbite périodique répulsive $O^+(p)$. Puisque p n'est pas exceptionel, il existe deux points distincts p_1 et p_2 qui sont distincts de p tel que $f(p_1) = p$ et $f(p_2) = p_1$. Soit $D_p = D \setminus O^+(p)$. Si $I_j(z) = p$, alors $z = f^{\circ j}(I_j(z)) = f^{\circ j}(p) \in O^+(p)$ et donc $z \notin D_p$. On en déduit que I_j, sur D_p, évite $\{p, p_1, p_2\}$ pour $j > 2$, et donc la famille est normale par le théorème de Montel (1.12). Pour démontrer que $\{I_j\}$ est normale sur D, on choisit une orbite périodique répulsive $O_+(q)$ distincte de $O^+(p)$ et on voit immédiatement que la famille est normale sur $D_q = D \setminus O^+(q)$. Puisque $D = D_p \cup D_q$, la famille $\{I_j\}$ est normale sur D. □

On obtient de ce lemme un corollaire immédiat.

Corollaire 4.4. *Soit D un domaine tel que $D \cap P_f = \emptyset$. Alors toutes les branches de f^{-1} sont biens définies et analytiques sur D, et la famille $\{(f^{\circ n})^{-1}\}$ est normale.*

Lemme 4.5. *Si $J_f \cap P_f = \emptyset$, alors les composantes de Sullivan sont toutes attractives. De plus, toutes les orbites des points de F_f n'ont qu'un nombre fini de points d'accumulation, qui sont des points périodiques contenus dans P_f.*

Démonstration. Puisque $J \cap P = \emptyset$, les propositions 3.37 et 3.39 donnent qu'il n'y a pas de disques de Siegel ou d'anneaux de Herman. La proposition 3.28 donne qu'il n'y a pas de fleurs de Leau-Fatou. Puisque $P \neq \emptyset$ et $J \cap P = \emptyset$, l'ensemble de Fatou n'est pas vide, et alors les composantes de Sullivan sont attractives par le théorème 3.3. Puisque toutes les composantes de Fatou sont pré-périodiques, les propriétées des bassins attractifs complète la démonstration. □

Lemme 4.6. *Si $J_f \cap P_f = \emptyset$, alors toute sous-suite des branches inverses $\{I_j : D \to \overline{\mathbb{C}}\}$ converge vers une fonction constante.*

Démonstration. Soit $D_{-k} = I_k(D)$. On démontre premièrement que $D_{-k} \to J$ uniformément lorsque $k \to \infty$. Supposons le contraire. On aurait donc 2 suites k_i et z_i telles que $f^{\circ k_i}(z_i) \in D$, mais qui évite un voisinage de J, en d'autres mots

$$(\forall i)\ d(J, f^{\circ k_i}(z_i)) > \epsilon > 0.$$

Soit z' un point d'accumulation des z_i. Donc $\{f^{\circ n}\}_{n=0}^{\infty}$ est normale dans un voisinage de z' (car une sous-suite évite un voisinage de L, et donc au moins 3 points). On choisit un sous-suite convergente de $f^{\circ k_i}$, en gardant le même nom pour cette sous-suite. Puisque la suite $f^{\circ k_i}(z')$ converge uniformément,

on conclut qu'elle converge vers un point de D qui fait partie d'un cycle attractif (par le lemme 4.5). Mais ceci contredit le fait que les cycles attractifs sont dans P et $J \cap P = \emptyset$. On a donc une famille normale $\{I_j\}$ dans D qui converge uniformément vers J; mais $\mathrm{Int}(J_f) = \emptyset$ puisque $F_f \neq \emptyset$, et donc toute fonction limite I_∞ doit être constante puisque $\mathrm{Int}(I_\infty(D)) = \emptyset$. □

En fait, en utilisant essentiellement cette démonstration, on peut démontrer la proposition suivante:

Proposition 4.7. *Si D n'est pas contenue dans un disque de Siegel ou un anneau de Herman, et $J_f \neq \overline{\mathbb{C}}$, alors toute sous-suite convergente de branches inverses méromorphes $\{I_j : D \to \overline{\mathbb{C}}\}$ converge vers une fonction constante, qui est un point de J_f.*

La première partie de la démonstration du lemme 4.6 donne une propriété intéressante des branches inverses qui nous sera utile plus tard:

Lemme 4.8. *Si $J_f \cap P_f = \emptyset$ et $D \cap P_f = \emptyset$ alors pour chaque point z de J_f, il existe une suite de branches inverses $\{I_j : D \to \overline{\mathbb{C}}\}$ qui converge vers z.*

Démonstration. Ceci suit directement de la démonstration du lemme 4.6 et de la proposition 4.7. □

Démonstration. (théorème 4.2)

(2 $\implies$ 1) Puisque J et P sont des sous-ensmbles fermés du compact $\overline{\mathbb{C}}$ et que $J \cap P = \emptyset$, il existe un ouvert U tel que $J \subset U$ et $U \cap P = \emptyset$. Soit $\mathcal{U} = \{D_r(z_0) \mid z_0 \in J, D_r(z_0) \subset U\}$, un recouvrement ouvert de J. Puisque

J est compact, il existe un sous-recouvrement fini, disons $V_i = D_{r_i}(z_i), i = 1, \ldots, n$. Soit $D = \cup_i V_i$, alors par le lemme 4.6, toute suite de branches inverses $\{I_j : D \to \overline{\mathbb{C}}\}$ tend vers une constante. Donc $\{I_j'\}$ converge vers 0 sur D. On peut donc trouver un N tel que $1/(f^{\circ n})'(z) < 1/K, K > 1$ pour tout $n \geq N, z \in D$, et donc $(f^{\circ n}(z) > K$ sur D, un voisinage de J.

$(1 \implies 2)$ Puisque f est dilatante sur J, l'orbite des points critiques évite un voisinage V de J, et donc $P \cup L = \emptyset$. Par le lemme 4.5, on a le résultat voulu. □

Remarque 4.9. Il est possible de démontrer ce théorème sans l'aide du théorème de classification de la dynamique sur F_f et du fait qu'il n'y a pas de composante qui vagabonde dans F_f (voir le lemme 4.5). Les outils nécessaires sont assez techniques, mais ne posent pas de difficultés. Pour plus de détails, voir [8, 19, 29].

Il est à noter que la démonstration donne que f est en fait expansive (i.e. $|f'(z)| \geq k > 1$) sur un voisinage $V \cup K$ de L.

