Kategorien von Termgraphen mit gebundenen Variablen

Wolfram Kahl

Institut für Programmiersprachen und Programmentwicklung

Fakultät für Informatik

Universität der Bundeswehr München

email: kahl@informatik.unibw-muenchen.de

Zusammenfassung

Mit dem Ziel einer Erweiterung der algebraischen Termgraphersetzung auf die Ausdruckskraft von „Combinatory Reduction Systems“ führen wir zuerst eine neuartige Definition von Termgraphen ein, in der Variablenbindung und Variablenidentität primitive Konzepte sind, und die Metavariable mit Nachfolgern erlaubt. Nach der Diskussion von Identifizierung und Sharing in diesen Graphen definieren wir Intervalle und Abschnitte, die als Bilder von Metavariablen, insbesondere auch von solchen mit Nachfolgern, dienen können. Darauf aufbauend gelingt es uns, eine Hierarchie von strukturerhaltenden Abbildungen zwischen unseren Termgraphen zu errichten, die an ihrer Spitze einen Homomorphismenbegriff hat, der „Einfangen von Variablen“ vermeidet und mehrfache Instanzen von Metavariablen angemessen berücksichtigt.

Die verschiedenen Kategorien, die wir so erhalten, haben unterschiedliche Anwendungen, insbesondere in der Termgraphersetzung. Im Anhang präsentieren wir einen Überblick über einen neuartigen Ansatz zur algebraischen Termgraphersetzung (der in [Kah96] ausführlich vorgestellt wird) zusammen mit den zwei wesentlichen Beweisen zur Durchführbarkeit der benötigten Konstuktionen.

Abstract

With the aim of extending algebraic term graph rewriting to the expressiveness of Combinatory Reduction Systems, we first introduce a novel definition of term graphs with primitive notions of variable binding and variable identity, and with metavariables with successors. After discussing identification and sharing in these graphs, we introduce intervals and segments to serve as images of metavariables, including those with successors. Building on this we are able to establish a hierarchy of structure-preserving mappings between our term graphs, including at its top a concept of homomorphism avoiding “capture of variables” and catering for multiple instances of metavariables.

The individual categories this gives rise to have different uses, namely in term graph rewriting, and the appendix provides an overview over a novel approach to algebraic term graph rewriting (fully presented in [Kah96]) together with the two crucial proofs concerning the viability of the constructions involved.

Inhalt

Kapitel 1

Einführung

Programme werden meist als Zeichenreihen dargestellt. Diese Auffassung eines Programms als Zeichenreihe wird jedoch schon der Zergliederung in Konstituenten, z.B. für die Einführung einer denotationellen Semantik, nicht mehr völlig gerecht. Die übliche Darstellung von Programmen als Zeichenreihen ist daher zumeist nur als eine spezielle Codierung ihres Syntaxbaumes, also eines speziellen Termgraphen, aufzufassen.

Allgemeine Termgraphen sind ein nützliches Medium für die Implementierung funktionaler Programmiersprachen und symbolischer Berechnungen bis hin zu Logikprogrammierung und automatischem Beweisen. Obschon bereits 1971 die Graphreduktion als effiziente Implementierungsmethode für den λ-Kalkül entwickelt wurde [Wad71], was auch den Beginn der Termgraphersetzung markiert, so erschien doch erst 1993 das erste, ganz dem Thema allgemeiner Termgraphersetzung gewidmete Buch [SPvE93].

Da Termgraphersetzung meist als effiziente Implementierung von Termersetzung aufgefaßt wird, liegt ein Vergleich mit diesem Gebiet nahe. In den zwanziger Jahren entwickelte Schönfinkel [Sch24] die kombinatorische Logik, die ein spezielles Termerstzungssystem ist (und unabhängig von ihm Curry etwas später [Cur30]). In den dreißiger Jahren erfand Church den λ-Kalkül [Chu41], der zwar als Ersetzungssystem komplizierter ist, aber schnell populär wurde. In der Folge kam auch allgemeinere Beschäftigung mit Termersetzung auf (z.B. [New42]), von der die kombinatorische Logik ein spezieller Fall ist. Der λ-Kalkül wurde aufgrund der besonderen β-Reduktion lange Zeit als eigenes Forschungsgebiet betrachtet. Erst 1980 verallgemeinerte Klop den Mechanismus der β-Reduktion zu den zunächst relativ wenig beachteten „Combinatory Reduction Systems" (CRS) [Klo80]. Seit etwa 1990 ist mit der Einführung von „Ersetzungssystemen höherer Ordnung" (Higher Order Rewriting Systems, HORSs, [Wol, Nip91]) auch wieder Interesse an CRS erwacht (z.B. mehrere Arbeiten in [HOA '93]).

Wie in der allgemeinen Graphersetzung zerfällt auch die Behandlung der Termgraphersetzung in zwei Richtungen: Eine operationelle, zu der auch die Graphreduktion gehört, und eine algebraische, die kategorielle Methoden verwendet. Alle uns bisher bekannten Ansätze algebraischer Termgraphersetzung entsprechen nur konventionellen Termersetzungssystemen. Einzig die operationellen Ansätze der Graphreduktion decken auch den λ-Kalkül ab. Neueste, ebenfalls operationelle Ansätze aus dem Gebiet der optimalen Graphreduktion wagen sich sogar in Richtung allgemeinerer CRS vor [AL93].

Inhalt des vorliegenden Berichtes ist es, Kategorien für eine algebraische Beschreibung von Termgraphersetzungssystemen mit einer an CRS heranreichenden Ausdrucksfähigkeit zur Verfügung zu stellen.

Dieser Bericht bedient sich durchgehend relationenalgebraischer Notation für die formalen Darstellungen, angelehnt vor allem an [SS93]. Ohne diese „Stenographie formaler Argumentation" hätten die vorgestellten Beweise sich ins Uferlose ausgedehnt; das gesteckte Ziel wäre wohl kaum mit vertretbarem Aufwand zu erreichen gewesen.

1.1 Hintergrund

Zunächst gehen wir etwas genauer auf die oben angerissenen Gebiete ein. Wir beschränken dabei jedoch die Wiedergabe formaler Definitionen auf ein Minimum; angesichts der Fülle der einzuführenden Begriffe und Notationen geben wir uns damit zufrieden, jeweils zu gegebener Zeit konkrete Bezüge herzustellen.

Termersetzung

Termersetzungssysteme im engeren Sinne [New42, DJ90] betrachten Terme aufgebaut aus

- n-stelligen *konstanten Konstruktoren* (meist *Funktionssymbole* genannt), und
- 0-stelligen *Variablen*,

d.h. ein Term ist entweder eine Variable (aus einer meist abzählbaren Menge von Variablen) oder ein Aggregat der Form $f(t_1, \ldots, t_n)$, wobei $n \geq 0$ gilt, f ein n-stelliges Funktionssymbol ist und t_i für jedes $0 < i \leq n$ ein Term ist. (Der traditionell verwendete Name „Funktionssymbol" ist semantisch motiviert; da wir uns in dieser Arbeit nur mit den syntaktischen Aspekten beschäftigen, erscheint der Name „konstanter Konstruktor" als Gegensatz zu den Variablen angemessener. Wir werden daher weiter von konstanten Konstruktoren sprechen, wo sonst meist der Name „Funktionssymbol" verwendet wird.)

Im ersten Fall ist der Term selbst sein einziger Teilterm, im zweiten Falle sind alle Teilterme der t_i wie auch der Term selbst Teilterme. Sei nun $\Box$ eine ausgezeichnete Variable, dann heiße der Term t ein *Kontext*, wenn er $\Box$ genau einmal als Teilterm hat.

Eine Substitution ist eine Funktion von Variablen in Terme, deren Definitionsbereich meist als endlich gefordert wird. Eine Substitution mit einelementigem Definitionsbereich $\{v\}$ denotieren wir als $[v\backslash t]$. Induktiv über den Termaufbau läßt sich die Anwendung von Substitutionen auch auf Terme ausdehnen.

Eine Ersetzungsregel ist ein Paar (l, r) von Termen. Eine solche Regel wird angewendet auf einen Term t, indem man zunächt einen Kontext t_0 und eine Substitution σ bestimmt, so daß $t = [\Box\backslash\sigma l]t_0$. Das Ergebnis des Ersetzungsschrittes ist dann $t_1 = [\Box\backslash\sigma r]t_0$. Als Beispiel kann für die Arithmetik, wo das Funktionssysmbol m für Multiplikation, a für Addition und s für Substraktion stehe, die Kommutativität der Multiplikation durch die Regel $(m(x, y), m(y, x))$ ausgedrückt werden. Eine Beispielanwendung dieser Regel zeigt das folgende Bild:

$$\begin{tikzcd}
m(x,y) \; = \; l \arrow[r] \arrow[d] & r \; = \; m(y,x) \arrow[d] \\
a(5, m(3, s(6,2))) \; = \; t = [\Box\backslash\sigma l]t_0 \arrow[r] & [\Box\backslash\sigma r]t_0 \; = t_1 \; = \; a(5, m(s(6,2), 3))
\end{tikzcd}$$

Hier ist $t_0 = a(5, \Box)$ und $\sigma = \{(x, 3), (y, s(6, 2))\}$. Die Terme, auf die eine solche Regel angewendet wird, sind meist — wie auch hier im Beispiel — variablenfreie „Grundterme"; Variable interessieren nur als „Schemavariable" für die Ersetzung.

λ-Kalküle kennen zusätzlich noch *Variablenbindung*. Es gibt daher im Vergleich zu Termersetzungssystemen eine weitere Form der Termbildung: Für eine Variable x und einen Term t ist $\lambda\, x.t$ ein Term, in dem x nicht frei vorkommt, da x als durch die λ-Abstraktion *gebunden* betrachtet wird.

Die beiden Regeln, die auf den Bindungsmechanismus Rücksicht nehmen, sind die β-Reduktion und die η-Reduktion. Die β-Reduktion enthält die Substitution als Teil ihrer Formulierung, und ist daher nicht als Termersetzungsregel zu formulieren[1]:

$$(\lambda\, x.E)\ A \;\to\; [x\backslash A]E \qquad\qquad (\lambda\, x.E[x])\ A \;\to\; E[A]$$

[1] λ-Kalküle mit expliziten Substitutionen, meist mit Namen wie „$\lambda\,\sigma$-Kalkül", emulieren die Substitution durch umfangreiche Termersetzungssysteme [ACCL, Les].

In der zweiten Version ist E bereits keine normale Termersetzungsvariable mehr. Gelegentlich wird eine solche Notation salopp als „Variable für einen Ausdruck, in dem x vorkommen kann“ erklärt, kann aber auch bereits als Variable zweiter Ordnung bzw. als *Metavariable* aufgefaßt werden.

Nachdem Aczel bereits ähnliche Ideen entwickelt hatte [Acz78], führte Klop **Combinatory Reduction Systems** (CRS) als Verallgemeinerung von Systemen wie dem des λ-Kalküls ein [Klo80]. Hier kennt man *Metaterme*, aufgebaut aus

- n-stelligen *konstanten*, evtl. *bindenden Konstruktoren*,
- 0-stelligen *bindbaren Variablen* und
- n-stelligen *Metavariablen*

d.h. ein Metaterm ist entweder eine bindbare Variable (aus einer meist abzählbaren Menge von Variablen) oder — sei t_i für jedes $0 < i \leq n$ ein Metaterm und es sei jeweils $n \geq 0$ — ein Aggregat entweder der Form $f(t_1, \ldots, t_n)$, wobei f ein n-stelliges Funktionssymbol, d.h. ein konstanter nicht bindender Konstruktor ist, oder der Form $\alpha x.(t_1, \ldots, t_n)$, wobei α ein n-stelliger bindender konstanter Konstruktor ist und x eine bindbare Variable, oder der Form $M(t_1, \ldots, t_n)$, wobei M eine n-stellige Metavariable ist. Die Mechanismen der Variablenbindung sind dieselben wie im λ-Kalkül; freie und gebundene Variable werden analog berechnet.

Eine Ersetzungsregel ist ein Paar von geschlossenen Metatermen, in denen also keine bindbaren Variablen frei vorkommen. Wann immer ein Teilterm der linken Regelseite von der Form $M(t_1, \ldots, t_n)$ für eine Metavariable M und Terme $t_1, \ldots, t_n$ ist, müssen die t_i alle verschiedene (bindbare und im geschlossenen Metaterm daher gebundene) Variable sein. Was die Substitution für die Variablen im konventionellen Termersetzungssystem ist, das ist hier die *Belegung* für die Metavariablen. Für die Anwendung einer Regel werden ein Kontext und eine Belegung der Metavariablen bestimmt — die Anwendung einer Belegung auf einen Metaterm wird mit Hilfe der Substitution definiert — und die Ersetzung verfährt ansonsten analog zu der der Termersetzung.

Die Instantiierung eines Metaterms durch eine Belegung ist durch Anwendung von Substitution definiert und bewirkt, daß ein „Einfangen von Variablen“ vermieden wird. Was diese Bedingung ohne vorgegebene Belegung bedeutet, ist der Tradition des λ-Kalküls folgend in der Literatur über Combinatory Reduction Systems kaum je genau erläutert worden. Man verdeutliche sich nur, daß die Regel $(\lambda\, x.@(F, x)) \to F$, die unter Verwendung der einstelligen bindenden λ-Abstraktion, des zweistelligen Funktionssymbols „@“ für Applikation, der bindbaren Variablen x und der nullstelligen Metavariablen F formuliert ist, bereits die Regel der η-Reduktion im λ-Kalkül ist: Die üblicherweise ausformulierte Nebenbedingung, daß x nicht frei in F (d.h. in dem für F eingesetzten Teilterm) vorkommen dürfe, folgt bei Betrachtung des oben definierten Anwendungsmechanismus bereits aus der Definition der Substitution (die ja zur Vermeidung solcher Probleme gebundene Variable umbenennt).

