Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
Discrete Mathematics 306 (2006) 2299–2302
DISCRETE MATHEMATICS
www.elsevier.com/locate/disc

Un des “problèmes plaisans et délectables” de Claude Berge

David Avis[a], Antoine Deza[b]

[a] School of Computer Science and GERAD, McGill University, 3480 University, Montréal, Canada H3A 2A7
[b] Department of Computing and Software, McMaster University, 1280 Main Street West Hamilton, Canada L8S 4K1

Received 16 May 2003; received in revised form 19 December 2004; accepted 12 December 2005
Available online 20 July 2006

à la mémoire de Claude Berge (1926–2002)

Abstract

Between 1962 and 1966 Claude Berge edited a series of columns that appeared in the Revue Française de Recherche Opérationnelle, entitled *Problèmes plaisans et délectables*, in homage of the 17th century work of Bachet. Each of these columns gives a new problem, along with solutions for earlier problems supplied by readers. The last of these columns contains a sorting problem, problem 41, in which we are given a string of n alternately white and black pegs on a one-dimensional board consisting of an unlimited number of empty holes. We are required to rearrange the pegs into a string of consecutive white and black pegs, using only moves which take a pair of adjacent pegs to two vacant adjacent holes. With $h(n)$ denoting the minimum number of moves needed to obtain a string of white pegs followed by black pegs, Berge gives the values $h(5)=3$, $h(6)=3$ and $h(7)=4$ and asks the reader to determine whether or not the function $h(n)$ is increasing. This was the last issue of the Revue, and as far as we can tell, no solution has been published. In this note we offer a solution to problem 41 by showing that $h(n)=\lceil n/2\rceil$ for $n\geqslant 5$.

Résumé

Dans une rubrique de la Revue Française de Recherche Opérationnelle intitulée *Problèmes plaisans et délectables* en hommage à l’œuvre du 17ème siècle de Bachet, Berge proposa en 1966 un problème d’ordonnancement de n jetons alternativement noirs et blancs à l’aide d’un coup qui déplace 2 jetons adjacents. Notant $h(n)$ le nombre minimum de coups nécessaires pour obtenir une séquence de jetons blancs suivis de jetons noirs, Berge montre que $h(5)=3$, $h(6)=3$ et $h(7)=4$ et semble indiquer que la fonction $h(n)$ est croissante. Dans cette note nous montrons que $h(n)=\lceil n/2\rceil$ pour $n\geqslant 5$.

Keywords: Berge moves; Berge sorting

1. Introduction

La Revue Française de Recherche Opérationnelle comprenait une rubrique intitulée *Problèmes plaisans et délectables* en hommage au recueil d’exercices publié en 1612 par Bachet [1]. En 1966, dans le numéro 41 de la revue, Berge [2] y proposa le problème suivant.

Le problème des jetons noirs et des jetons blancs

Pour $n\geqslant 5$, considérons une rangée de carrés alignés côte à côte; sur n carrés consécutifs, plaçons $\lceil n/2\rceil$ jetons noirs et $\lfloor n/2\rfloor$ jetons blancs en alternant les couleurs, comme pour les 5 jetons de la Fig. 1. Il s’agit à chaque

E-mail addresses: avis@cs.mcgill.ca (D. Avis), deza@mcmaster.ca (A. Deza).

0012-365X/$ - see front matter
doi:10.1016/j.disc.2005.12.027

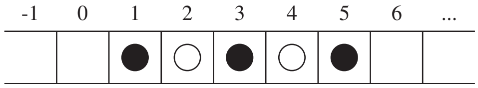

Fig. 1. Une séquence de 5 jetons à ordonner en 3 coups.

coup, de prendre deux jetons sur deux carrés adjacents et de les placer dans le même ordre sur deux carrés vides adjacents. Comment procéder pour obtenir une séquence de $\lfloor n/2 \rfloor$ jetons blancs suivis de $\lceil n/2 \rceil$ jetons noirs et quel est le nombre minimum $h(n)$ de coups nécessaires?

Avoir avoir montré que $h(5)=3$, $h(6)=3$ et $h(7)=4$, Berge semble indiquer que la fonction $h(n)$ est nécessairement croissante. Dans la Section 2 nous montrons que $h(n)=\lceil n/2 \rceil$.

2. Une solution optimale en $\lceil n/2 \rceil$ coups

Nous donnons d'abord explicitement une solution $\mathscr{S}_n$ en $\lceil n/2 \rceil$ coups avant de prouver par le Lemme 2.2 que cette solution est optimale.