On dit qu'un fonction rationnelle f satisfait *l'Axiome A*, ou encore est *hyperbolique* si f est dilatante sur son ensemble de Julia.

4.2 Les courbes de Jordan dans J

Dans des cas très généraux, l'ensemble de Julia pour une fonction rationnelle est une courbe de Jordan. En fait, lorsque l'ensemble de Fatou est composé d'exactement deux composantes (et donc l'ensemble de Julia doit contenir

une courbe de Jordan), l'ensemble de Julia sera généralement une courbe de Jordan.

On commence d'abord par un théorème qui nous donne une vaste classe de fonctions rationnelles dont la frontière des bassins attractifs est une courbe fermée continue.

Théorème 4.10. *Soit z_0 un point fixe attractif pour une fonction f hyperbolique, alors $\partial\Omega_f^*(z_0)$ est une courbe fermée continue.*

Démonstration. Par le théorème 4.2, on peut trouver un entier N tel que $|(f^{\circ n}(z))'| > k > 1$ pour tout $z \in J, n \geq N$. En remplaçant f par une itérée, on peut supposer que $N = 1$. Puisque $\{z|\ |f'(z)| > k\}$ est ouvert, on obtient alors un voisinage ouvert V de J tel que $|f'(z)| > k, z \in V$.

On peut aussi choisir une courbe de Jordan $\gamma \subset \Omega^*(z_0)$ tel que les points critiques dans $\Omega^*(z_0)$ sont à l'intérieur de γ, et que $\gamma_{-1} = f_\alpha^{-1}(\gamma)$ contienne γ en son intérieur, où f_α^{-1} dénote toutes les branches de f^{-1} pour lesquelles $f^{-1}(\Omega^*(z_0)) \subset \Omega^*(z_0)$. On dénote $J_\alpha = \partial\Omega_f^*(z_0)$. Alors $f_\alpha^{-1}(J_\alpha) = J_\alpha$ et de plus $f(J_\alpha) = J_\alpha$. On définit ensuite la suite γ_{-n} par $\gamma_{-n-1} = f_\alpha^{-1}(\gamma_{-n})$. Par la démonstration du lemme 4.6, on voit que cette suite converge uniformément vers J_α.

On veut maintenant trouver une expression paramétrique pour les courbes de Jordan γ_{-n}. Premièrement, on trouve la représentation conforme ψ de l'anneau A borné par les courbes γ_{-1} et γ_{-2}, disont l'anneau A' borné par les deux cercles C_1 et C_2 (où C_2 est extérieur à C_1). On prend un rayon r

de C_2 qui recoupe C_1 en x et C_2 en y. La fonction inverse ψ^{-1} transforme l'arc r_{xy} en un arc R_{XY} qui coupe γ_{-1} à angle droit en X, et γ_{-2} à angle droit en Y. En laissant le rayon r parcourir la circonférence de C_2, on obtient un recouvrement correspondant de A par des arcs coupant la frontière de A à angle droit. En transformant successivement ces arcs par f_α^{-1}, on obtient un recouvrement des domaines bornés par $(\gamma_{-2}, \gamma_{-3}), (\gamma_{-3}, \gamma_{-4}), \ldots$, tel qu'a chaque point de γ_{-n} corresponde un seul arc qui le joint à un point unique de γ_{-1} et qui coupe à angle droit toutes les courbes de Jordans entre ces deux courbes.

Si on suppose que γ_{-1} a la forme paramétrique $\{z_1(t) \mid t \in [0,1], z_1(0) = z_1(1)\}$. On peut alors donner une forme paramétrique à chaque γ_{-n} en supposant que chaque point sur le même arc définit ci-haut correspond à la même valeur de t. On obtient ainsi une paramétrisation $\gamma_{-n} = \{z_n(t) \mid t \in [0,1], z_n(0) = z_n(1)\}$. Si on note l_n la longueur maximale des arcs R_{XY} définis entre γ_{-n} et γ_{-n-1}, alors puisque ces courbes tendent uniformément (comme ensembles) vers J_α, il existe un N' tel que $\gamma_{-N'} \subset V$, et donc $l_{n+1} < l_n/k$, donc on obtient que $\lim_{n\to\infty} z_n(t) = z(t)$, uniformément. Puisque les $z_n(t)$ sont des fonctions continues, $J_\alpha = \{z(t) | t \in [0,1], z(0) = z(1)\}$ est une courbe continue. $\square$

Ces courbes sont en général très compliquées. On peut s'apercevoir de ceci avec un exemple simple: si f est une fonction rationnelle hyperbolique avec 2 points fixes attractifs, avec un bassin attractif complètement invariant, et l'autre non. Alors l'ensemble de Fatou est composé d'un en-

semble dénombrable de composantes, mais la frontière du bassin attractif complètement invariant est une courbe continue égale a l'ensemble de Julia J_f. On pourra en fait démontrer un peu plus dans les deux prochains théorèmes.

Théorème 4.11. *Soit f une fonction rationnelle ayant deux points fixes attractifs z_1, z_2 tel que leurs bassins attractifs immédiats soit complètement invariant, alors J_f est une courbe de Jordan simple.*

Démonstration. Par la proposition 3.40, $\Omega^*(z_1)$ et $\Omega^*(z_2)$ sont simplement connexes; si f est de degré d, alors la démonstration de cette proposition donne aussi qu'il y a $d-1$ points critiques dans chacuns de ces domaines, et le lemme 1.17 ainsi que le fait que tout ces points critiques sont dans F_f donne qu'il n'y a pas d'autres composantes de Fatou. On a aussi que $J_f \cap P_f = \emptyset$, et donc par le théorème 4.10, J_f est une courbe continue.

Il reste à démontrer que cette courbe n'a pas de points doubles. Supposont le contraire, qu'il y ait un z_0 tel que $z(t_1) = z(t_2) = z_0$, où $t_1 \neq t_2$ et $z(t)$ est la paramétrisation de la courbe J_f. Comme dans la démontration du théorème 4.10, il existe alors une courbe de Jordan γ_{-1} dans $\Omega^*(z_1)$ et deux arcs distincts R_{t_1} et R_{t_2} qui débutent sur des points distincts de γ_{-1} et qui aboutissent en z_0. Ces arcs et une partie de γ_{-1} bornent donc un domaine simplement connexe D, avec $R_t \subset D$ pour $t_1 < t < t_2$. Alors $\{z(t) \mid t_1 < t < t_2\} \subset D \cup \{z_0\}$. On observe maintenant qu'on peut faire exactement la même construction dans $\Omega^*(z_2)$. Mais puisque $D \cap \Omega^*(z_2) = \emptyset$,

on obtient que $\{z(t)|t1 < t < t_2\} = \{z_0\}$, et donc z_0 n'est pas un point double. On en conclut que J est une courbe de Jordan simple. □

Corollaire 4.12. *Soit f une fonction rationnelle ayant un cycle attractif de période deux tel que l'union de leurs bassins attractifs immédiats soit complètement invariant, alors J_f est une courbe de Jordan simple.*

Démonstration. On remarque que les bassins ainsi que les points du cycle sont fixés par $f^{\circ 2}$, et alors on applique le théorème 4.11 à $f^{\circ 2}$. □

On peut maintenant donner un théorème qui précise un peu plus la structure des ensembles de Julia similaires à l'exemple donné un peu plus tôt.