Anwendung von Regeln ist in CRS nur auf Termen definiert, d.h. auf Metatermen ohne Metavariable, entsprechend den Grundtermen der Termersetzung.

Im Rahmen des Projektes CIP wurde etwa gleichzeitig mit Klop, aber wohl unabhängig, ein i.w. den Combinatory Reduction Systems entsprechender Ansatz entwickelt. Die Rolle der Metavariablen Klops spielen hier „Schemavariable“; so stehen $\mathcal{B}[\,]$, $\mathcal{U}[\,]$ und $\mathcal{V}[\,]$ in [BW84, Seite 281] für einstellige Metavariable:

$$\frac{\textbf{if}\quad \mathcal{B}[m]\ \textbf{then}\ \mathcal{U}[m]\ \textbf{else}\ \mathcal{V}[m]\ \textbf{fi}}{\textbf{if}\ \neg\,\mathcal{B}[m]\ \textbf{then}\ \mathcal{V}[m]\ \textbf{else}\ \mathcal{U}[m]\ \textbf{fi}}\ \updownarrow$$

Die Bindung der Variablen m ist hier allerdings nicht offensichtlich, und überhaupt wurde diesen Aspekten im Rahmen des Projektes CIP wohl nicht viel Aufmerksamkeit geschenkt (siehe höchstens [Ste80]); in den beiden Übersichtsbänden [CIP-L, CIP-S] wird keine Definition angeführt.

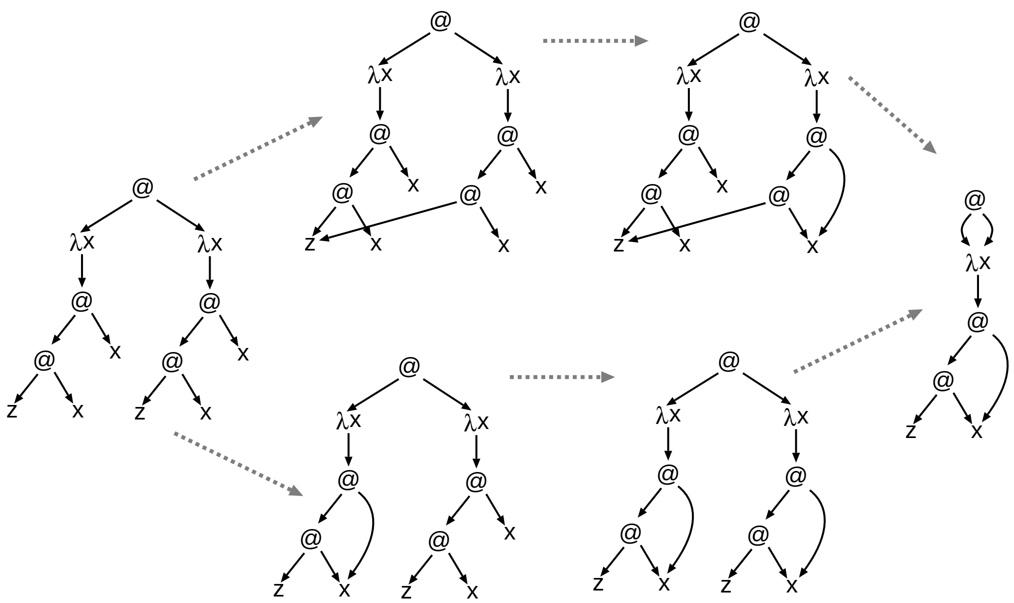
Higher Order Rewriting Systems, HORSs, wurden in den letzten Jahren von Nipkow [Nip91] und Wolfram [Wol] eingeführt. Die Variante von Nipkow entspricht CRS mit λ-Kalkül als Metasprache, wofür [vOvR] einen formalen Beweis erbracht haben. Die Variante von Wolfram (siehe auch [Wol93]) kann noch einmal als Verallgemeinerung aufgefaßt werden, die dann teilweise keine so offensichtliche syntaktische, bzw. „termgraphische“, Entsprechung mehr hat.

Termgraphen und Graphreduktion

Zu einer effizienteren Darstellung von Termen im Rechner gelangt man durch **Sharing**, d.h. durch Identifizierung gleicher Teilterme. Man erhält dann **Termgraphen**.

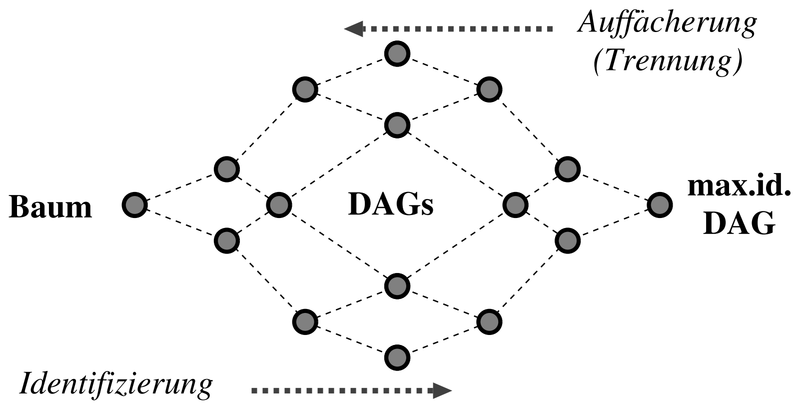
Von der Seite der Graphentheorie betrachtet zeichnen sich Termgraphen dadurch aus, daß Anzahl und Markierung der ausgehenden Kanten eines jeden Knotens jeweils eindeutig durch seine eigene Knotenmarkierung festgelegt werden.

Terme können in Term-Bäume übersetzt werden, allgemeinere Termgraphen kann man sich als durch Identifizierung gleicher Unterbäume aus diesen hervorgegangen vorstellen. So zeigen wir im folgenden Bild links den λ-Term $(\lambda\, x.z\ x\ x)\ (\lambda\, x.z\ x\ x)$ als Baum; rechts davon verschiedene Stufen der Identifizierung.



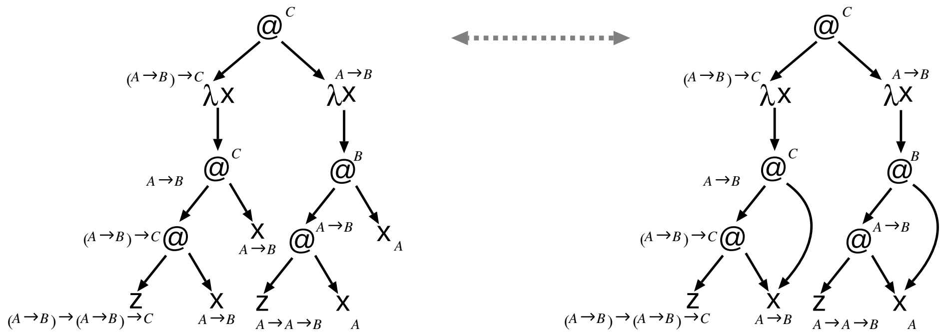
Funktionsapplikation des λ-Kalküls machen wir auch in den Bildern — wie schon oben bei der Diskussion der η-Regel im Rahmen von CRS — als zweistelligen Konstruktor „@“ explizit. Bei dieser Umsetzung von λ-Ausdrücken in kreisfreie Termgraphen ist zu beachten, daß jeder Knoten einem — ggf. mehrmals vorkommenden — Teilterm entspricht; eine λ-Abstraktion hat die gebundene Variable nicht als unmittelbaren Teilterm, so daß die gebundene Variable im λ-Knoten mit aufgeführt werden muß.

Offensichtlich wird durch diese Identifizierungen eine Ordnung auf Termgraphen induziert; in Abschnitt 4.2 wird sich herausstellen, daß die aus einem Baum durch Identifizierung hervorgegangenen Termgraphen bezüglich des Identifizierungsgrades einen vollständigen Verband bilden. Dabei ist der Baum das kleinste und der maximalidentifizierte Graph, der für endliche Bäume immer kreisfrei, also ein DAG — „*Directed Acyclic Graph*“ — ist, das größte Element:



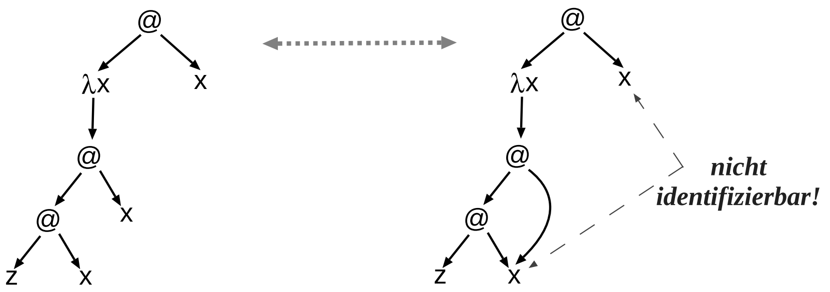
Einem Term (-Baum) ist also eindeutig ein entsprechender maximalidentifizierter DAG zugeordnet; ein beliebiger DAG hingegen beinhaltet echt zusätzliche Information, die man sich im Rahmen nichtdeterministischer Semantik oder auch der Programmtransformation zunutze machen kann.

Typisierung kann hierbei das Ergebnis beeinflussen; am Prinzip ändert sich jedoch nichts, da die Typisierung nur eine erweiterte Knotenmarkierung ist. Der Ausgangsbaum im folgenden Bild ist im Prinzip der gleiche wie im vorvorigen, nur typisiert, so daß weniger Identifizierungsmöglichkeiten bestehen; rechts ist der entsprechende typisierte maximalidentifizierte Graph dargestellt:



Die platzsparende Darstellung von λ-Ausdrücken als Termgraphen und die entsprechende Umsetzung der β-Reduktion gehen auf Wadsworth zurück, der in seiner Dissertation [Wad71] die **Graphreduktion** als effiziente Implementierung des λ-Kalküls einführte und als korrekt bewies.

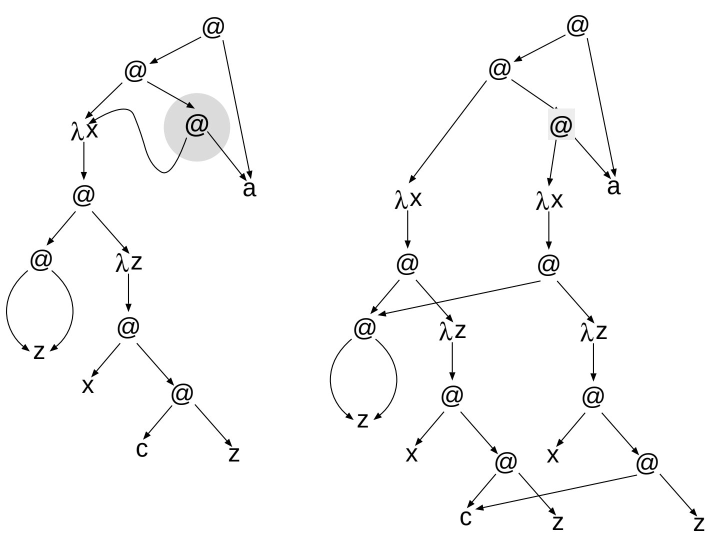
Da λ-Terme sich von den Termen konventioneller Termersetzung durch die Variablenbindung unterscheiden, ist es nur natürlich, daß an die entsprechenden Termgraphen eine zusätzliche Bedingung gestellt werden muß; Wadsworth formulierte, daß die Bindung eindeutig sein müsse, wobei er „globalen“ (freien) Variablen einen fiktiven globalen Bindungsknoten „*“ zuordnete.



Er erkannte weiter, daß die β-Reduktion, naiv angewandt, nicht in jeder Situation zu einem korrekten Ergebnis führt, und definierte den Begriff des „zulässigen Redex", auf dessen λ-Knoten nur eine Kante einläuft.

Um von einem beliebigen λ-Graphen zu einem mit zulässigem Redex zu gelangen, müssen zumindest Teile der Abstraktion kopiert werden. Es stellt sich heraus, daß nur „nicht abstrahierbare Teile" kopiert werden müssen. Man kann — im Vorgriff auf die entsprechende Definition dieser Arbeit — formulieren, daß ein Knoten „nicht abstrahierbar" ist, wenn man von ihm aus über einen Pfad aus Bindungen und Nachfolgern die gebundene Variable des Redex erreichen kann. Als Ergebnis erhält Wadsworth, daß jeder β-Reduktionsschritt in der Graphreduktion Sharing erhält, soweit dies mit einfachen Termgraphen möglich ist.

Im folgenden Bild links ist der Redex am grau hinterlegten „@"-Knoten nicht zulässig; in der Mitte wurden die nicht abstrahierbaren Teile kopiert, so daß ein zulässiger Redex entstand, auf den die β-Reduktion mit Ergebnis rechts angewendet werden kann:

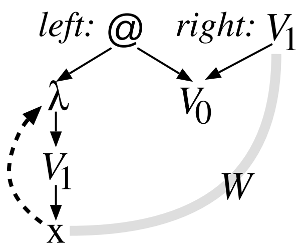


Nach Lévy [Lév80] kann so keine „optimale" Reduktion erreicht werden. Einen ersten Ansatz zur optimalen Reduktion hat Staples [Stab] angegeben; dieser und neuere Ansätze [Lam, Kat90, GAL, AL93] verlassen allesamt den Bereich der konventionellen Termgraphen.