2.1. *Une solution en $\lceil n/2 \rceil$ coups*

La notation choisie est la suivante. Le coup qui consiste à prendre les deux jetons sur les positions j et $j+1$ et à les placer dans le même ordre sur les positions i et $i+1$ est noté $\{i \quad j\}$. La succession des coups $\{i \quad j\}$ et $\{k \quad l\}$ est notée $\{i \quad j\} \cup \{k \quad l\}$. La succession $\{i \quad j\} \cup \{j \quad k\}$ est simplement notée $\{i \quad j \quad k\}$. Plus généralement, $\{i \quad j \quad k \quad l \quad \dots\}$ désigne l'enchaıˆnement des coups $\{i \quad j\}$ suivi de $\{j \quad k\}$ puis de $\{k \quad l\}$ puis de … Initialement le premier jeton noir est sur la position 1 et le dernier jeton est sur la position n. Par exemple, la solution en 3 coups pour $n=5$ est $\mathscr{S}_5=\{6 \quad 2 \quad 5 \quad 1\}$, voir la Fig. 2. Il est facile de vérifier que $\mathscr{S}_6=\{7 \quad 4 \quad 1\} \cup \{9 \quad 3\}$et $\mathscr{S}_7=\{8 \quad 5 \quad 2 \quad 8 \quad 1\}$ sont des solutions en respectivement 3 et 4 coups pour respectivement $n=6$ et 7.

Pour $n \geqslant 8$, les cas n pair et n impair sont étudiés séparément et l'expression de $\mathscr{S}_n$ devient régulière. Considérons d'abord le cas n pair. Les premières solutions $\mathscr{S}_n$ pour $n=4k$ et $4k+2$ avec k entier sont données par les Tables 1 et 2 où l'espace correspondant au $\lceil n/4 \rceil$—ème coup est ajusté de manière à faire apparaître la structure de $\mathscr{S}_n$. Le lecteur peut facilement en déduire l'expression générale de $\mathscr{S}_{4k}$ et de $\mathscr{S}_{4k+2}$ par récurrence. Il est également aisé de vérifier que les $n/2$ coups de $\mathscr{S}_n$ donnent bien une séquence de $n/2$ jetons blancs suivis de $n/2$ jetons noirs. On peut notamment remarquer que les $\lceil n/4 \rceil$ premiers coups consistent à mettre par deux les jetons de même couleur et que les $\lfloor n/4 \rfloor$ coups restants sont une des manières de classer les couples de jetons de même couleur ainsi obtenus. La Propositon 2.1, qui se démontre facilement par récurrence, souligne les caractéristiques de la solution $\mathscr{S}_n$.

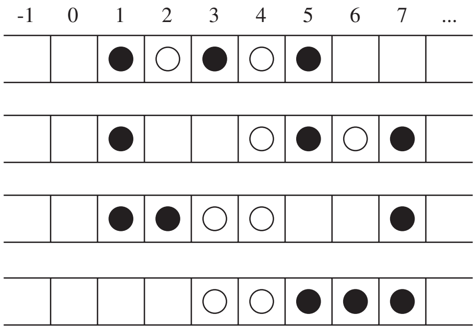

Fig. 2. La solution $\mathscr{S}_5=\{6 \quad 2 \quad 5 \quad 1\}$ pour ordonner 5 jetons en 3 coups.

Table 1
Premières solutions en $2k$ coups pour $n = 4k$

$\mathscr{S}_8 = \{9$	2	5											8	$1\}$
$\mathscr{S}_{12} = \{13$	2	5	10									6	12	$1\}$
$\mathscr{S}_{16} = \{17$	2	5	12	9							13	6	16	$1\}$
$\mathscr{S}_{20} = \{21$	2	5	14	9	18					10	15	6	20	$1\}$
$\mathscr{S}_{24} = \{25$	2	5	16	9	20	13			21	10	17	6	24	$1\}$
$\mathscr{S}_{28} = \{29$	2	5	18	9	22	13	26	14	23	10	19	6	28	$1\}$

Table 2
Premières solutions en $2k + 1$ coups pour $n = 4k + 2$

$\mathscr{S}_{10} = \{11$	2	7	4											10	$1\}$
$\mathscr{S}_{14} = \{15$	2	9	6	11									5	14	$1\}$
$\mathscr{S}_{18} = \{19$	2	11	6	15	8							14	5	18	$1\}$
$\mathscr{S}_{22} = \{23$	2	13	6	19	10	15					9	18	5	22	$1\}$
$\mathscr{S}_{26} = \{27$	2	15	6	23	10	19	12			18	9	22	5	26	$1\}$
$\mathscr{S}_{30} = \{31$	2	17	6	27	10	23	14	19	13	22	9	26	5	30	$1\}$