Théorème 4.13. *Soit f une fonction rationnelle hyperbolique, avec un point fixe attractif z_0 tel que $\Omega^*(z_0)$ est complètement invariant, et que ce soit le seul domaine de Sullivan complètement invariant. Alors J contient une infinité de courbes de Jordan.*

Démonstration. Puisque le nombre de cycles attractifs est borné, on peut remplacer f par une itérée qui transforme chacun des points des cycles en point fixe attractif. Par le théorème 3.40, tous les bassins attractifs immédiats de ces points fixes sont simplement connexes.

Soit z_n un de ces points fixes attractifs, $1 \leq n \leq N$. Par le théorème 4.10, $\partial\Omega^*(z_n)$ et $\partial\Omega^*(z_0)$ sont des courbes continues, et la deuxième coïncide avec J_f. On peut maintenant répéter exactement le même argument utilisé dans la démonstration du théorème 4.11 pour démontrer que $\partial\Omega^*(z_n)$ est une courbe

de Jordan simple. Puis, en prenant tous les antécédents de cette courbe, on obtient une infinité de courbes de Jordan contenues dans J. □

4.3 Les tangentes aux points de J

Dans cette section, on veut démontrer que l'ensemble de Julia ne possède pas de tangente en aucun des points frontières des domaines attractifs de l'ensemble de Fatou, sauf dans des cas exceptionnels trés précis. Qu'on ne considère que les frontière des domaines attractifs n'est pas une très grande restriction puisqu'il y a une conjecture (que l'on tient pour vraie) qui propose que les fonctions rationnelles dont tous les points critiques sont dans un bassin attractif forment un ensemble ouvert et dense dans l'ensemble de toutes les fonctions rationnelles de degré d.

Les théorèmes qui suivent, combinés avec ceux de la section précédente, nous donne une idée de la structure (assez compliquée d'ailleurs) d'une vaste famille d'ensembles de Julia.

Lemme 4.14. *Soit z_0 un point fixe attractif d'une fonction rationnelle f. Si $\Omega^*(z_0)$ est simplement connexe et $\partial\Omega^*(z_0)$ est une courbe ou un arc de Jordan analytique, alors cette frontière est en fait un cercle ou un arc de cercle.*

Démonstration. On remarque que, sur $\overline{\mathbb{C}}$, une ligne droite ou un segment de droite est un cas spécial de cercle ou d'un arc de cercle.

Soit $J_\alpha = J \cap \partial\Omega^*(z_0)$, et d le degré de f. On commence par trouver la représentation conforme de $\Omega^*(z_0)$ sur le disque unité D par $h : D \to \Omega^*(z_0)$

tel que $h(0) = z_0$. Puisque J est une courbe ou un arc de Jordan analytique, $h(t)$ est méromorphe sur le disque D_r où $r > 1$. De plus, si $\omega = \{t \mid |t| = 1\}$, alors $J_\alpha = h(\omega)$. Puisque z_0 est fixe, $f(z)$ transforme $\overline{\Omega^*(z_0)}$ sur lui-même q fois, où $q \geq 1$. En transformant par $h(t)$, on définit une fonction $\phi(t)$ par $\phi(t) = h^{-1} \circ f \circ h(t)$; alors $\phi(t)$ transforme le disque unité sur lui-même q fois. On déduit donc que $\phi(t)$ doit être un produit de Blashke,

$$\phi(t) = e^{2\pi i\tau} t^p \prod_{i=1}^{q-p} \frac{a_i - t}{1 - t\overline{a_i}}, \tau \in [0,1), 1 \leq p \leq q \leq d, |a_i| < 1. \qquad (4.1)$$

On peut se référer à [23] pour plus de renseignements sur les produits de Blashke.

On veut premièrement démontrer que $h(t)$ est en fait une fonction rationnelle, définie sur $\overline{\mathbb{C}}$. On veut en fait démontrer que le diagramme suivant est commutatif, où h est rationnelle:

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\phi} & \overline{\mathbb{C}} \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f} & \overline{\mathbb{C}} \end{array} \qquad (4.2)$$

On sait que f et ϕ sont définies sur $\overline{\mathbb{C}}$, et que h est méromorphe sur $\{t \mid |t| < r\}$, où $r > 1$. Par définition de $\phi(t)$, on obtient l'équation

$$f \circ h(t) = h \circ \phi(t) \qquad (4.3)$$

Pour $|t| > r_1 > 1$ et $r_1 < r$, le produit de Blashke 4.1 nous donne que $|\phi(t)| > k|t|$, où $k > 1$ est une constante indépendante de r. Puisque $\{t \mid |t| < kr\} \subset \{\phi(t) \mid |t| < r\}$, alors on peut continuer $h(t)$ analytiquement

sur $|t| < kr$ en utilisant 4.3. Puisque $f \circ h \circ \phi^{-1}(t) = h(t)$ pour toutes les branches de ϕ^{-1}, on vérifie facilement que toutes les singularités de $h(t)$ sont des pôles, en nombre fini (puisque ϕ est rationnelle et a donc un nombre fini de points critiques). Donc, par 4.3, on peut continuer $h(t)$ analytiquement sur tout le plan.

On doit maintenant considérer le comportement à l'infini de $h(t)$. Supposont premièrement que $\phi(t)$ a un pôle à distance finie, i.e. $\phi(t) \neq e^{2\pi i\tau}t^q$. Si $\phi(t)$ a un pôle en $z = b$, alors il existe une branche de la fonction inverse $\phi^{-1}(t)$ définie sur un voisinage U de l'infini tel que $\phi^{-1}(U) = V$, un voisinage de $z = b$. Alors $h(t) = f \circ h \circ \phi^{-1}(t)$ a pour image $f \circ h(V)$ sur U, et donc $h(t)$ a au plus un pôle d'ordre fini en $t = \infty$. Puisque les seules singularités de $h(t)$ sont des pôles, et qu'elles sont en nombre fini, $h(t)$ est rationnelle.