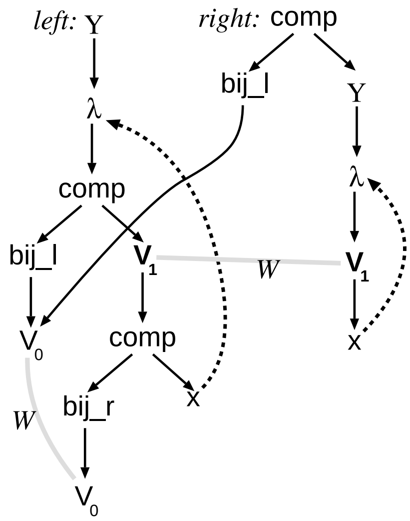
HOPS

Seit Mitte der achtziger Jahre wird in einer von Gunther Schmidt geleiteten Gruppe das „**H**igher **O**bject **P**rogramming **S**ystem" entwickelt[2], kurz „HOPS" genannt [ZSB, Lib87, Bay87, BBK90, SBK90, Kah91, Hel91, Küh92, Kah, Kah94, BK94]. Es handelt sich hierbei um ein graphisch interaktives Programmier- und Programmtransformationssystem für eine funktionale Sprache. Programme werden in diesem System nicht als Zeichenreihen oder Terme aufgefaßt, sondern als kreisfreie Termgraphen, also als Term-DAGs. Transformationsregeln konnten seit [Lib87] unter Verwendung von einstelligen Metavariablen erstellt werden, so daß insbesondere die β-Reduktion als Termgraphregel formulierbar war. Die Knotenmarkierung V_0 steht im folgenden Bild, das die β-Regel als Termgraph im Formalismus der vorliegenden Arbeit zeigt, für eine nullstellige Metavariable, V_1 für eine einstellige. Der gestrichelte Pfeil repräsentiert die Variablenbindungsfunktion B. Die Relation W verbindet die zur gleichen Variablen gehörigen Knoten, deren Markierungen daher keine Namen mehr zu sein brauchen (bisherige HOPS-Versionen verwenden für Metavariable allerdings noch Namen). Eine solche Variable mit mehreren Knoten nennen wir **parallele Variable**.

[2] teilweise von der DFG gefördert



Damit war insbesondere auch eine interaktiv zugängliche Implementierung der Graphreduktion geschaffen; dieser Aspekt wäre vergleichbar mit LAMBDALG [GO]. Doch dort steht als einzige CRS-Regel die β-Regel zur Verfügung, während in HOPS die Verwendung der einstelligen Metavariablen sogar noch allgemeiner möglich ist als in CRS; es war bereits 1987 ein Schritt in Richtung der Verallgemeinerung Wolframs [Wol] implementiert: in der linken Seite der Regel muß auf die Metavariable nicht unbedingt direkt eine gebundene Objektvariable folgen:



Der diesen Transformationsregeln zugrundeliegende Anwendungsmechanismus war — wie die Graphreduktion Wadsworths — nur operationell definiert; in Grenzbereichen tauchten Probleme auf, so daß ein Überdenken der Grundlagen dieses Mechanismus nötig wurde. Hieraus leitet sich die Motivation der vorliegenden Arbeit her; für die bearbeitete Problemstellung haben wir jedoch einige in HOPS vorhandene Einschränkungen, wie vor allem die auf höchstens einstellige Metavariable und die auf kreisfreie Graphen, fallengelassen.

1.2 Überblick

Dieser Bericht dient im wesentlichen dazu, die Dissertation [Kah96] durch Entlastung bezüglich der Beweise und allzutechnischer Hilfsdefinitionen im Umfang zu reduzieren und in der Lesbarkeit zu verbessern. Die relationenalgebraischen Grundlagen in Kapitel 2 sind daher hier viel ausführlicher dargestellt als in dem entsprechenden Abschnitt 1.3 von [Kah96]. Der Hauptteil dieses Berichtes, Kapitel 3 bis 8, entspricht den Kapiteln 2 bis 4 von [Kah96], die sich nur auf Motivation, sowie zentrale Definitionen und Ergebnisse beschränken.

Im einzelnen gehen wir folgendermaßen vor:

Als Einführung in die verwendete Notation widmen wir Kapitel 2 einer kurzen Darstellung der Relationenalgebra im wesentlichen im Stile von [SS89]. Wir stellen hier auch die relationale Behandlung der elementaren Datentypkonstruktionen Produkt, Summe und Sequenz vor und zeigen einige Eigenschaften, die wir im weiteren Verlauf benötigen werden.

In Kapitel 3 definieren wir eine neue Klasse von Termgraphen mit gebundenen Variablen, wobei das wichtigste Detail die Betrachtung von Variablenbindung und Variablenidentität als primitive Konzepte ist.

Dies ermöglicht uns, in Kapitel 4 zu einem angemessenen Identifizierungsbegriff zu gelangen und ohne zu große Mühen die Existenz der Maximalidentifizierung zu beweisen.

Um sinnvoll darüber sprechen zu können, was denn das *Bild* einer Metavariablen mit Nachfolgern sei, definieren wir in Kapitel 5 *Intervalle* und *Abschnitte*.

Als erste Annäherung an einen für unsere Termgraphen geeigneten Homomorphiebegriff führen wir in Kapitel 6 *Einbettungen* ein. Dabei beschränken wir uns zunächst einmal auf die Abbildung der Teile außerhalb der Metavariablen und beschäftigen uns hauptsächlich mit den der Nachfolgerfunktion nahestehenden Aspekten einer strukturerhaltenden Abbildung von Graphen mit Metavariablen mit Nachfolgern. Es zeigt sich, daß der Homomorphie-Begriff herkömmlicher Termgraphersetzungsansätze, wie z.B. [PPEM, Plu93] in dem der Einbettungen bereits enthalten ist.

Um auch die variablenorientierten Aspekte zu berücksichtigen und insbesondere um „Einfangen von Variablen" verhindern zu können führen wir in Kapitel 7 *Einpassungen* ein. Neben der Bindung selbst wird hierbei auch der (abgeleitete) Begriff der Kapselung wesentlich. Einpassungen entsprechen auf Graphen ohne parallele, d.h. mehrknotige, Schemavariable bereits voll unserem Homomorphiebegriff.

In Kapitel 8 definieren wir *Korrespondenzen* zwischen Intervallen. Diese werden uns dazu dienen, die nötigen Beziehungen zwischen den Bildern verschiedener Knoten einer parallelen Schemavariablen herzustellen. Für den Fall von Blattvariablen weisen wir in Abschnitt 8.4 nach, daß der hierdurch eingeführte neue Gleichwertigkeitsbegriff mit dem über Identifizierungen definierten kompatibel ist.

Die im Anschluß daran in Abschnitt 8.6 definierten *Homomorphismen* sind eine Spezialisierung der Einpassungen und nehmen sich auch der parallelen Variablen an. Der hierdurch gegebene Homomorphiebegriff entspricht unserem Graphenbegriff mit seiner gesamten Komplexität.

Kapitel 9 weist nach einer Zusammenfassung auf einige noch offene Probleme hin.

Schließlich führen wir im Anhang zwei zentrale Beweise zur algebraischen Termgraphersetzung durch, die in [Kah96, Kapitel 7] benötigt werden; siehe Seite 133 für eine Übersicht.

Nach dem Literaturverzeichnis stehen dem Leser ein Symbolverzeichnis und ein Index zur Verfügung; Definitionen, Lemmata usw. enthalten nach ihrer Überschrift oft noch Hinweise auf die Seiten von Verwendungsstellen in der Form „$[\leftarrow s_1, \ldots, s_n]$".

Kapitel 2

Relationenalgebra

In der formalen Darstellung bedient sich die vorliegende Arbeit wesentlich der Relationenalgebra nach [SS89]. Dieses Kapitel faßt die wichtigsten Grundlagen sowie einige nicht ganz so selbstverständliche Konstruktionen zusammen. Die meisten Definitionen sowie alle Aussagen ohne Beweis sind [SS89] entnommen.

Die wichtigsten Besonderheiten unserer Handhabung im Vergleich mit [SS89] sind die folgenden:

Vektoren in [SS89] sind normalerweise Spaltenvektoren, während wir uns, ebenso wie [Zie88, Zie91], der unserer Meinung nach intuitiv zugänglicheren, weil „von links in ein Relationenprodukt hineinfütterbaren“ Zeilenvektoren bedienen.

Ferner geben wir — zumal bei heterogenen Relationen — oft eine „Typisierung“ an und bedienen uns hierbei der Z-Schreibweise [Spi89], um bereits im Typ auf besondere Eigenschaften einer Relation hinzuweisen, wie z.B. bei eindeutigen Relationen (Funktionen, oder genauer partiellen Funktionen) oder totalen Funktionen. Dabei dient „$\mathbb{1}$“ der Denotation einer beliebigen, aber festen, einelementigen Menge.

Außerdem werden wir gelegentlich Quantoren und logische Verknüpfungen der Metaebene in Z-Notation schreiben; auch für Mengenkomprehension verwenden wir die dort übliche Form, die sich des Schemas $\{$ *Signatur* $|$ *Prädikat* $\bullet$ *Term* $\}$ bedient statt des sonst oft gebräuchlichen $\{$ *Term* $|$ *Prädikat* $\}$. So gilt zum Beispiel

$$\{n : \mathbb{N} \mid n < 4 \bullet n^2\} = \{0, 1, 4, 9\} \ .$$

Schließlich benötigen wir regelmäßig das Punkteaxiom (Definition 2.1.9), so daß wir im Bereich der *konkreten Relationenalgebren* bleiben und nicht auf Anwendungen des Punkteaxioms hinzuweisen brauchen.

Dennoch führen wir die Notationen von Standpunkt der *abstrakten Relationenalgebra* aus ein, da die damit verknüpfte komponentenfreie Argumentationsweise in der Regel kompaktere Formulierungen und Beweise zuläßt und auch bei Rückgriff auf Punkte ein homogenerer Stil gewahrt bleibt.

2.1 Elementare Relationenalgebra

Definition 2.1.1 Eine (heterogene oder partielle) **Relationenalgebra** ist eine selbstduale Kategorie, deren Morphismen als *Relationen* bezeichnet werden, in der zu zwei Relationen $R : A \leftrightarrow B$ und $S : B \leftrightarrow C$ ihre Komposition mit $RS : A \leftrightarrow C$ bezeichnet wird, zum Objekt A die Relation $\mathrm{I}_A : A \leftrightarrow A$ die Identität ist und in der zu zwei Objekten A und B das $A \leftrightarrow B$ notierte Homset eine vollständige, atomare boolesche Algebra $(A \leftrightarrow B, \sqcup, \sqcap, \overline{})$ bildet mit *Vereinigung* $\sqcup$, *Durchschnitt* $\sqcap$, *Negation* oder *Komplement* $\overline{}$, *Inklusion* $\subset$, *Nullelement* $\mathrm{O} = \mathrm{O}_{A,B}$ und *Universalelement* $\mathrm{L} = \mathrm{L}_{A,B}$, und in der die *Dedekind-Formel* $(QR \sqcap S) \subset (Q \sqcap SR^{\mathsf{T}})(R \sqcap Q^{\mathsf{T}}S)$ gilt, wann immer einer der drei geklammerten Ausdrücke definiert ist, und die *Tarski-Regel* $R \neq \mathrm{O} \ \Rightarrow\ \mathrm{L}R\mathrm{L} = \mathrm{L}$ gilt. Zu einer Relation $R : A \leftrightarrow B$ wird der duale Pfeil $R^{\mathsf{T}} : B \leftrightarrow A$ auch *transponierte* (oder *konverse*) *Relation* genannt. □

Für eine Menge $\mathcal{R} : \mathbb{P}(A \leftrightarrow B)$ von Relationen von A nach B schreiben wir $\bigsqcap \mathcal{R}$ für das Infimum und $\bigsqcup \mathcal{R}$ für das Supremum von $\mathcal{R}$ bezüglich der Inklusionsordnung.