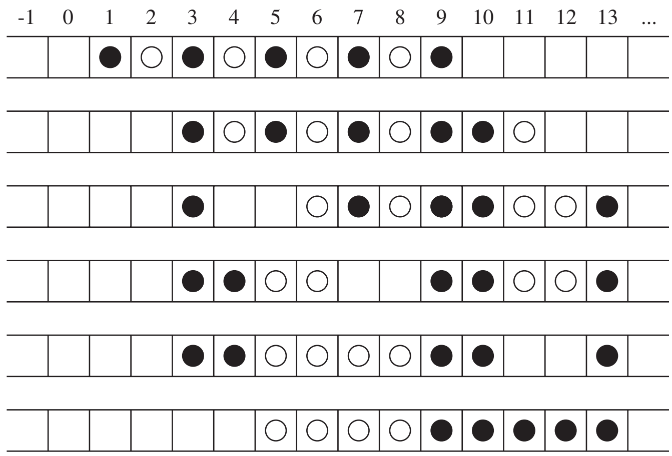

Fig. 3. La solution $\mathscr{S}_9 = \{10 \quad 1\} \cup \{12 \quad 4 \quad 7 \quad 11 \quad 3\}$ pour ordonner 9 jetons en 5 coups.

Proposition 2.1. *Pour n pair et* $n \geqslant 8$, $\mathscr{S}_n$ *satisfait les propriétés suivantes*:

(i) *après les* $n/2$ *coups de* $\mathscr{S}_n$, *les* $n/2$ *jetons blancs sont sur les positions* 3 *à* $(n+4)/2$ *suivis des* $n/2$ *jetons noirs sur les positions* $(n+6)/2$ *à* $n+2$;
(ii) *après les* $\lceil n/4 \rceil$ *premiers coups* $\mathscr{S}_n$, *tous les jetons noirs* (*resp*., *blancs*) *situés à gauche* (*resp*., *droite*) *de la position* $(n+4)/2$ *sont groupés en* $(n-2)/2$ *paires de même couleur*;
(iii) *la paire de jetons sur les positions* $n-1$ *et* n *n'est jamais déplacée*.

Le cas n impair se déduit facilement du cas pair. En effet, il suffit de remarquer que le coup $\{n+1 \quad 1\}$ nous ramène au cas pair. Plus précisément, si on "oublie" le jeton noir qui se trouve maintenant sur la position $n+1$, on obtient la séquence initiale correspondant au cas $n-1$ décalée de deux carrés sur la droite. Il suffit donc de jouer le coup $\{n+1 \quad 1\}$ suivi de la solution du cas pair en assimilant la position $n+2$ (resp., $n+3$) à la position $n+3$ (resp., $n+4$) et en ajoutant 2 à chaque position de $\mathscr{S}_{n-1}$. En d'autres termes, si on note $\mathscr{S}_n(i)$ la i-ème coordonnée de $\mathscr{S}$, nous avons $\mathscr{S}_n = \{n+1 \quad 1\} \cup \Sigma_{n-1}$ avec $\Sigma_{n-1}(i) = \mathscr{S}_{n-1}(i) + 2$ pour $\mathscr{S}_{n-1}(i) \leqslant n-3$ et $\Sigma_{n-1}(i) = \mathscr{S}_{n-1}(i) + 3$ pour $\mathscr{S}_{n-1}(i) \geqslant n-1$. Par exemple, nous avons $\mathscr{S}_9 = \{10 \quad 1\} \cup \{12 \quad 4 \quad 7 \quad 11 \quad 3\}$, voir la Fig. 3. Remarquons que la solution $\mathscr{S}_{n-1}$ est jouable—en oubliant le jeton noir sur la position $n+1$—car cette solution ne déplace jamais simultanément les 2 jetons qui lui sont adjacents; voir le point (iii) de la Proposition 2.1 qui signifie que $n-2 \notin \mathscr{S}_{n-1}$ pour n impair. On obtient ainsi une solution $\mathscr{S}_n$ en $\lceil n/2 \rceil$ coups pour n impair.