Traitons alors le cas plus délicat où $\phi(t) = e^{2\pi i\tau}t^q$. Comme on peut toujours supposer que $\tau = 0$, on obtient alors l'équation fonctionnelle suivante:

$$f \circ h(t) = h(t^q). \tag{4.4}$$

Puisque $h(t)$ n'est pas constante, on obtient que $q > 1$. Supposons que $h(t_0) = z_0$, où $t_0 \neq 0$. Alors, par 4.4,

$$h(t_0^{q^n}) = f^{\circ n} \circ h(t_0) = f^{\circ n}(z_0) = z_0.$$

Si λ est racine de $z^{q^n} - 1$, alors $h((\lambda t_0)^{q^n}) = f^{\circ n} \circ h(\lambda t_0) = z_0$. On obtient donc que z_0 a un nombre infini d'antécédents $h(\lambda t_0)$ sur un arc contenant z_0 (puisque les λ sont denses sur le cercle unité). Ces antécédents ont donc z_0 comme point d'accumulation, ce qui contredit que z_0 est un point fixe

attractif. Donc $h(t) = z_0$ n'a pas d'autre racine que $t = 0$. Mais puisque cette équation a des racines autres que $t = 0$ lorsque z_0 a des antécédents autres que lui-même, on en conclut que $f^{-1}(z_0) = z_0$. On peut alors conjuguer f par un fonction de Möbius qui place z_0 à l'infini, ce qui nous donne un polynôme $P(z)$. On voit alors que $h(t)$ n'a qu'un pôle fini, $t = 0$. Sur $|t| > 1$, $h(t)$ n'a donc pas de singularité.

On définit $M(r) = \max_{|t|=r} |h(t)|, r > 1$. Par la discussion ci-haut ainsi que le théorème 3.14, on a que $q = d$. De l'équation 4.4, on obtient que $M(r^d) \leq BM(r)^d$, où B est une constante positive. On peut choisir un $N > 1$ et un entier m tel que $N > B, M(N) < N^m$. On obtient alors les inégalités suivantes:

$$M(N^d) \leq B(N^d)^m < (N^d)^{m+1}.$$

et

$$M(N^{d^n}) \leq B^{1+d+\cdots+d^{n-1}}(N^{d^n})^m < (N^{d^n})^{m+1}.$$

Et donc $h(t)$ a au plus un pôle d'ordre $m + 1$ en $t = \infty$, et $h(t)$ est une fonction rationnelle.

On considère maintenant les cas possibles de fonction rationnelle $h(t)$.

Premièrement, $h(t)$ peut être une fonction linéaire. Alors J_α est un cercle ou un ligne droite.

Deuxièmement, $h(t)$ peut être une fonction de degré $s \geq 2$. Soit $D_1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$, et $E = h(D_1)$. Par l'équation 4.3, $f^{\circ n} \circ h(t) = h \circ \phi^{\circ n}(t)$; puisque $\phi^{\circ n}(t) \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ pour $z \in D_1$ (par les propriétés des produits de

Blashke), on a que

$$\lim_{n\to\infty} f^{\circ n}(z) = h(\infty) = \beta, z \in E.$$

Puisque $h(t)$ est de degré ≥ 2, alors $\Omega^*(z_0) \cap E \neq \emptyset$ (sinon un point $z \in \Omega^*(z_0)$ serait représenté par plus d'un point $t \in D$, mais $h(t)$ est bijective sur D). Donc $\beta = z_0$ et on obtient que $\Omega^*(z_0) = E$; alors $\Omega^*(z_0) \cup J_\alpha = \overline{\mathbb{C}}$, et donc $J_f = J_\alpha$ et l'ensemble de Fatou est simplement connexe.

On démontre maintenant que $h(t)$ doit en fait être de degré 2. Soit $z \in J$ tel que z n'est pas un point critique de $h(z)$. Il lui correspond alors s points distincts $y_1, \ldots, y_s$ sur le disque unité tels que $h(y_i) = z$. Si on déplace z sur un arc perpendiculaire à J (qui existe puisque J est une courbe analytique), alors les s points correspondants se déplacent sur des normales au disque unité, certains vers l'intérieur, d'autres vers l'extérieur. Si l'on déplace z encore sur cet arc perpendiculaire, mais en direction opposée, l'orientation des déplacements des points y_i est aussi renversée. Si l'on avait $s > 2$, on pourrait alors faire correspondre à un z intérieur à $\Omega^* z_0$ plus d'un point à l'intérieur du disque unité. Donc $s = 2$.

Pour compléter la démonstration de ce cas, il est plus utile de modifier la représentation conforme qu'on utilise pour J. Premièrement, par une transformation de Möbius, on peut supposer que les extrémités de l'arc J sont 0 et ∞. On peut ensuite faire la représentation conforme non pas sur le disque unité, mais sur le demi-plan supérieur, de manière que les points $z = 0$ et $z = \infty$ correspondents aux points $= 0$ et $t = \infty$ respectivement. La fonction $z = h(t)$ est alors $z = e^{2\pi i \tau} t^2$; par une autre transformation de Möbius, on

peut toujours se ramener au cas où $z = t^2$. Alors $h(t)$ transforme la droite réelle (la frontière du demi-plan supérieur) sur la demi-droite $\{z \mid \mathrm{Re}(z) \geq 0, \mathrm{Im}(z) = 0\}$. On a alors que J est un segment de droite ou un arc de cercle. □

Théorème 4.15. *Soit z_0 un point fixe attractif d'une fonction rationnelle hyperbolique f. Si $\Omega^*(z_0)$ est simplement connexe et $P_f \cap \partial\Omega^*(z_0) = \emptyset$, si $\partial\Omega^*(z_0)$ n'est pas un cercle ou un arc de cercle, alors $\partial\Omega^*(z_0)$ n'a pas de tangente en aucun points.*

Démonstration. Pour simplifier la démonstration, on supposera que $\Omega^*(z_0) = \Omega(z_0)$. Si ce n'est pas le cas, il suffit de remplacer J par $J_\alpha = \Omega^*(z_0) \cap J$ et f^{-1} par f_α^{-1}, la restriction de f^{-1} aux branches qui transforme $\Omega^*(z_0)$ en lui-même.