Die *Modalregeln* folgen direkt aus der Dedekind-Formel:

$$QR \sqcap S \subset (Q \sqcap SR^{\mathsf{T}})R \qquad\qquad QR \sqcap S \subset Q(R \sqcap Q^{\mathsf{T}}S)$$

Äquivalent zur Dedekind-Formel gilt:

Satz 2.1.2 (Schrödersche Umformungen) $AB \subset C \;\Leftrightarrow\; A^{\mathsf{T}}\overline{C} \subset \overline{B} \;\Leftrightarrow\; \overline{C}B^{\mathsf{T}} \subset \overline{A}$ □

Mit Hilfe der Axiome können die wohlbekannten Regeln des Relationenkalküls hergeleitet werden. Im folgenden eine Auswahl:

Lemma 2.1.3 (Elementare Regeln)

$$\begin{array}{ll}
(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A & A \subset B \quad\Rightarrow\quad A^{\mathsf{T}} \subset B^{\mathsf{T}} \\
(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}} & \overline{A}^{\mathsf{T}} = \overline{A^{\mathsf{T}}} \\
A \subset B \quad\Rightarrow\quad CA \subset CB & A \subset B \quad\Rightarrow\quad AC \subset BC \\
A(B \sqcup C) = AB \sqcup AC & A(B \sqcap C) \subset AB \sqcap AC \\
(A \sqcap B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} \sqcap B^{\mathsf{T}} & (A \sqcup B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} \sqcup B^{\mathsf{T}}
\end{array}$$ □

Lemma 2.1.4 (Rechenregel beim Komplement) $R\overline{R^{\mathsf{T}}S} \subset \overline{S}$. □

Begriffe wie Eindeutigkeit lassen sich rein relationenalgebraisch fassen:

Definition 2.1.5 (Spezielle heterogene Relationen)
Für beliebiges $A : U \leftrightarrow V$ definieren wir folgende Begriffe:

A ist *eindeutig*	$:\Leftrightarrow$	$A^{\mathsf{T}}A \subset \mathrm{I}$	$\Leftrightarrow$	$A\overline{\mathrm{I}} \subset \overline{A}$		
A ist *total*	$:\Leftrightarrow$	$\mathrm{I} \subset AA^{\mathsf{T}}$	$\Leftrightarrow$	$A\mathrm{L} = \mathrm{L}$	$\Leftrightarrow$	$\overline{A} \subset A\overline{\mathrm{I}}$
A ist eine *totale Funktion*	$:\Leftrightarrow$	$A\overline{\mathrm{I}} = \overline{A}$	$\Leftrightarrow$	A ist total und eindeutig		
A ist *injektiv*	$:\Leftrightarrow$	$AA^{\mathsf{T}} \subset \mathrm{I}$	$\Leftrightarrow$	$\overline{\mathrm{I}}A \subset \overline{A}$	$\Leftrightarrow$	A^{T} ist eindeutig
A ist *surjektiv*	$:\Leftrightarrow$	$\mathrm{I} \subset A^{\mathsf{T}}A$	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{L}A = \mathrm{L}$	$\Leftrightarrow$	A^{T} ist total
A ist *bijektiv*	$:\Leftrightarrow$	$\overline{\mathrm{I}}A = \overline{A}$	$\Leftrightarrow$	A ist injektiv und surjektiv		

□

Eine eindeutige Relation heißt auch *(partielle) Funktion* (notiert $A : U \nrightarrow V$), und eine totale Funktion auch *Abbildung* (notiert $A : U \rightarrow V$). Ferner entlehnen wir noch die Z-Schreibweisen für injektive partielle ($A : U \twoheadrightarrow V$) und injektive totale Funktionen($A : U \rightarrowtail V$).

Die folgenden Eigenschaften werden in Beweisen ohne weiteres verwendet, höchstens mit dem Hinweis auf z.B. die Eindeutigkeit der betreffenden Relation.

Lemma 2.1.6 (Eigenschaften)

A eindeutig	$\Rightarrow$	$A\overline{B} \subset \overline{AB}$, $\quad A(B \sqcap C) = AB \sqcap AC$, $BA \sqcap C = (B \sqcap CA^{\mathsf{T}})A$
A total	$\Rightarrow$	$\overline{AB} \subset A\overline{B}$
A totale Funktion	$\Rightarrow$	$A\overline{B} = \overline{AB}$
A injektiv	$\Rightarrow$	$\overline{B}A \subset \overline{BA}$, $\quad (B \sqcap C)A = BA \sqcap CA$, $AB \sqcap C = A(B \sqcap A^{\mathsf{T}}C)$
A surjektiv	$\Rightarrow$	$\overline{BA} \subset \overline{B}A$

□

Mit der Dedekind-Formel erhält man leicht noch:

Lemma 2.1.7 [←170] Wenn eine surjektive Relation A in einer injektiven Relation B enthalten ist, dann sind A und B gleich. □

Die oben aufgeführte Formulierung der Surjektivität von A als $\mathrm{L}A = \mathrm{L}$ entspricht der Aussage, daß die Wertemenge von A den gesamten Zielbereich der Relation A umfaßt. Dieser Betrachtung von Relationen der Form $\mathrm{L}A$ als Mengen liegt folgendes Prinzip zugrunde:

Definition 2.1.8 Eine Relation r mit $r = \mathrm{L}r$ heißt *spaltenkonstant, Zeilenvektor* oder einfach **Vektor.**[1] Vektoren $r : A \leftrightarrow B$ können aufgefaßt werden als Beschreibung von Teilmengen von B. Ein totaler Vektor beschreibt eine nichtleere Teilmenge. Ein totaler und eindeutiger Vektor $r : A \rightarrow B$ entspricht einem Element von B und heißt **Punkt**. □

Damit ist jede Relation $r : \mathbb{1} \leftrightarrow A$ ein Vektor und jede Abbildung $r : \mathbb{1} \rightarrow A$ ein Punkt — Fakten, auf die wir später häufig zurückgreifen werden; ja wir werden meist sogar nur von $\mathbb{1}$ ausgehende Vektoren und Punkte betrachten.

Definition 2.1.9 [←9] Das **Punkteaxiom** ist die Aussage:

„Für jede Relation $R \neq \mathrm{O}$ gibt es zwei Punkte x und y, so daß $x^{\mathsf{T}}y \subset R$.“ □

Eine Relation wie hier $x^{\mathsf{T}}y$, für die jede echt enthaltene Relation die Nullrelation O ist, heißt *Atom.*

Eine Relationenalgebra, in der das Punkteaxiom gilt, ist äquivalent zu einer *konkreten Relationenalgebra*, in der die Objekte Mengen sind und die Pfeile konkrete Relationen, so daß $A \leftrightarrow B = \mathbb{P}(A \times B)$ gilt. Die vorliegende Arbeit bewegt sich ausschließlich innerhalb von konkreten Relationenalgebren. Allerdings greifen wir selten direkt auf diese Mengenstrukturen zu; in der Regel genügt das Punkteaxiom aus, den nötigen konkreten Zugriff zu erreichen. Einmal allerdings wird es nötig sein, die Wertemenge einer Relation als Menge zur Verfügung zu haben, und wir setzen für Relationen $R : A \leftrightarrow B$ die Z-Notation $\mathrm{ran}(R) = \{a : A, b : B \mid (a, b) \in R \bullet b\}$ ein. Dies und die folgende Definition werden die einzigen Stellen bleiben, an denen wir Rückgriff auf die Struktur konkreter Relationen als Teilmengen des kartesischen Produktes nehmen:

Definition 2.1.10 [←27] Die **natürliche Injektion** von einer Menge B in eine Obermenge $A \supseteq B$ ist die injektive Abbildung $\iota : B \rightarrowtail A$ mit $\iota = \{b : B \bullet (b, b)\}$. □

Lemma 2.1.11 (Rechenregel für Vektoren)
Seien $v : \mathbb{1} \leftrightarrow A$ und $w : \mathbb{1} \leftrightarrow B$ Vektoren. Dann gilt:

$$v^{\mathsf{T}}w = v^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \mathrm{L}w \ .$$

Für allgemeine Vektoren $v : C \leftrightarrow A$ und $w : D \leftrightarrow B$, also mit $\mathrm{L}v = v$ und $\mathrm{L}w = w$, gilt dann entsprechend

$$v^{\mathsf{T}}\mathrm{L}_{C,D}w = v^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \mathrm{L}w \ .$$ □

Die beiden folgenden Rechenregeln im Zusammenhang mit Vektoren sind elementar und in der praktischen Arbeit unentbehrlich, so daß wir auf ihren Einsatz nicht hinzuweisen brauchen:

Lemma 2.1.12 (Domain- und Range-Einschränkungen) [←40]
Für beliebige Relationen $Q : A \leftrightarrow B$, $R : B \leftrightarrow C$, $S : D \leftrightarrow C$ und $U : A \leftrightarrow E$ gilt:

$$QR \sqcap \mathrm{L}S = Q(R \sqcap \mathrm{L}S) \qquad \text{und} \qquad QR \sqcap U\mathrm{L} = (Q \sqcap U\mathrm{L})R \ ,$$

was unter Annotierung der Universalrelationen genauer folgendermaßen lautet:

$$QR \sqcap \mathrm{L}_{A,D}S = Q(R \sqcap \mathrm{L}_{B,D}S) \qquad \text{und} \qquad QR \sqcap U\mathrm{L}_{E,C} = (Q \sqcap U\mathrm{L}_{E,B})R \ .$$ □

Einschränkung einer Komposition zweier Relationen durch einen Vektor entspricht damit der Komposition, in der nur die zweite Relation durch diesen Vektor eingeschränkt ist, wobei dieser ggf. durch Multiplikation mit einer passenden Universalrelation typmäßig angepaßt werden muß.

[1] In [SS89] sind Vektoren zeilenkonstant!

Wenn das Produkt AA existiert, also $A : U \leftrightarrow U$ für ein geeignetes U, dann heißt A *homogen*.

Definition 2.1.13 (Spezielle homogene Relationen)

A ist *reflexiv*	$:\Leftrightarrow$	$\mathrm{I} \subset A$
A ist *transitiv*	$:\Leftrightarrow$	$AA \subset A$
A ist *symmetrisch*	$:\Leftrightarrow$	$A \subset A^{\mathsf{T}}$
A ist *antisymmetrisch*	$:\Leftrightarrow$	$A \sqcap A^{\mathsf{T}} \subset \mathrm{I}$
A ist eine *Quasiordnung*	$:\Leftrightarrow$	A ist reflexiv und transitiv
A ist eine *Äquivalenzrelation*	$:\Leftrightarrow$	A ist eine symmetrische Quasiordnung
A ist eine *Ordnung*	$:\Leftrightarrow$	A ist eine antisymmetrische Quasiordnung □

2.2 Einfachere Eigenschaften

Alle in diesem Abschnitt aufgeführten Eigenschaften werden ggf. auch in ihrer dualen Form, also mit transponierten Relationen, angewendet, ohne daß wir darauf eigens hinweisen werden.

Lemma 2.2.1 [←33] Es gilt:

i) $A\mathrm{L} \subset \overline{B} \Rightarrow A \subset \overline{B\mathrm{L}}$

ii) $A\mathrm{L} \sqcap B \subset C \Rightarrow A \subset \overline{(B \sqcap \overline{C})\mathrm{L}}$

iii) $\overline{(A \sqcap \overline{B})\mathrm{L}} \sqcap A \subset B$

Beweis:

i) Mit Schröder gilt: $A\mathrm{L} \subset \overline{B} \Rightarrow B\mathrm{L} \subset \overline{A} \Rightarrow A \subset \overline{B\mathrm{L}}$

ii)
$$\begin{aligned} A\mathrm{L} \sqcap B \subset C \quad &\Rightarrow \quad A\mathrm{L} = (A\mathrm{L} \sqcap B) \sqcup (A\mathrm{L} \sqcap \overline{B}) \subset C \sqcup \overline{B} = \overline{B \sqcap \overline{C}} \\ &\Rightarrow \quad A \subset \overline{(B \sqcap \overline{C})\mathrm{L}} \qquad \text{gemäß (i)} \end{aligned}$$

iii) $A \sqcap \overline{B} \subset (A \sqcap \overline{B})\mathrm{L} \Rightarrow \overline{(A \sqcap \overline{B})\mathrm{L}} \subset \overline{A} \sqcup B \Rightarrow \overline{(A \sqcap \overline{B})\mathrm{L}} \sqcap A \subset B$ □

Lemma 2.2.2 (Lokale Surjektivität) [←14, 32, 51, 82, 127] Für beliebige (typmäßig passende) Relationen A, V und F gilt: $AF \sqcap \overline{VF} \subset AF \sqcap \overline{V}F$. Falls F eindeutig und wenn nicht total, so wenigstens $V \subset VFF^{\mathsf{T}}$ erfüllt, gilt sogar: $AF \sqcap \overline{VF} \subset (A \sqcap \overline{V})F$, was ohnehin gilt, wenn F injektiv und surjektiv ist.

Beweis:
$$\begin{aligned} (AF \sqcap \overline{VF}) \sqcap \overline{AF \sqcap \overline{V}F} &= AF \sqcap \overline{VF} \sqcap (\overline{AF} \sqcup \overline{\overline{V}F}) \\ &= (AF \sqcap \overline{VF} \sqcap \overline{AF}) \sqcup (AF \sqcap \overline{VF} \sqcap \overline{\overline{V}F}) \\ &= \mathrm{O} \sqcup (AF \sqcap \overline{VF \sqcup \overline{V}F}) \;=\; AF \sqcap \overline{(V \sqcup \overline{V})F} \\ &= AF \sqcap \overline{\mathrm{L}F} \;=\; \mathrm{O} \;; \end{aligned}$$
aus Eindeutigkeit und Totalität von F erhalten wir noch:
$$AF \sqcap \overline{VF} \subset (\overline{VF}F^{\mathsf{T}} \sqcap A)F \subset (\overline{VFF^{\mathsf{T}}} \sqcap A)F \subset (A \sqcap \overline{V})F \;.$$ □

Lemma 2.2.3 [←33] Falls F eindeutig ist, gilt $F^{\mathsf{T}}(GG^{\mathsf{T}} \sqcap FF^{\mathsf{T}}) = F^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}G^{\mathsf{T}}$.