2.2. *Une borne inférieure pour le nombre minimum de coups nécessaires*

Nous prouvons ensuite qu'au moins $\lceil n/2 \rceil$ sont nécessaires pour obtenir une séquence de jetons blancs suivis de jetons noirs. Autrement dit, nous avons:

Lemme 2.2. *Pour $n \geqslant 5$, le nombre $h(n)$ minimun de coups satisfait $h(n) \geqslant \lceil n/2 \rceil$.*

Preuve. Le nombre de jetons qui, après le i-ème coup, sont suivis soit d'un carré vide soit d'un jeton d'une couleur différente est appelé le *désordre* et est noté $\mathscr{D}_n(i)$. Il est facile d'observer que nous avons $|\mathscr{D}_n(i) - \mathscr{D}_n(i+1)| \leqslant 2$. Un coup tel que $\mathscr{D}_n(i) - \mathscr{D}_n(i+1) = 2$ (resp., 1 et 0) est appelé un coup *optimal* (resp., *sous-optimal* et *neutre*). Le désordre de la position inititiale est $\mathscr{D}_n(0) = n$ et celui de la position finale est $\mathscr{D}_n(h(n)) = 2$. Le coup initial ne pouvant pas être optimal, nous en déduisons immédiatement que $h(n) \geqslant n/2$ pour n pair. Nous remarquons ensuite que, pour n impair, un coup initial sous-optimal place un jeton blanc à l'extrême droite de la rangée en position $n+2$. Ce jeton blanc ne pouvant pas être replacé à gauche de tous les jetons noirs sans que soit joué un autre coup sous-optimal, nous obtenons que $h(n) \geqslant (n+1)/2$ pour n impair. □

3. Quelques problèmes similaires

Le problème des jetons noirs et des jetons blancs peut être généralisé de plusieurs manières. Identifiant les jetons noirs à des 1 et les jetons blancs à des 0, nous proposons 3 problèmes de tri utilisant le même coup que celui introduit par Berge et que nous appelons donc le *coup de Berge*.

(1) La séquence initiale est généralisée à une $\{0, 1\}$-séquence quelconque de longueur n. Le nombre minimun de coups nécessaires pour obtenir la séquence $0 \ldots 01 \ldots 1$ est noté $\mathscr{H}_n$. Le Lemme 2.2 implique que $\mathscr{H}_n \geqslant \lceil n/2 \rceil$. A part la séquence alternée $1010\ldots$ quelle autre séquence peut être triée en $\lceil n/2 \rceil$ coups de Berge?
(2) La séquence initiale est généralisée à une $\{0, 1, \ldots, 9\}$-séquence et la séquence finale est $0 \ldots 01 \ldots 1 \ldots 9 \ldots 9$. Quel est le nombre minimum de coups de Berge nécessaires?
(3) La séquence initiale est composée de n entiers. Quel est le nombre minimum de coups de Berge nécessaires pour trier ces n entiers?

Le problème initial des jetons noirs et des jetons blancs proposé par Claude Berge ainsi que la généralisation (1) sont illustrés par le jeu conçu par Jean-Luc Fouquet qui propose également une généralisation au plan, voir [5]. Une autre généralisation consiste en un coup qui déplace k jetons adjacents, voir [3,4] où Antoine Deza et William Hua conjecturent que le nombre minimum de k-coups de Berge nécessaires pour trier la séquence alternée de longueur n est $\lceil n/2 \rceil$ pour $n \geqslant 2k + 11$.

Remerciements

Nous tenons à remercier Birgit Bock pour son aide bibliographique et tout particulièrement Peter Hammer pour avoir rendu possible la publication en français.

References

[1] C.G. Bachet de Méziriac, Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres, Partie recueillie de divers autheurs, et inventez de nouveau avec leur démonstration, par Claude Gaspard Bachet, Sr de Méziriac, Très utile pour toutes sortes de personnes curieuses, qui se servent d'arithmétique, A Lyon, chez Pierre Rigaud (1612), seconde éd. (1624).
[2] C. Berge, Problèmes plaisans et délectables, le problème des jetons noirs et des jetons blanc, Revue Française de Recherche Opérationnelle 41 (1966) 388.
[3] A. Deza, ⟨http://www.cas.mcmaster.ca/~deza/berge_sorting.html⟩, 2005.
[4] A. Deza, W. Hua, Berge sorting, Pacific Journal of Optimization, to appear.
[5] J.-L. Fouquet, ⟨http://cgm.cs.mcgill.ca/~avis/JeuClaudeBerge.zip⟩, 2003.