Soit D un domaine tel que $D \cap P_f =$. Alors par le lemme 4.4, toute suite de branches inverses $\{(f^{\circ n})^{-1}\}_{n=0}^{\infty}$ est normale sur D. Par la proposition 4.7, chaque sous-suite convergente de cette famille converge vers une constante qui est un point de J. Par le lemme 4.8, on conclut qu'il existe une telle sous-suite pour chaque point de J.

Soit $\zeta \in J$ et supposont que $\{(f^{\circ n_i})^{-1}\}_{i=0}^{\infty}$ est une suite de branches inverses qui converge vers ζ sur D. Soit ζ' un point d'accumulation de la sous-suite de l'orbite $O^+(\zeta)$ définie par $\{f^{\circ n_i}(\zeta)\}$. Puisque $P \cap J = \emptyset$, on peut toujours supposer que $\zeta' \in D$. On peut en extraire une autre sous-suite $\{\zeta\} = \{f^{\circ m}(\zeta)\}$ qui converge vers ζ' quand $m \to \infty$; ceci détermine une

sous-suite de branches inverses tel que $(f^{\circ m})^{-1}(\zeta_m) - \zeta = 0$ pour tout m. On définit alors une suite de fonctions $g_m(z)$ comme suit:

$$g_m(z) = \frac{(f^{\circ m})^{-1}(z) - \zeta}{((f^{\circ m})^{-1})'(\zeta_m)}. \tag{4.5}$$

Les fonctions $g_m(z)$ sont alors univalentes sur D (puisque les branches inverses le sont) et $g_m(\zeta_m) = 0, g'_m(\zeta_m) = 1$. Par un théorème de distorsion de Koebe (voir par example Hille [22]), les $g_m(z)$ sont uniformément bornés, et donc par le théorème d'Arzela-Ascoli 1.8, ils forment une famille normale sur D. On peut donc en extraire une sous-suite $\{g_{m_i}(z)\}$ qui converge uniformément vers une fonction $G(z)$ sur D. $G(z)$ n'est pas constante puisque $G'(\zeta') = 1$, et puisque tous les $g_m(z)$ sont univalents, $G(z)$ l'est aussi. Par l'équation 4.5, on obtient que

$$(f^{\circ m_i})^{-1}(z) - \zeta = a_{m_i}(G(z) + \epsilon_{m_i}(z)).$$

où les constantes $a_{m_i} \to 0$, et les fonctions $\epsilon_{m_i}(z) \to 0$ uniformément sur D lorsque $i \to \infty$.

Soit $D \cap J = E$, et choisissons un $w \in E$ tel que $w \neq \zeta'$. Considérons la limite suivante:

$$\lim_{i \to \infty} \arg((f^{\circ m_i})^{-1}(w) - \zeta). \tag{4.6}$$

Si J a une tangente au point ζ, alors cette limite est unique et correspond à l'argument de la tangente. Soit $\theta = \overline{\lim}_{i \to \infty} \arg a_{m_i}$ et $\arg(G(z)) = \phi$; alors $\phi + \theta$ est une des limites de 4.6. Donc, pour que cette limite soit unique, il est nécessaire que la fonction $\arg(G(z))$ soit constante lorsque z varie dans

E. Alors l'image $E' = G(E)$ doit être un segment de droite, et puisque $G(z)$ est univalente, E doit être un arc analytique. Puisque D est un voisinage de E, par la corollaire 2.17, il existe un N tel que $f^{\circ N}(E) = J$. Donc J est analytique, et par le lemme 4.14, J est un cercle ou un arc de cercle. □

4.4 J totalement disconnexe

Nous allons démontrer qu'il existe un cas très général où cette situation se produit. Les travaux récents de Branner et Hubbard sur les polynômes cubiques (voir [6, 7]) semblent indiquer que trouver une condition nécessaire et suffisante pour que J soit totalement disconnexe est un problème difficile en lui-même. On peut cependant obtenir un résultat assez général, qui est en fait dû à Fatou.

Théorème 4.16. *Soit f une fonction rationnelle telle que $P_f \subset \Omega^*(z_0)$, où z_0 est un point fixe attractif, alors J_f est totalement disconnexe.*

Démonstration. Puisque $P \subset F$, $J \cap P = \emptyset$ et donc f est hyperbolique. Soit $X = \cup_c O^+(c)$, l'union des orbites des points critiques. Puisque $P \subset \Omega^*(z_0)$ et f est hyperbolique, $F = \Omega^*(z_0)$. Donc $P = X \cup z_0$. On choisit une courbe de Jordan simple γ qui sépare P de $J = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega^*(z_0)$. Alors il existe un voisinage de γ qui ne rencontre pas P et ne le sépare pas, toutes les branches des fonctions inverses $(f^{\circ n})^{-1}$ sont bien définie. Par le théorème 4.2 (voir la démonstration), ces branches sont contractives pour la métrique sphérique, i.e. pour n assez grand, il existe un $\lambda < 1$ tel que $(f^{\circ n})^{-1}$ diminue le diamètre

de tout ensemble Y à distance positive de P par un facteur de λ^n. Donc le diamètre maximum de chaque composante de $(f^{\circ n})^{-1}(\gamma)$ tend vers 0 lorsque n tend à l'infini. Puisque $(f^{\circ n})^{-1}(\gamma)$ sépare P de J, et qu'il est formé de d^n courbes, où d est le degré de f, alors $\overline{F} \setminus F = J$ est totalement disconnexe. □

4.5 J=$\overline{\mathbb{C}}$

Les travaux de Rees et de Herman sur le sujet (voir [31, 32, 20]) montrent que cette situation est très commune - en fait il y a un sous-ensemble de mesure positive de fonctions rationnelles qui ont la sphère de Riemann comme ensemble de Julia. Ces démonstrations sont malheureusement très longues et hors de la portée de ce mémoire. Nous pouvons cependant démontrer ce qui suit:

Théorème 4.17. *Soit f une fonction rationnelle telle que tout ses points critiques ont des orbites strictement pré-périodiques, alors $J_f = \overline{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. Puisque tous les points critiques sont strictement pré-périodiques, il n'y a pas de cycles super-attractifs. Les propositions 3.12, 3.28, 3.37, 3.39, ainsi que le théorème de classification de Sullivan 3.3 donnent qu'un cycle de composantes de Sullivan est toujours associé à une orbite infinie d'un point critique. Puisque toutes les composantes de Fatou sont pré-périodiques (théorème 3.2), alors $F = \emptyset$, et donc $J = \overline{\mathbb{C}}$. □

Ceci n'est pas la seule façon de démontrer ce résultat, mains de loin la

plus facile. En fait, Fatou avait toute l'information nécessaire pour produire une démonstration de ce théorème, mais ne le donne pas (voir [18], pages 60-61).