Beweis: $F^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}G^{\mathsf{T}} = F^{\mathsf{T}}(\mathrm{I} \sqcap \mathrm{L}G^{\mathsf{T}}) = F^{\mathsf{T}} \sqcap F^{\mathsf{T}}(\mathrm{I} \sqcap \mathrm{L}G^{\mathsf{T}}) \subset F^{\mathsf{T}}GG^{\mathsf{T}} \sqcap F^{\mathsf{T}} = F^{\mathsf{T}}(GG^{\mathsf{T}} \sqcap FF^{\mathsf{T}}) \subset F^{\mathsf{T}}GG^{\mathsf{T}} \sqcap F^{\mathsf{T}}FF^{\mathsf{T}} \subset \mathrm{L}G^{\mathsf{T}} \sqcap F^{\mathsf{T}}$. □

Lemma 2.2.4 (Teilfunktionen) [←62]
Sei A eindeutig und sei $B \sqcap A\mathrm{L} = A$. Dann gilt für beliebige C und D:

$$AC \sqcap BD = A(C \sqcap D)$$

Beweis: $AC \sqcap BD = AC \sqcap BD \sqcap A\mathrm{L} = AC \sqcap (B \sqcap A\mathrm{L})D = AC \sqcap AD = A(C \sqcap D)$ □

Lemma 2.2.5 [←26, 105] Aus $A \sqcap B = A \sqcap C$ folgt auch $A \sqcap \overline{B} = A \sqcap \overline{C}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} A \sqcap \overline{B} &= (A \sqcap \overline{A}) \sqcup (A \sqcap \overline{B}) \;=\; A \sqcap (\overline{A} \sqcup \overline{B}) \\ &= A \sqcap \overline{A \sqcap B} \;=\; A \sqcap \overline{A \sqcap C} \\ &= A \sqcap (\overline{A} \sqcup \overline{C}) \;=\; (A \sqcap \overline{A}) \sqcup (A \sqcap \overline{C}) \;=\; A \sqcap \overline{C} \end{aligned}$$ □

Lemma 2.2.6 (Transitive Hülle und Multiplikation) [←15, 36, 41, 45, 51, 67, 88] Für beliebige Relationen $Q : A \leftrightarrow A$, $R : A \leftrightarrow B$ and $S : B \leftrightarrow B$ gilt:

$$\begin{aligned} QR \subset RS \;&\Rightarrow\; Q^*R \subset RS^*, \qquad Q^+R \subset RS^+ \\ QR = RS \;&\Rightarrow\; Q^*R = RS^*, \qquad Q^+R = RS^+ \end{aligned}$$ □

Definition 2.2.7 (Domainauffüllung) Seien $Q, R : A \leftrightarrow B$ zwei beliebige Relationen. Dann definieren wir die *Domainauffüllung von Q durch R* als

$$(Q \mid\!\!+ R) := Q \sqcup (R \sqcap \overline{Q\mathrm{L}})$$ □

2.3 Terminierung

Jede homogene Relation kann als Assoziierte eines (einfachen) gerichteten Graphen aufgefaßt werden, also als die Relation, die einen Knoten x genau dann in Beziehung mit einem anderen Knoten y setzt, wenn es eine Kante von x nach y gibt. Hier stellt sich dann unter anderem die Frage nach unendlichen Pfaden, die in Ablaufgraphen nichtterminierenden Abläufen entsprechen. Für eine ausführliche Darstellung siehe [SS89, Abschnitt 6.3].

Der erste Begriff, den wir vorstellen, entspricht der Frage nach der Existenz beliebig langer Pfade:

Definition 2.3.1 Eine homogene Relation B heißt **progressiv-beschränkt**, wenn $\bigsqcup\{k : \mathbb{N} \bullet \overline{B^k\mathrm{L}}\} = \mathrm{L}$. □

B ist also progressiv-beschränkt genau dann, wenn für jeden Knoten die Länge der von ihm ausgehenden B-Pfade nach oben beschränkt ist, da es dann für jeden Knoten eine natürliche Zahl k gibt, so daß von diesem Knoten kein Pfad der Länge k ausgeht. In einer nicht progressiv-beschränkten Relation braucht es aber noch keine unendlichen Pfade zu geben.

Um unterscheiden zu können, ob es unendliche Pfade in einem Graphen gibt, benötigen wir noch folgende Begriffe:

Definition 2.3.2 [←68] Der **Initialteil** $J(B) : \mathbb{1} \leftrightarrow V$ einer homogenen Relation $B : V \leftrightarrow V$ ist definiert durch:

$$J(B) := \bigsqcap\{x : \mathbb{1} \leftrightarrow V \bullet \overline{x} = \overline{x}B^{\mathsf{T}}\} = \bigsqcap\{x : \mathbb{1} \leftrightarrow V \bullet \overline{x} \subset \overline{x}B^{\mathsf{T}}\}$$ □

Damit ist der Initialteil die Menge der Punkte, von denen keine unendlichen „Pfade“ (gemäß B) ausgehen.

Definition 2.3.3 [←36] Eine Relation B heißt **progressiv-endlich**, wenn $J(B) = \mathrm{L}$. B heißt **regressiv-endlich**, wenn B^{T} progressiv-endlich ist. □

B ist also progressiv-endlich genau dann, wenn es keine unendlichen „Pfade“ in B gibt. Von [SS89, Seite 122] übernehmen wir noch folgende alternative Charakterisierung der progressiven Endlichkeit:

Lemma 2.3.4 [←14, 37, 42, 108, 118] Eine Relation $B : V \leftrightarrow V$ ist progressiv-endlich, genau wenn für jeden Vektor $v : \mathbb{1} \leftrightarrow V$ gilt:

$$v \subset vB^{\mathsf{T}} \quad \Rightarrow \quad v = \mathrm{O}$$ □

Lemma 2.3.5 [←37, 108] Wenn B progressiv-endlich ist, dann auch jede Teilrelation von B^+.

Beweis: Wir zeigen folgende zwei Aussagen:

i) B ist progressiv-endlich genau dann, wenn B^+ progressiv-endlich ist.

ii) Wenn B progressiv-endlich ist, dann auch jede Teilrelation $C \subset B$.

Die Beweise:

i) „$\Rightarrow$“: Sei B progressiv-endlich. Für jeden Vektor v mit $v \subset v(B^{\mathsf{T}})^+$ gilt:

$$v(B^{\mathsf{T}})^* = v \sqcup v(B^{\mathsf{T}})^+ = v(B^{\mathsf{T}})^+ = v(B^{\mathsf{T}})^* B^{\mathsf{T}}$$

Daraus folgt mit Lemma 2.3.4 $v(B^{\mathsf{T}})^* = 0$ und damit auch $v = 0$, womit wieder mit Lemma 2.3.4 B^+ als progressiv-endlich erwiesen ist.

„$\Leftarrow$“: Sei B^+ progressiv-endlich. Für jeden Vektor v mit $v \subset vB^{\mathsf{T}}$ gilt $vB^{\mathsf{T}} \subset vB^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}$, $vB^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}} \subset vB^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}$, usw., und mit der Transitivität der Inklusion auch $v \subset v(B^{\mathsf{T}})^+$. Daraus folgt mit Lemma 2.3.4 $v = 0$, woraus wieder mit Lemma 2.3.4 B als progressiv-endlich erwiesen ist.

ii) Sei B progressiv-endlich. Für jeden Vektor v mit $v \subset vC^{\mathsf{T}}$ gilt mit $C \subset B$ auch $v \subset vB^{\mathsf{T}}$. Daraus folgt mit Lemma 2.3.4 $v = 0$, woraus wieder mit Lemma 2.3.4 C als progressiv-endlich erwiesen ist.

Aus diesen beiden Aussagen folgt direkt die Behauptung. □

Wir betrachten nun Gleichungen und Inklusionen der Art $X = A \sqcup BX$ bzw. $X \subset A \sqcup BX$.

Aus $X \subset A \sqcup BX$ folgt zunächst $X \sqcap \overline{B\mathrm{L}} \subset A$. Per Induktion läßt sich nun zeigen, daß, falls B eindeutig ist oder injektiv und surjektiv ist, allgemein

$$X \sqcap \overline{B^j\mathrm{L}} \subset (\bigsqcup\{k : \mathbb{N} \mid 0 \le k < j \bullet B^k\})A$$

gilt: Trivialerweise haben wir $X \sqcap \overline{B^0\mathrm{L}} = \mathrm{O} = (\bigsqcup\{k : \mathbb{N} \mid 0 \le k < 0 \bullet B^k\})A$, und wir folgern (für $j \in \mathbb{N}$):

$$\begin{array}{rcll} X \sqcap \overline{B^{j+1}\mathrm{L}} & \subset & A \sqcup (BX \sqcap \overline{B^{j+1}\mathrm{L}}) & \\ & \subset & A \sqcup B(X \sqcap \overline{B^j\mathrm{L}}) & j > 0,\ B \subset BB^{\mathsf{T}}B, \text{ Lemma 2.2.2} \\ & \subset & A \sqcup B(\bigsqcup\{k : \mathbb{N} \mid 0 \le k < j \bullet B^k\})A & \text{Induktionshypothese} \\ & = & (\bigsqcup\{k : \mathbb{N} \mid 0 \le k < j+1 \bullet B^k\})A & \end{array}$$

Da für progressiv-beschränktes B gilt: $\bigsqcup\{k : \mathbb{N} \bullet \overline{B^k\mathrm{L}}\} = \mathrm{L}$, erhalten wir:

Lemma 2.3.6 [←19] Wenn die progressiv-beschränkte Relation B eindeutig ist oder injektiv und surjektiv ist, und $X \subset A \sqcup BX$ gilt, dann gilt auch $X \subset B^*A$. □

Für die umgekehrte Inklusion $X \supset A \sqcup BX$ folgt zunächst direkt $X \supset A$, und weiter allgemein $X \supset (\bigsqcup\{k : \mathbb{N} \mid 0 \leq k < j \bullet B^k\})A$ für jedes $j \in \mathbb{N}$, was wir wieder durch Induktion beweisen:

$$\begin{aligned} X &\supset A \sqcup BX \\ &\supset A \sqcup B(\bigsqcup\{k : \mathbb{N} \mid 0 \leq k < j \bullet B^k\})A \qquad \text{Induktionshypothese} \\ &= (\bigsqcup\{k : \mathbb{N} \mid 0 \leq k < j+1 \bullet B^k\})A \end{aligned}$$

Allgemein gilt also:

Lemma 2.3.7 [←19] Wenn $X \supset A \sqcup BX$ gilt, dann gilt auch $X \supset B^*A$. □

Zusammengefaßt erhalten wir

Lemma 2.3.8 [←19] Wenn die progressiv-beschränkte Relation B eindeutig ist oder injektiv und surjektiv ist, und $X = A \sqcup BX$ gilt, dann gilt auch $X = B^*A$. □

2.4 Verband der Äquivalenzrelationen

Definition 2.4.1 (Äquivalenzhülle) [←115]
Gegeben sei eine homogene Relation F. Dann ist die *Äquivalenzhülle von F* definiert als:

$$\mathcal{R}_F = (F \sqcup F^{\mathrm{T}})^*$$ □

Definition 2.4.2 [←41] Das **Infimum** und das **Supremum** zweier Äquivalenzrelationen $R_1, R_2 : \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{A}$ werden folgendermaßen notiert:

$$R_1 \wedge R_2 \ (= \ R_1 \sqcap R_2\ ) \qquad \text{und} \qquad R_1 \vee R_2 \ (= \ (R_1 \sqcup R_2)^*\ )\ .$$

Das Infimum einer Menge $\mathcal{R}$ von Äquivalenzrelationen wird $\bigwedge\mathcal{R}$ notiert und es gilt $\bigwedge\mathcal{R} = \bigsqcap\mathcal{R}$. Das Supremum einer Menge $\mathcal{R}$ von Äquivalenzrelationen wird $\bigvee\mathcal{R}$ notiert und falls $\mathcal{R}$ nichtleer ist, gilt $\bigvee\mathcal{R} = (\bigsqcup\mathcal{R})^*$; das Supremum der leeren Menge von Äquivalenzrelationen ist die Identität I. □

Wir zeigen nun einige Eigenschaften dieser Operationen.

Lemma 2.4.3 (Vertauschbarkeit des Supremums mit Relationen) [←41]
Sei $\mathcal{R}$ eine Menge von Äquivalenzrelationen auf $\mathcal{A}$ und sei ferner $E : \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{A}$ eine beliebige Relation; wenn für alle $R \in \mathcal{R}$ gilt $RE \subset ER$ bzw. $RE = ER$, dann gilt auch $(\bigvee\mathcal{R})E \subset E(\bigvee\mathcal{R})$ bzw. $(\bigvee\mathcal{R})E = E(\bigvee\mathcal{R})$.

Beweis: Für leeres $\mathcal{R}$ gilt die Behauptung wegen $\mathrm{I}E = E\mathrm{I}$. Für nichtleeres $\mathcal{R}$ zeigen wir die Behauptung zunächst für den allgemeineren Fall „$\subset$“: Wegen

$$(\bigsqcup\mathcal{R})E = \bigsqcup\{R : \mathcal{R} \bullet RE\} \subset \bigsqcup\{R : \mathcal{R} \bullet ER\} = E(\bigsqcup\mathcal{R})$$

gilt mit Lemma 2.2.6:

$$(\bigvee\mathcal{R})E = (\bigsqcup\mathcal{R})^*E \subset E(\bigsqcup\mathcal{R})^* = E(\bigvee\mathcal{R})$$

Im Falle „=“ genügt es, auch den Beweis an allen entsprechenden Stellen zu verschärfen. □

Lemma 2.4.4 (Vertauschbarkeit des Infimums mit Funktionen) [←41]
Sei $\mathcal{R}$ eine nichtleere Menge von Äquivalenzrelationen auf $\mathcal{A}$ und sei ferner $E : \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{A}$ eine Funktion, d.h. eine eindeutige Relation, also $E^{\mathrm{T}}E \subset \mathrm{I}$; wenn für alle $R \in \mathcal{R}$ gilt $RE \subset ER$, dann gilt auch $(\bigwedge\mathcal{R})E \subset E(\bigwedge\mathcal{R})$.

Beweis: Mit der Eindeutigkeit von E gilt:

$$(\bigwedge\mathcal{R})E = (\bigsqcap\mathcal{R})E \subset \bigsqcap\{R : \mathcal{R} \bullet RE\} \subset \bigsqcap\{R : \mathcal{R} \bullet ER\} \;=\; E(\bigsqcap\mathcal{R}) \;=\; E(\bigwedge\mathcal{R}) \qquad \square$$

Lemma 2.4.5 (Vektorschnitte) [↤41] Sei $\mathcal{R}$ eine Menge von Äquivalenzrelationen auf $\mathcal{A}$; sei $v : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{A}$ ein Vektor und $A : \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{A}$ eine transitive und wenigstens auf v eingeschränkt reflexive Relation, d.h. $AA \subset A$ und $v^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \mathrm{I} \subset A$ (also z.B. eine Äquivalenzrelation). Wenn für alle $R \in \mathcal{R}$ gilt $\mathrm{L}\,v \sqcap R \subset v^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap A$, dann gilt auch $\mathrm{L}\,v \sqcap (\bigvee\mathcal{R}) \subset v^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap A$ und, falls $\mathcal{R}$ nichtleer ist, auch $\mathrm{L}\,v \sqcap (\bigwedge\mathcal{R}) \subset v^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap A$.

Beweis: Für das Infimum:

$$\mathrm{L}\,v \sqcap (\bigwedge\mathcal{R}) = \mathrm{L}\,v \sqcap (\bigsqcap\mathcal{R}) = \bigsqcap\{R : \mathcal{R} \bullet \mathrm{L}\,v \sqcap R\} \subset \bigsqcap\{R : \mathcal{R} \bullet v^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap A\} = v^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap A$$

Für das Supremum folgt die Behauptung für leeres $\mathcal{R}$ aus $\mathrm{L}\,v \sqcap \mathrm{I} = v^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \mathrm{I} \subset v^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap A$. Für nichtleeres $\mathcal{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}\,v \sqcap (\bigvee\mathcal{R}) &= \mathrm{L}\,v \sqcap (\bigsqcup\mathcal{R})^* \;=\; \mathrm{L}\,v \sqcap \bigsqcup\{j : \mathbb{N} \bullet (\bigsqcup\mathcal{R})^j\}\\
&= \bigsqcup\{j : \mathbb{N} \bullet (\mathrm{L}\,v \sqcap (\bigsqcup\mathcal{R})^j)\} \;\subset\; \bigsqcup\{j : \mathbb{N} \bullet v^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap A\} = v^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap A \;,
\end{aligned}$$

da für alle $j \geq 0$ gilt: $\mathrm{L}\,v \sqcap (\bigsqcup\mathcal{R})^j \subset v^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap A$, wie durch Induktion gezeigt werden kann. Als Startfälle zeigen wir dies für $j = 0$: $\mathrm{L}\,v \sqcap \mathrm{I} = v^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \mathrm{I} \subset v^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap A$ und $j = 1$: $\mathrm{L}\,v \sqcap (\bigsqcup\mathcal{R}) = \bigsqcup\{R : \mathcal{R} \bullet \mathrm{L}\,v \sqcap R\} \subset \bigsqcup\{R : \mathcal{R} \bullet v^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap A\} = v^{\mathsf{T}}\mathrm{L}\sqcap A$. Für den Induktionsschritt sei $j = a+b$ mit $a, b \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}\,v \sqcap (\bigsqcup\mathcal{R})^j &= \mathrm{L}\,v \sqcap (\bigsqcup\mathcal{R})^a(\bigsqcup\mathcal{R})^b \;=\; (\bigsqcup\mathcal{R})^a(\mathrm{L}\,v \sqcap (\bigsqcup\mathcal{R})^b)\\
&\subset (\bigsqcup\mathcal{R})^a(v^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap A) \;=\; ((\bigsqcup\mathcal{R})^a \sqcap \mathrm{L}\,v)A\\
&\subset (v^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap A)A \;\subset\; v^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap A \qquad \square
\end{aligned}$$

2.5 Relationale Spezifikation von Produkten und Summen

Direkte Produkte (der Teilkategorie totaler Funktionen) lassen sich relationenalgebraisch elegant charakterisieren:

Definition 2.5.1 (Direktes Produkt)
Sind zwei Relationen $\pi : P \to A$ und $\rho : P \to B$ gegeben, so nennen wir das Tripel (P, π, ρ) *direktes Produkt* zu A und B, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned}
\pi^{\mathsf{T}}\pi &= \mathrm{I}_A & \qquad \rho^{\mathsf{T}}\rho &= \mathrm{I}_B\\
\pi\pi^{\mathsf{T}} \sqcap \rho\rho^{\mathsf{T}} &= \mathrm{I}_P & \qquad \pi^{\mathsf{T}}\rho &= \mathrm{L}_{A,B}
\end{aligned}$$

Die surjektiven Abbildungen π und ρ heißen die *natürlichen Projektionen* dieses Produktes.□

Da unseren Typen üblicherweise Mengen zugrundeliegen und wir ohnehin auf konkret darstellbare Relationen angewiesen sind, verwenden wir normalerweise Produkte der Form $(A \times B, \pi_{A\times B}, \rho_{A\times B})$ und nennen dies dann einfach $A \times B$. Wenn wir z.B. $\pi_{A\times B}$ ohne weitere Erläuterung verwenden, dann ist Zugehörigkeit zu einem solchen Produkt impliziert.

Lemma 2.5.2 (Produktübergang) [↤17] Es sei $(\mathcal{P}, \pi, \rho)$ ein direktes Produkt, und seien R_1, R_2, S_1 und S_2 beliebige Relationen. Dann gilt unter Annahme des Punkteaxioms (oder sonst, wenn R_1 und R_2 eindeutig sind bzw. S_1 und S_2 injektiv sind):

$$(R_1\pi^{\mathsf{T}} \sqcap R_2\rho^{\mathsf{T}})(\pi S_1 \sqcap \rho S_2) = R_1 S_1 \sqcap R_2 S_2 \qquad \square$$

Im allgemeinen gilt nur die Inklusion „$\subset$“. Die Teilterme der linken Seite sind von einer Form, die häufig vorkommt.

Für totale Funktionen F und G entspricht $F\pi^{\mathsf{T}} \sqcap G\rho^{\mathsf{T}}$ der *Funktionspaarung*, dem universellen Pfeil aus der kategorientheoretischen Produktkonstruktion. In der Relationenalgebra ist hierfür auch der Name „*Fork*“ [BHSV93] oder „*Tupeling*“ geläufig und man schreibt „$F \nabla G$“. Da wir die Transponierte eines solchen Ausdruckes nahezu ebenso häufig benötigen und sich $F \triangle G := (F^{\mathsf{T}} \nabla G^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$ nicht anzubieten scheint, orientieren wir uns in unserer Notation lieber nach der Schreibrichtung von links nach rechts statt von unten nach oben wie „∇“:

Definition 2.5.3 (Relationenpaarungen) Für Relationen $Q : A \leftrightarrow C$, $R : B \leftrightarrow C$ und $S : A \leftrightarrow D$ definieren wir $\langle\!\langle Q, S \rangle\!\rangle_{C \times D} : A \leftrightarrow C \times D$ und ${}_{A \times B}\langle\!\langle Q, R \rangle\!\rangle : A \times B \leftrightarrow C$ durch $\langle\!\langle Q, S \rangle\!\rangle_{C \times D} := Q\pi^{\mathsf{T}}_{C \times D} \sqcap S\rho^{\mathsf{T}}_{C \times D}$ und ${}_{A \times B}\langle\!\langle Q, R \rangle\!\rangle := \pi_{A \times B}\, Q \sqcap \rho_{A \times B}\, R$. □

Definition 2.5.4 Die **parallele Komposition** $(Q \underset{\mathcal{P}\ \mathcal{Q}}{\|} R) : \mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ zweier Relationen $R : A \leftrightarrow B$ und $S : C \leftrightarrow D$ ist in Anwesenheit eines direkten Produktes $(\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}, \rho_{\mathcal{P}})$ zu A und C und eines zweiten $(\mathcal{Q}, \pi_{\mathcal{Q}}, \rho_{\mathcal{Q}})$ zu B und D definiert durch:

$$(R \underset{\mathcal{P}\ \mathcal{Q}}{\|} S) := \pi_{\mathcal{P}} R \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{Q}} \sqcap \rho_{\mathcal{P}} S \rho^{\mathsf{T}}_{\mathcal{Q}}$$

Wenn $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$, dann schreiben wir auch $(R \underset{\mathcal{P}}{\|} S)$; wenn $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ aus dem Kontext erschlossen werden können, schreiben wir meist einfach $(R \| S)$. □

Direkt aus Lemma 2.5.2 folgt das sogenannte „Fork-Axiom“:

Lemma 2.5.5 (Produkt paralleler Kompositionen) Es seien $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ und $\mathcal{R}$ direkte Produkte, und es seien R_1, R_2, S_1 und S_2 beliebige Relationen. Dann gilt unter Annahme des Punkteaxioms (oder sonst, wenn R_1 und R_2 eindeutig sind bzw. S_1 und S_2 injektiv sind):

$$(R_1 \underset{\mathcal{P}\ \mathcal{Q}}{\|} R_2)(S_1 \underset{\mathcal{Q}\ \mathcal{R}}{\|} S_2) = (R_1 S_1 \underset{\mathcal{P}\ \mathcal{R}}{\|} R_2 S_2)$$ □

Korollar 2.5.6 (Eindeutigkeit paralleler Kompositionen) Wenn A und B beide eindeutig sind, dann ist auch $(A \| B)$ eindeutig. □

Für eine abkürzende Notation nutzen wir in speziellen Fällen die Subskriptposition als „dritten Anschluß“ einer Relation neben der linken und der rechten Seite:

Definition 2.5.7 (Dreistellige Relationen) [←18, 23, 26, 29] Seien $X : (A \times B) \leftrightarrow C$ und $Y : D \leftrightarrow B$ zwei Relationen. Wenn wir X als *ternäre Relation* betrachten, dann bedeutet dies, daß wir folgende Notation verwenden: $X_Y : A \leftrightarrow C$ mit

$$X_Y := \langle\!\langle I, \mathrm{L}\, Y \rangle\!\rangle X \ .$$ □

Gelegentlich benötigen wir noch die natürlichen Isomorphismen zwischen geschachtelten Produkten: $\underline{PAass} : (A \times (B \times C)) \rightarrowtail ((A \times B) \times C)$ mit

$$\underline{PAass} \quad = \quad \langle\!\langle (\mathrm{I}_A \| \pi_{B \times C}), \rho_{A \times (B \times C)} \rho_{B \times C} \rangle\!\rangle$$

und die Inverse $\underline{assPA} = \underline{PAass}^{\mathsf{T}}$.

Um für Teilmengen des direkten Produktes nicht immer mit natürlichen Injektionen arbeiten zu müssen, definieren wir direkt:

Definition 2.5.8 (Partielles direktes Produkt) [←144, 159] Sind Relationen $\pi_P : P \to A$, $\rho_P : P \to B$ und $X : A \leftrightarrow B$ gegeben, so nennen wir das Quadrupel

$$(\ P : \mathbb{P}(A \times B) \ , \ \pi_P \ , \ \rho_P \ , \ X \ )$$

partielles direktes Produkt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{array}{rclcrcl} \pi_P^{\mathsf{T}}\pi_P & \subset & \mathrm{I}_A & \qquad & \rho_P^{\mathsf{T}}\rho_P & \subset & \mathrm{I}_B \\ \pi_P\pi_P^{\mathsf{T}} \sqcap \rho_P\rho_P^{\mathsf{T}} & = & \mathrm{I}_P & & \pi_P^{\mathsf{T}}\rho_P & = & X \end{array}$$

□

Schließlich stellen wir noch die relationenalgebraische Charakterisierung der direkten Summe vor, die dual zu der des direkten Produktes ist:

Definition 2.5.9 (Direkte Summe)
Sind zwei Relationen $\iota : A \to S$ und $\kappa : B \to S$ gegeben, so nennen wir das Tripel (S, ι, κ) *direkte Summe* zu A und B, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{array}{rclcrcl} \iota\iota^{\mathsf{T}} & = & \mathrm{I}_A & \qquad & \kappa\kappa^{\mathsf{T}} & = & \mathrm{I}_B \\ \iota^{\mathsf{T}}\iota \sqcup \kappa^{\mathsf{T}}\kappa & = & \mathrm{I}_S & & \iota\kappa^{\mathsf{T}} & = & \mathrm{O}_{A,B} \end{array}$$

Die injektiven Abbildungen ι und κ heißen die *natürlichen Injektionen* dieser Summe. □

2.6 Sequenzen

Zur (generischen) Behandlung von Sequenzen stellen wir folgende Relationen zur Verfügung (zu einer Menge $\mathring{A}$ bezeichnen wir wie üblich die Menge der endlichen Sequenzen mit Elementen aus $\mathring{A}$ mit $\mathring{A}^*$):