On peut maintenant voir facilement le résultat annoncé plus tôt que la fonction $\frac{(z-2)^2}{z^2}$ a la sphère de Riemann comme ensemble de Julia puisque l'orbite de ses deux points critiques $(2, 0)$ sont pré-périodiques puisque $2 \mapsto 0 \mapsto \infty \mapsto 1 \mapsto 1$.

Chapitre 5

Approche de Julia

Historiquement, le développement de la théorie de l'itération a été poursuivi selon deux chemins différents: l'étude des points répulsifs par Julia, et l'étude des points réguliers par Fatou. Puis tous deux démontrent le théorème fondamental de la théorie de l'itération des fonctions rationnelles:

Théorème 5.1. *Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ une fonction rationnelle. Alors l'ensemble des points non réguliers coïncide avec l'adhérence de l'ensemble des cycles répulsifs.*

Ce théorème a déjà été démontré (théorème 2.16), où nous avons exposé la démonstration de Fatou. Le but de ce chapitre est d'introduire les outils nécessaires pour pouvoir donner la démonstration de Julia.

On a d'abord besoin des définitions de départ de Julia.

Définition 5.2. Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ une fonction rationnelle, alors soit E_f

l'ensemble de tous les points qui font partie d'un cycle répulsif ou d'un cycle de multiplicateur 1.

Pour ce chapitre, on notera E_f l'ensemble défini ci-haut, et J_f l'ensemble des points non-réguliers. Pour ne pas introduire de confusion, nous ne nommerons aucun ensemble 'ensemble de Julia' dans ce chapitre.

Le but de ce chapitre est d'exposer de façon moderne les idées de Julia, et non pas de reproduire ses définitions ainsi que ses démonstrations exactes. Les idées demeureront intactes, mais tout le développement sera poursuivi le plus simplement possible.

On procède de suivante: on démontre d'abord que E_f n'est pas vide. Pour démontrer ceci, on doit d'abord introduire le concept d'index holomorphe, qui conduit à la formule de sommation. Puis, après quelques remarques élémentaires, on procède à la démonstration de Julia.

5.1 E_f n'est pas vide

Pour démontrer ce résultat, il faut d'abord établir une formule qui relie les multiplicateurs des points fixes d'une fonction rationnelle.

Définition 5.3. Soit z_0 un point fixe isolé d'une fonction holomorphe $f(z)$ d'une variable complexe. Si $z_0 \neq \infty$, on définit l'*index holomorphe* de f en z_0 comme étant le résidu

$$\iota(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z - f(z)}$$

où on intègre sur une petite boucle dans le sens trigonométrique autour de z_0. Comme précédemment, si $z_0 = \infty$, on procède par un changement de variable local $\zeta = \phi(z) = 1/z$, et on définit le résidu de f à l'infini comme étant l'index holomorphe de $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ à l'origine.

Théorème 5.4. *Pour toute fonction rationnelle $f(z) \not\equiv z$, alors*

$$\sum_{z \in P} \iota(f, z) = 1$$

où P est l'ensemble de tous les points fixes de f. Lorsque z est un point fixe simple (i.e. de multiplicité 1), l'index est donné par la formule

$$\iota(f, z) = \frac{1}{1 - \lambda}$$

où λ est le multiplicateur de z. De plus, pour tous les points fixes, $\iota(f, z)$ est un invariant analytique local, c'est à dire que si g est conjuguée localement à f, alors $\iota(f, z) = \iota(g, M(z))$ où $g = M \circ f \circ M^{-1}$.

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que le point à l'infini n'est pas un point fixe de f. Donc f est bornée lorsque $|z| \to \infty$, et si on pose $g(z) = (1 - f(z)/z)^{-1}$, alors $\lim_{z \to \infty} g(z) = \frac{1}{1-0} = 1$. On obtient que le développement en série de Laurent de $(z - f(z))^{-1}$ est

$$z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + \cdots$$

pour $|z|$ grand. Donc l'intégrale de $\frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z - f(z)}$ sur une grande boucle autour de l'origine est égal à $+1$. Mais cette intégrale est aussi égale à la somme des

résidus $\iota(f,z)$ aux points fixes de f, et la formule de sommation des résidus en découle.

Soit z_j un point fixe de f avec $\lambda_j = f'(z_j) \neq 1$. On a que $\mathrm{Res}(\frac{1}{z-f(z)}, z_j) = \iota(f(z), z_j)$, mais aussi que z_j est un pôle simple de $\frac{1}{z-f(z)}$, alors dans un voisinage de z_j, on peut trouver un développement de Laurent de la forme:

$$\frac{1}{z-f(z)} = a_{-1}(z-z_j)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_j) + a_2(z-z_j)^2 + \cdots$$

En multipliant, puis en prenant le développement de Laurent de $f(z)$ autour de z_j, on peut trouver l'équation suivante pour a_{-1}:

$$a_{-1}(z-z_j)(1-\lambda) = (z-z_j)$$

et puisque $\lambda \neq 1$, $a_{-1} = \frac{1}{1-\lambda}$. Donc $\iota(f(z), z_j) = \frac{1}{1-\lambda}$.

Finalement, on démontre que $\iota(f, z_0)$ est un invariant analytique local. Soit $f_t(z) = f(z) + t$ une famille à un paramètre de perturbations analytiques de $f = f_0$, tel que f_t a tous ses points fixes distincts, avec multiplicateur différent de un pour tout t petit différent de zéro. Donc un point fixe multiple de $f = f_0$ va se diviser en un amas de points fixes simples et distincts près du point fixe original pour $t \neq 0$. L'intégrale autour d'une boucle fixe autour de z_0 (qui est assez grande pour contenir tout les points fixes perturbés) varie continûment avec t. De plus, cette intégrale est une somme de résidus qui eux sont des invariants analytiques locaux quand $t \neq 0$, alors $\iota(f_0, z_0)$ est aussi un invariant analytique local. □

Pour pouvoir déterminer que E_f n'est pas vide, il reste encore un lemme technique à démontrer, puis le résultat suivra comme un corollaire facile.

Lemme 5.5. *Un point fixe de multiplicateur $\lambda \neq 1$ pour une fonction rationnelle f est attractif si et seulement si son index ι a une partie réelle $Re(\iota) > 1/2$.*

Démonstration. Géométriquement, on voit ceci en remarquant que $\lambda \mapsto \frac{1}{1-\lambda}$ transforme le disque unité sur le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > 1/2$ bijectivement.