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl@{\qquad}lcl} \underline{empty} & : & \mathbb{1} \to A^* & \underline{cons} & : & A \times A^* \rightarrowtail A^* & \underline{conc} & : & A^* \times A^* \to A^* \\ & & & \underline{snoc} & : & A^* \times A \rightarrowtail A^* & \underline{prefix}, \underline{suffix} & : & A^* \leftrightarrow A^* \end{array}$$

Dabei sollen $\underline{empty}$ und $\underline{cons}$ bzw. $\underline{empty}$ und $\underline{snoc}$ als Konstruktoren verwendet werden können, d.h., ihre Wertebereiche partitionieren ihren Zielbereich:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} \mathrm{L}\underline{empty} \sqcap \mathrm{L}\underline{cons} & = & \mathrm{O} & \mathrm{L}\underline{empty} \sqcup \mathrm{L}\underline{cons} & = & \mathrm{L} \\ \mathrm{L}\underline{empty} \sqcap \mathrm{L}\underline{snoc} & = & \mathrm{O} & \mathrm{L}\underline{empty} \sqcup \mathrm{L}\underline{snoc} & = & \mathrm{L} \end{array}$$

$\underline{prefix}$ und $\underline{suffix}$ können aus der Konkatenation $\underline{conc}$ hergeleitet werden:

$$\underline{prefix} = \pi^{\mathsf{T}}_{A^* \times A^*}\underline{conc} \qquad\qquad \underline{suffix} = \rho^{\mathsf{T}}_{A^* \times A^*}\underline{conc}$$

$\underline{cons}$ und $\underline{snoc}$ werden auch als ternäre Relationen (siehe Definition 2.5.7) verwendet. Alternativ verwenden wir gelegentlich die folgende Schreibweise: $m = \langle i_1, \ldots, i_k \rangle$ mit $k \geq 0$ sei eine Sequenz. Dann gilt $\underline{empty} = \langle\rangle$, $i_0{:}m := i_0\underline{cons}_m = \{\!\!\{ i_0, m \}\!\!\}\underline{cons} = \langle i_0, \ldots, i_k \rangle$ und $m\underline{snoc}_{i_{k+1}} = \{\!\!\{ m, i_{k+1} \}\!\!\}\underline{snoc} = \langle i_1, \ldots, i_{k+1} \rangle$. Seien $m = \langle i_1, \ldots, i_k \rangle$ und $n = \langle j_1, \ldots, j_l \rangle$ Sequenzen, dann ist $mn := \{\!\!\{ m, n \}\!\!\}\underline{conc} = \langle i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l \rangle$ die *Konkatenation* von m mit n. (Hier werden in der Notation Punkte und Mengenelemente vermischt, jedoch in einer eindeutig erschließbaren Weise, so daß wir guten Gewissens auf Konversionsfunktionen verzichten können.)

Wir suchen nun eine Metafunktion $\underline{fold}\langle\_,\_\rangle$, so daß wir für jede Funktion $F : (A \times B) \nrightarrow A$ und jede Relation $G : A \leftrightarrow A$ eine Relation $\underline{fold}\langle F, G\rangle : (A \times B^*) \leftrightarrow A$ erhalten, mit

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{I} \| \mathrm{L}\underline{empty})\,\underline{fold}\langle F, G\rangle & = & G \\ (\mathrm{I} \| \underline{cons})\,\underline{fold}\langle F, G\rangle & = & \underline{PAass}(F \| \mathrm{I})\,\underline{fold}\langle F, G\rangle \end{array}$$

Daraus leiten wir folgende Gleichung her:

$$\underline{fold}\langle F, G\rangle = (\rho\underline{empty}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \pi\, G) \sqcup (\mathrm{I}\|\underline{cons}^{\mathsf{T}})\underline{PAass}(F\|\mathrm{I})\,\underline{fold}\langle F, G\rangle$$

Die Relation $(\mathrm{I}\|\underline{cons}^{\mathsf{T}})\underline{PAass}(F\|\mathrm{I})$ ist aufgrund des $\underline{cons}^{\mathsf{T}}$ offensichtlich progressiv-beschränkt und mit F eindeutig. Gemäß Lemma 2.3.8 erhalten wir folgende Lösung:

$$\underline{fold}\langle F, G\rangle := ((\mathrm{I}\|\underline{cons}^{\mathsf{T}})\underline{PAass}(F\|\mathrm{I}))^{*}\llbracket\, G, \underline{empty}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}\,\rrbracket$$

Allgemein gilt daher offensichtlich:

$$\underline{fold}\langle F, GH\rangle = \underline{fold}\langle F, G\rangle H$$

Eine einfache Anwendung von $\underline{fold}\langle\_,\_\rangle$ ist die Definition $\underline{conc} := \underline{fold}\langle\underline{snoc}, \mathrm{I}\rangle$.

Es sei nun $\Phi \in \{\subset, \supset, =\}$, und es gelte $(A\|\mathrm{I})F_1\ \Phi\ F_2A$. Daraus läßt sich folgern:

$$\begin{aligned}
(A\|\mathrm{I})\,\underline{fold}\langle F_1, G\rangle &= (A\|\mathrm{I})(\rho\underline{empty}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \pi)G \sqcup (A\|\mathrm{I})(\mathrm{I}\|\underline{cons}^{\mathsf{T}})\underline{PAass}(F_1\|\mathrm{I})\,\underline{fold}\langle F_1, G\rangle \\
&= (\rho\underline{empty}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \pi)AG \sqcup (\mathrm{I}\|\underline{cons}^{\mathsf{T}})(A\|\mathrm{I})\underline{PAass}(F_1\|\mathrm{I})\,\underline{fold}\langle F_1, G\rangle \\
&= (\rho\underline{empty}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \pi)AG \sqcup (\mathrm{I}\|\underline{cons}^{\mathsf{T}})\underline{PAass}((A\|\mathrm{I})F_1\|\mathrm{I})\,\underline{fold}\langle F_1, G\rangle \\
&\;\Phi\; (\rho\underline{empty}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \pi)AG \sqcup (\mathrm{I}\|\underline{cons}^{\mathsf{T}})\underline{PAass}(F_2A\|\mathrm{I})\,\underline{fold}\langle F_1, G\rangle \\
&= (\rho\underline{empty}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \pi)AG \sqcup (\mathrm{I}\|\underline{cons}^{\mathsf{T}})\underline{PAass}(F_2\|\mathrm{I})(A\|\mathrm{I})\,\underline{fold}\langle F_1, G\rangle\ ,
\end{aligned}$$

und mit den Lemmata 2.3.8, 2.3.6 und 2.3.7 folgt:

Lemma 2.6.1 (Kommutativität über Fold) [←29] Sei $\Phi \in \{\subset, \supset, =\}$, und es gelte $(A\|\mathrm{I})F_1\ \Phi\ F_2A$. Dann gilt auch

$$(A\|\mathrm{I})\,\underline{fold}\langle F_1, G\rangle\ \Phi\ \underline{fold}\langle F_2, AG\rangle\ . \qquad \square$$

Kapitel 3

Termgraphen mit gebundenen Variablen

3.1 Graphalphabet

Unter einem Graphalphabet verstehen wir die Zusammenfassung des lokalen syntaktischen Materials, das im Endeffekt natürlich auch eine Menge von Graphen festlegt.

Wir betrachten Knotenmarkierungen als Pendant zu Termkonstruktoren. Kantenmarkierungen dienen dann dazu, die einzelnen Nachfolger eines Knotens, entsprechend den einzelnen Komponenten eines Termes, zu unterscheiden. Wir wollen uns hierbei nicht auf eine feste Menge von Kantenmarkierungen festlegen, und auch auf dieser Menge keine totale Ordnung fordern, so daß sich eine Abstraktion von der Nachfolgerreihenfolge ergibt. Als Gegenstück zur Stelligkeit von Konstruktoren führen wir daher eine Relation ein, die jede Knotenmarkierung mit bestimmten Kantenmarkierungen in Beziehung setzt. In einem wohlgeformten Termgraphen wird dann jeder Knoten zu jeder so mit seiner Markierung in Beziehung stehenden Kantenmarkierung genau eine auslaufende Kante besitzen.

Mit diesem syntaktischen Material läßt sich eine Charakterisierung einfacher Termgraphen erreichen, die den aus der Literatur geläufigen Termgraphbegriffen, z.B. aus [Sta80, Ken87, CMR$^+$, SPvE93], entspricht. Diese bisher üblichen Ansätze betrachten an Stelle unseres Graphalphabets meist nur eine Menge von Knotenmarkierungen und gegebenenfalls noch eine Zuordnung von Stelligkeiten; die Kantenmarkierungen sind meist implizit natürliche Zahlen. Vor allem im Dschungelansatz neigt man noch dazu, durch Einführung von Sorten und einer Signatur die Komplexität bereits frühzeitig zu erhöhen, ohne daß die Notwendigkeit für die betrachteten Probleme klar herausgearbeitet wird.

Hier befreien wir uns also lediglich von der Reihenfolge der Nachfolger und führen eine entsprechende Abstraktion vom Stelligkeitsbegriff ein. Wir bürden uns jedoch keinen Ballast auf, der erst bei typisierten Graphen notwendig wird.

Da wir den Termgraphbegriff so erweitern wollen, daß auch Variablenbindung berücksichtigt werden kann, müssen wir zunächst im Graphalphabet einen Platz für Variablenmarkierungen schaffen.

Variable in der Informatik sind dazu da, instantiiert oder ersetzt zu werden. Üblicherweise geschieht dies durch Substitutionen. Da schon auf DAGs der dort nötige Substitutionsbegriff nicht mehr viel mit dem allgemein bekannten zu tun hat, sondern mehr mit Homomorphie (wie z.B. auch in [Sta80, PPEM] Substitutionen als wurzelerhaltende Homomorphismen definiert sind), werden wir in den Kapiteln 5 bis 8 schrittweise einen den Graphen gemäß Definition 3.2.1 angemessenen Homomorphiebegriff entwickeln. Ab dort sind wir gezwungen, die Variablen in zwei disjunkte und von der syntaktischen Intention her getrennte Klassen aufzuteilen.

Zum einen betrachten wir *Schemavariable*, die durch Homomorphismen bzw. Substitutionen instantiiert werden sollen. Schemavariable entsprechen den Variablen der Termersetzung, den Metavariablen der CRS sowie den Variablenknoten der Termgraphersetzung, die dort meist als unmarkierte Knoten aufgefaßt werden, bzw. in Dschungeln als Knoten ohne ausgehende Hyperkante. Übersetzt in unseren Formalismus sind die Variablen dieser Ansätze sämtlich Schemavariable ohne Nachfolger.

Andererseits betrachten wir *Objektvariable* oder *bindbare Variable*, die nicht durch Substitution instantiiert werden können, für die aber die *Variablenbindung* relevant ist. Die Variablenidentität ist für Objektvariable und Schemavariable gleichermaßen relevant.

Die Unterscheidung zwischen Schemavariablen und Objektvariablen mit Berücksichtigung der Bindung letzterer wurde zum ersten Mal von Klop in [Klo80] durchgeführt. Schemavariable heißen dort *Metavariable*, und Objektvariable einfach *Variable*. Es handelt sich dort um einen reinen *Term*ersetzungskontext, wie auch in den neueren Ansätzen aus [Tal93, Dug93]. Im Term*graph*kontext, zumindest im Rahmen des algebraischen Ansatzes, hatten gebundene Objektvariable (ausdrücklich als Konstante deklariert z.B. in [Staa]) und Schemavariable mit Nachfolgern bisher keinen Platz; hier betreten wir also Neuland.

Bei der Vorbereitung der Termgraphersetzung werden wir feststellen, daß noch einmal zu unterscheiden ist zwischen den bei der Regelanwendung zu *instantiierenden Schemavariablen*, und *Platzhaltervariablen*, die nur dafür sorgen, daß der Graph nach Löschung von Teilen der linken Regelseite und vor Hinzufügen der rechten Regelseite nicht seine Struktur verliert.

Daher benötigen wir eine Partition der Menge der Knotenmarkierungen in Teilmengen von Markierungen für Konstante bzw. Objekt-, Schema- und Platzhaltervariable.

Definition 3.1.1 Ein **Graphalphabet** ist ein Tupel $(\mathcal{N}, (k, v_b, v_s, v_p), \mathcal{E}, E)$ mit:

- $\mathcal{N}$, der Menge der *Knotenmarkierungen*,
- (k, v_b, v_s, v_p), einer Partition von $\mathcal{N}$ in Markierungsvektoren $k, v_b, v_s, v_p : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{N}$ für *konstante Konstruktoren*, sowie für *Objekt-, Schema-* und *Platzhaltervariablen*, also mit $k \sqcup v_b \sqcup v_s \sqcup v_p = \mathrm{L}$ und $k \sqcap v_b = k \sqcap v_s = k \sqcap v_p = v_b \sqcap v_s = v_b \sqcap v_p = v_s \sqcap v_p = \mathrm{O}$,
- $\mathcal{E}$, der Menge der *Kantenmarkierungen*, und
- $E : \mathcal{N} \leftrightarrow \mathcal{E}$, der Relation der *Markierungskompatibilität*, die jeder Knotenmarkierung bestimmte Kantenmarkierungen zuordnet. □

Abhängig von E werden also auch Variable mit Nachfolgern unterstützt, egal welcher Art von Variablen. Schemavariable und Platzhaltervariable sind, wie sich später erweisen wird, in mancher Hinsicht ähnlich zu behandeln, so daß wir beide Variablenarten unter dem Namen *Metavariable* subsumieren.