De façon arithmétique,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\frac{1}{1-\lambda}) > 1/2 &\iff \frac{1}{1-\lambda} + \frac{1}{1-\overline{\lambda}} > 1 \\
&\iff \frac{2-\overline{\lambda}-\lambda}{1-\lambda-\overline{\lambda}+\lambda\overline{\lambda}} > 1 \\
&\iff 1 > \lambda\overline{\lambda} \\
&\iff |\lambda| < 1
\end{aligned}$$

□

Puisque $\lambda \mapsto \frac{1}{1-\lambda}$ est une transformation de Möbius, elle est en fait bijective sur $\overline{\mathbb{C}}$. On a ensuite ce corollaire facile:

Corollaire 5.6. *Toute fonction rationnelle de degré 2 ou plus possède un point fixe répulsif, ou un point fixe de multiplicateur 1, ou les deux.*

Démonstration. Supposons que les $d+1$ points fixes soient distincts et qu'ils soient attractifs ou neutres avec multiplicateur $\neq 1$. Alors tous les index auraient un partie réelle $\mathrm{Re}(\iota) \geq 1/2$, et donc leur somme aurait une partie réelle plus grande ou égale à $\frac{d+1}{2} > 1$, mais ceci contredit la formule du théorème 5.4. □

On a immédiatement le résultat voulu.

Corollaire 5.7. *$E_f \neq \emptyset$ pour toute fonction rationnelle de degré 2 ou plus.*

5.2 Théorème fondamental

On a déjà démontré une partie de ce théorème: la proposition 2.5 est démontrée de façon élémentaire et donne que $E_f \subset J_f$. Puisque J_f est fermé, alors $\overline{E_f} \subseteq J_f$. Il reste donc à démontrer l'inclusion inverse.

Démonstration. (théorème 5.1) Par le corollaire 5.6, on peut se donner un point fixe $z_0 \in E_f$, et donc $z_0 \in J_f$. Soit $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ un ouvert qui rencontre J_f mais tel que $z_0 \notin U$.

L'idée est maintenant de construire une orbite $\cdots \mapsto z_2 \mapsto z_1 \mapsto z_0$ qui rencontre U et se 'termine' au point fixe z_0; de plus, on veut que la limite inverse de l'orbite $\lim_{n\to\infty} z_n$ existe et soit égale à z_0. Une telle orbite est apellée *homoclinique*. Puis on démontre qu'à partir de cette orbite, on peut trouver un point périodique répulsif qui appartient à U. Puisque ceci donne que pour chaque voisinage U d'un point de J_f il existe un $z' \in E_f$ tel que $z' \in U$, alors les points de J_f peuvent être approchés d'aussi près que l'on veut par des points périodiques répulsifs, et donc $J_f \subset \overline{E_f}$.

Soit N_0 un voisinage de z_0 qui évite z_r. Si z_0 est répulsif, on choisit N_0 comme étant un voisinage de z_0 où la conjugaison de Kœnigs pour f^{-1} (théorème 3.9) est définie; si z_0 est parabolique de multiplicateur 1, on choisit une partie de la 'fleur' de Leau-Fatou (un voisinage N_0 du théorème 3.19). Par le

théorème 2.12 (voir sa démonstration), il existe un entier $r > 0$ et un point $z_r \in J_f \cap U$ tel que $f^{\circ r}(z_r) = z_0$. On peut répéter cette procédure avec le voisinage N_0 et obtenir qu'il existe un entier $q > 0$ et un point $z_q \in N_0$ tel que $f^{\circ(q-r)}(z_q) = z_r$.

Par définition de N_0, on peut maintenant obtenir récursivement des antécédents $\cdots \mapsto z_j \mapsto z_{j-1} \mapsto \cdots \mapsto z_q$; ces points convergent automatiquement vers z_0, et appartiennent tous au voisinage N_0. Plus précisément, si z_0 est un point fixe répulsif, alors z_0 est un point fixe attractif pour f^{-1}, et puisque $z_q \in N_0$, le théorème 3.14 donne le résultat; si z_0 est un point parabolique, alors z_q ne peut être dans une pétale répulsive de f (puisque son orbite doit quitter N_0 infiniment souvent, mais en fait elle 'termine' en z_0), et le théorème 3.19 donne le résultat.

Supposont premièrement qu'aucun des points de l'orbite $\cdots \mapsto z_j \mapsto \cdots \mapsto z_0$ est critique. Alors il existe un petit disque ouvert V_q de $z_q \in N_0$ qui est transformé difféomorphiquement par $f^{\circ q}$ sur un voisinage V_0 de z_0. En trouvant les antécédents du voisinage V_0 par f^{-1}, on obtient des voisinages V_j des z_j pour tout j qui convergent vers le point limite z_0 lorsque $j \to \infty$. En particulier, si on choisit p assez grand, alors $\overline{V_p} \subset V_0$. Donc $(f^{\circ p})^{-1}$ transforme l'ouvert simplement connexe V_0 sur un sous-ensemble compact de lui-même, d'où cette transformation doit rétrécir la métrique de Poincaré sur V_0 par un facteur $c < 1$. Il existe donc un point fixe z' pour $(f^{\circ p})^{-1}$ dans V_p. Il est évident que ce point est un point périodique répulsif pour f. L'orbite de z' par f recoupe U par construction, ce qui démontre le théorème dans ce

cas.

Si l'orbite homoclinique contient des points critiques, on doit modifier légèrement cette démonstration. On peut toujours choisir nos voisinages simplements connexes V_j des z_j tel que $\overline{V_p} \subset V_0$ pour un p grand, et tel que $f(V_j) = V_{j-1}$. Cependant, un nombre fini de ces recouvrements seront ramifiés. On choisit alors une coupure C dans V_0 de la frontière au point milieu telle que $C \cap \overline{V_p} = \emptyset$. On peut alors choisir un secteur S_p de V_p tel que $f^{\circ p} : S_p \to V_0 \setminus C$ est un isomorphisme. La démonstration se termine comme auparavant. □

Remarque 5.8. Un lecteur attentif remarquera que nous avons inclu les points périodiques de multiplicateur 1 dans E_f, et que l'énoncé du théorème ne correspond pas exactement à dire que $J_f = \overline{E_f}$. Cependant, le corollaire 3.29 nous donne qu'il n'y a qu'un nombre fini de tels cycles, et la démonstration ci-haut est donc correcte. D'ailleurs plusieurs théorèmes récents dus à Shishikura démontre que ces points ont beaucoup de propriétés en commun avec les cycles répulsifs; ils en ont en fait assez en commun que Shishikura appelle les points de E_f *faiblement répulsifs*.

5.3 Conclusion

Le sujet de le dynamiques des fonctions rationnelles est très vaste et s'enrichi très rapidement grace au travail de Branner, Douady, Herman, Hubbard, Lei, Lyubich, McMullen, Milnor, Rees, Shishikura, Sullivan, Yoccoz et plusieurs

autres. Il reste cependant plusieurs problèmes ouverts résistant toujours à l'attaque incessante à laquelle ils sont soumis. Le plus important est probablement le suivant:

Problème 5.9. Est-ce que les fonctions rationnelles hyperboliques forment un sous-enemble dense et ouvert de toute famille raisonnable de fonctions rationnelles de degré donné?

La conjecture est que oui, ceci est vrai, mais le problème est ouvert même pour les polynômes quadratiques.

On a aussi des problèmes ouverts quand à la mesure de Lebesgue des ensemble de Julia:

Problème 5.10. Est-ce que tout les ensemble de Julia différents de $\overline{\mathbb{C}}$ sont de mesure de Lebesgue nulle?

La réponse est oui pour tous les exemples connus, mais ceci est aussi un problème ouvert même pour les polynômes quadratiques.

En fait, ces problèmes et plusieurs autres ont été attaqués récemment avec un certain succès en utilisant les applications quasi-conforme ainsi que les espaces de Teichmüller. D'autres outils comme les cylindres d'Écalle, les laminations invariantes et la renormalisation semblent avoir un avenir fructif.

Cette théorie a aussi son côté utile, notamment les résultats récents de Sutherland qui répondent aux dernières questions ouvertes sur la méthode de Newton, utilisée si couramment en génie et en sciences appliquées.

Bibliographie

[1] L. Ahlfors, *Complex analysis*, McGraw-Hill, 1979.

[2] M. Barnsley and S. Demko, eds., *Chaotic dynamics and fractals*, Academic Press, 1986.

[3] P. Blanchard, *Complex analytic dynamics on the Riemann sphere*, Bull. Amer. Math. Soc. **11** (1984), 85–141.

[4] ———, *Disconnected Julia sets*, In Barnsley and Demko [2], pp. 181–201.

[5] L.E. Böttcher, *The principla laws of convergence of iterates and their application to analysis*, Izv. Kazan. Fiz.-Mat. Obshch. **14** (1904), 155–234.

[6] B. Branner and J.H. Hubbard, *The iteration of cubic polynomials, Part ii: patterns and parapatterns*, Acta Math., to appear.

[7] ———, *The iteration of cubic polynomials, Part i: the global topology of parameter space*, Acta Math. **160** (1988), 143–206.

[8] H. Brolin, *Invariant sets under iteration of rational functions*, Arkiv für Matematik **6** (1965), 103–144.

[9] A.D. Bryuno, *Convergence of transformations of differential equations to normal forms*, Dokl. Akad. Nauk USSR **165** (1965), 987–989.

[10] H. Cremer, *Zum zentrumproblem*, Math. Ann. **98** (1927), 151–163.

[11] ———, *Über die Häufigkeit der Nichtzentren*, Math. Ann. **115** (1938), 573–580.

[12] R. Devaney, *Exploding Julia sets*, In Barnsley and Demko [2], pp. 141–154.

[13] A. Douady, *Julia sets and the Mandelbrot set*, The Beauty of Fractals (Peitgen & Richter, ed.), Springer, 1986, pp. 161–173.

[14] ———, *Disques de Siegel et anneaux de Herman*, Sém. Bourbaki 39^e année **677** (1986-87).

[15] A. Douady and J.H. Hubbard, *Itération des polynômes quadratiques complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **294** (1982), 123–126.

[16] ———, *On the dynamics of polynomial-like mappings*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **18** (1985), 287–343.

[17] P. Fatou, *Sur les équations fonctionelles*, Bull. Soc. Math. France **47** (1919), 161–271.

[18] ———, *Sur les équations fonctionelles*, Bull. Soc. Math. France **48** (1920), 33–94.

[19] ———, *Sur les équations fonctionelles*, Bull. Soc. Math. France **48** (1920), 208–314.

[20] M. Herman, *Exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur la sphère de Riemann*, Bull. Soc. Math. France **112** (1984), 93–42.

[21] ———, *Recent results and some open questions on siegel's linearization theorem of grems of complex analytic diffeomorphisms of* $\mathbb{C}^n$ *near a fixed point*, Proc. 8^{th} Int. Cong. Math. Phys., World Sci.

[22] E. Hille, *Analytic function theory*, Ginn and Comp., 1962.

[23] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, 1962.

[24] G. Julia, *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles*, J. Math. pures et app. **8** (1918), 47–245.

[25] L. Keen, *Julia sets*, Chaos and fractals: the mathematics behind the computer pictures (R. Devaney and L. Keen, eds.), Proc. Symp. Appl. Math., vol. 39, Amer. Math. Soc., pp. 57–74.

[26] M. Lyubich, *The dynamics of rational transforms: the topological picture*, Russian Math. Surveys **41** (1986), no. 4, 43–117.

[27] M.Y. Lyubich and A.È. Eremenko, *The dynamics of analytic transforms*, Leningrad Math. J. **1** (1990), no. 3, 563–634.

[28] R. Mañé, P. Sad, and D. Sullivan, *On the dynamics of rational maps*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **16** (1983), 193–217.

[29] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable: Introductory Lectures*, SUNY Stony Brook, Institue for Mathematical Sciences, preprint #1990/5.

[30] P. Montel, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, Gauthiers-Villars, Paris, 1927.

[31] M. Rees, *Ergodic rational maps with dense critical point forward orbit*, Erg. Th. & Dy. Sy. **4** (1984), 311–322.

[32] ———, *Positive measure sets of ergotic rational maps*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (1986), 383–407.

[33] M. Shishikura, *The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets*, SUNY Stony Brook, Institue for Mathematical Sciences, preprint #1991/7.

[34] ———, *On the quasiconformal surgery of rational functions*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **20** (1987), 1–29.

[35] C.L. Siegel, *Iteration of analytic functions*, Ann. of Math. **43** (1942), 607–612.

[36] D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics III: Topological conjugacy classes of anlytic endomorphisms*, preprint.

[37] ———, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*, Ann. of Math. **122** (1985), 401–418.

[38] J.-C. Yoccoz, *Linéarisation de germes de difféomorphismes holomorphes de* $(\mathbb{C}, 0)$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **306** (1988), 55–58.