Das Graphalphabet $\mathcal{L} = (\mathcal{N}, (k, v_b, v_s, v_p), \mathcal{E}, E)$ wird im folgenden meist als konstant angenommen. Die Graphalphabete der Beispielzeichnungen allerdings variieren, wenn sie auch meist an einen typisierten λ-Kalkül wie in HOPS angelehnt sind.

Ein Graphalphabet für den untypisierten λ-Kalkül könnte folgendermaßen aussehen (um der Übersichtlichkeit willen führen wir statt der Vektoren deren Wertemengen auf):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\lambda := \; (\quad & \{\lambda, @, x, V_0, V_1\}, (\{\lambda, @\}, \{x\}, \{V_0, V_1\}, \{\}), \\ & \{l, f, a\}, \{(\lambda, l), (@, f), (@, a), (V_1, l)\} \qquad)\end{aligned}$$

Dabei ist also „λ“ einstellig und „@“ zweistellig, und beide sind als konstante Konstruktoren aufgefaßt. „x“ markiert nullstellige Objektvariable und V_0 und V_1 markieren null- bzw. einstellige Schemavariable, die z.B. für die Formulierung der β-Reduktion benötigt werden.

Einen Ausschnitt der Arithmetik könnte man mit folgendem Graphalphabet einzufangen versuchen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\mathbb{N} := \; (\quad & \{+, -, *, /, \mathsf{V}\} \cup \mathbb{N}, (\{+, -, *, /\} \cup \mathbb{N}, \{\}, \{\mathsf{V}\}, \{\}), \\ & \{1, 2\}, \{+, -, *, /\} \times \{1, 2\} \qquad)\end{aligned}$$

Hier sind die arithmetischen Operatoren zweistellige und die natürlichen Zahlen nullstellige Konstante; wir betrachten weder Objekt- noch Platzhaltervariable und nur eine nullstellige Schemavariablenmarkierung „V“.

3.2 Graphen

Ein Termgraph auf einem solchen Graphalphabet braucht neben einer Knotenmenge noch eine Knotenmarkierungsfunktion und eine Nachfolgerfunktion; als Neuerung führen wir zwei weitere Komponenten ein, die sich der Variablen annehmen: Variablenbindung und Variablenidentität.

Definition 3.2.1 [←20, 27, 28, 30, 46, 61] Ein **Termgraph** oder auch einfach **Graph** auf einem Graphalphabet $(\mathcal{N}, (k, v_b, v_s, v_p), \mathcal{E}, E)$ ist ein Tupel

$$(\mathcal{V}, M, S, D, B, W) \ ;$$

dabei ist

- $\mathcal{V}$ die **Knotenmenge**,
- $M : \mathcal{V} \to \mathcal{N}$ die totale Funktion der **Knotenmarkierung**,
- $S : \mathcal{V} \times \mathcal{E} \nrightarrow \mathcal{V}$ die *markierungskompatible* **Nachfolgerfunktion**, also mit $S^{\mathsf T} S \subset \mathrm{I}$ und $\pi^{\mathsf T}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}(S\mathrm{L} \sqcap \rho_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}) = ME$, d.h. jeder Knoten hat genau je eine auslaufende Kante jeder Kantenmarkierung, die E seiner eigenen Knotenmarkierung zuordnet,
- $D : \mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{V}$ die **Assoziierte** des Graphen mit $D = \pi^{\mathsf T}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}} S$,
- $B : \mathcal{V} \nrightarrow \mathcal{V}$ die **Bindungsfunktion**, die Objektvariablen einen (konstant markierten) Bindungsknoten zuordnen kann, so daß jeder derart gebundene Variablenknoten von der Bindungsstelle aus erreichbar ist:

  $$B^{\mathsf T} B \subset \mathrm{I} \ , \qquad \mathrm{L} B^{\mathsf T} \subset \mathrm{L} v_b M^{\mathsf T} \ , \qquad \mathrm{L} B \subset \mathrm{L} k M^{\mathsf T} \qquad \text{und} \qquad B^{\mathsf T} \subset D^+ \ .$$

  Ferner müssen alle von einem bindenden Konstruktor (Punkt) $n : \mathbb{1} \to \mathcal{V}$ mit $n \subset \mathrm{L}B$ gebundenen Variablenknoten „gekapselt“ sein, (d.h. $B^{\mathsf T}$ dominiert):

  $$nB^{\mathsf T}(D^{\mathsf T} \sqcap \overline{\mathrm{L}n})^* \subset nD^+ \ .$$

- $W : \mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{V}$ ist die symmetrische und transitive Relation der **Variablenidentität**, die jedem Objekt- und Schemavariablenknoten alle Knoten, die zur gleichen Variablen gehören, zuordnet, also mit:

  $$W^{\mathsf T} \subset W \ , \quad WW \subset W \ , \quad \mathrm{L} W = \mathrm{L}(v_b \sqcup v_s) M^{\mathsf T} \ .$$

  Dabei müssen alle Knoten einer Variablen gleich markiert und gleich gebunden sein:

  $$WM \subset M \qquad \text{und} \qquad WB \subset B \ .$$ □

Zum leichteren Verständnis der Bedingung der Markierungskompatibilität zeigt folgendes Diagramm die involvierten Relationen:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{V} \arrow[dl, "M"'] \arrow[dd, "\pi^{\mathsf T}(S\mathrm{L} \sqcap \rho)"] & \\
\mathcal{N} \arrow[dr, "E"'] & & \mathcal{V}\times\mathcal{E} \arrow[ul, "\pi"'] \arrow[dl, "\rho"] \\
 & \mathcal{E} &
\end{tikzcd}
\qquad
\mathcal{V}\times\mathcal{E} \xrightarrow{S} \mathcal{V} \xrightarrow{\mathrm{L}} \mathbb{1}$$

Äquivalent könnte man diese Bedingung als $\mathrm{L}\{\!| M^{\mathsf T}, E |\!\} = \mathrm{L}S^{\mathsf T}$ oder als $S\mathrm{L} = |\!\} M, E^{\mathsf T} \{\!|\mathrm{L}$ formulieren.

Bei unserer Termgraphdefinition sind einige Besonderheiten zu beachten, die unseren Ansatz von gewohnten unterscheiden.

Statt der von $\mathcal{V}\times\mathcal{E}$ ausgehenden Nachfolgerfunktion könnte man auch die Familie $(S_i)_{i:\mathbb{1}\to\mathcal{E}}$ der speziellen Nachfolgerfunktionen $S_i : \mathcal{V} \nrightarrow \mathcal{V}$ betrachten. Dann muß jedes S_i eindeutig sein, und die Bedingung $\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}(S\mathrm{L} \sqcap \rho_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}) = ME$ der Markierungskompatibilität der Nachfolgerfunktion wird zu:

$$\forall\, n : \mathbb{1} \to \mathcal{V} \bullet i \subset nME \Leftrightarrow n \subset \mathrm{L}S_i^{\mathsf{T}}\,.$$

Der Übergang von S zu S_i geschieht hierbei einfach nach dem Prinzip ternärer Relationen: $S_i = (\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}} \sqcap \mathrm{L}i\rho^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}})S$ (siehe auch Definition 2.5.7). Für die Assoziierte erhalten wir als alternative Definition: $D = \bigsqcup\{i : \mathbb{1} \to \mathcal{E} \bullet S_i\}$.

Diese zwei Möglichkeiten, die Nachfolgerfunktion zu betrachten, ergeben auch zwei verschiedene Beweisstile: zum einen unter Verwendung von S zusammen mit generischen Operationen auf direkten Produkten *innerhalb der Relationenalgebra*, und zum anderen mit Einführung von Variablen für Punkte und Verlagerung der Argumentation mehr in einen üblichen prädikatenlogischen Stil, was wir *Punktbeweis* nennen werden. Auch wenn von einem puristischen Standpunkt aus Beweisen innerhalb der Relationenalgebra der Vorzug zu geben wäre, so ist vom pragmatischen Standpunkt aus ein *gemischter Stil*, der die Vorzüge koeffizientenfreier relationenalgebraischer Argumentation mit prädikatenlogischer Ausdruckskraft vereint, erheblich leichter zu handhaben. Vor allem die zu späteren Kapiteln gehörigen aufwendigeren Beweise werden vornehmlich in diesem gemischten Stil geführt.

Durch die verschiedenen Kantenmarkierungen und die Forderung nach Eindeutigkeit der S_i wird eine Abstraktion von der normalerweise angesetzten Reihenfolge der Nachfolger eines Knotens erreicht. Als unmittelbare Entsprechung kann $\mathcal{E} = \{1, \ldots, n\}$ mit einer geeigneten positiven natürlichen Zahl n gewählt werden.

Der hier vorgestellte Formalismus kennt keine Kanten als primitive Objekte. Eine Kante entspricht einem Paar (n, i) aus einem Knoten und einer Kantenmarkierung, wobei diese für jenen erlaubt sein muß. So gesehen ist eine Kante also ein (relationenalgebraischer) Punkt $p : \mathbb{1} \to \mathcal{V} \times \mathcal{E}$ mit $p\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}$ als Anfangsknoten, $p\rho_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}$ als Kantenmarkierung und pS als Endknoten. Ein in der Relation ME enthaltenes Atom x ist natürlich auch eine Repräsentation einer Kante, und zwar mit $\mathrm{L}x^{\mathsf{T}}$ als Anfangsknoten, $\mathrm{L}x$ als Kantenmarkierung und $(\mathrm{L}x^{\mathsf{T}}\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}} \sqcap \mathrm{L}x\rho^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}})S = \langle\!| \mathrm{L}x^{\mathsf{T}}, \mathrm{L}x |\!\rangle_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}\, S = \mathrm{L}x^{\mathsf{T}}S_{\mathrm{L}x}$ als Endknoten.

Bei der Betrachtung der Komponenten eines einfachen Termgraphen fällt auf, daß die Angabe der Assoziierten eigentlich überflüssig ist, da sie sich aus der Nachfolgerfunktion berechnen läßt. Bei der Definition neuer Graphen werden wir daher in der Regel auf die explizite Definition der Assoziierten verzichten; ihre zentrale Rolle rechtfertigt jedoch, sie direkt als Bestandteil des Termgraphen zu betrachten.

Die hier vorgenommenen Erweiterungen des Termgraphbegriffes um Variablenbindung und -identität haben kein direktes Pendant in der Literatur. Das Design dieser Erweiterungen mag ungewöhnlich scheinen, so daß wir im folgenden einige zugrundeliegende Motivationen aufführen:

Die explizite Angabe der Bindungsfunktion bedeutet eine Abstraktion von konkreten oder konventionellen Bindungsmechanismen und erspart allein schon einen großen Teil der Überlegungen zu Variablenkollisionen und α-Konversion. Die Beschränkung, daß bindende Konstruktoren konstant sein müssen, scheint natürlich und bringt in Kapitel 7 erhebliche technische Erleichterungen.

In der Literatur findet man eine solche Formulierung der Variablenbindung als primitives Konzept (nicht aus Namen und Geltungsbereich hergeleitet) wohl nur in den „*assemblages*“, die Bourbaki zur Grundlage mathematischer Theorien macht [Bou70], in der Form von „*liens*“, die über die Zeichenreihe gezogen werden. Hierbei sind die „Variablen“ „$\square$“ ebenfalls namenlos, und Variablenidentität wird durch gleiche Bindung induziert: $W = BB^{\mathsf{T}}$.

(Insbesondere kann man die den „*lettres*“ zugeschriebene Rolle in den Axiomen dahingehend interpretieren, daß es keine freien Variablen gibt.)

Die explizite Angabe der Variablenidentität bedeutet eine Abstraktion von konventionellen Mechanismen zu ihrer Festsetzung (vor allem Namensgebung) und schafft damit die α-Konversion ganz ab.

Neben den bereits in der Einführung erwähnten Termgraphersetzungssystemen kommen auch in Termsprachen gelegentlich namenlose Variable vor, jedoch nur in Konstellationen, in denen die Variablenidentität auf die ein oder andere Weise trivial ist. Ein Beispiel sind die meist als „_“ notierten Dummyvariablen einiger funktionaler Programmiersprachen, wie z.B. ML [MT91] oder Haskell [HPJW$^+$92], bei denen jedes Vorkommen eine eigene Variable ist — dies entspricht den von Staples eingeführten namenlosen Variablen der Termgraphersetzung. Ein anders gelagertes Beispiel ist der „@“ notierte „myself“-Platzhalter in Ruslan [Zam94], der innerhalb eines bestimmten nicht schachtelbaren Kontextes (einer Spezifikation) immer für dieselbe Variable steht.

Dank der explizit aufgeführten Variablenidentität sind bei uns alle Variablen namenlos, egal in welchem Kontext und egal ob nur aus einem Knoten bestehend oder aus mehreren.

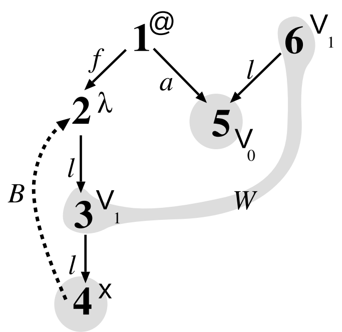
Verschiedene Markierungen von parallelen Variablen gleicher Art und gleicher Stelligkeit sind bei uns nur noch für externe Zwecke (z.B. für die Betrachtung von Nichtdeterminismus) nötig. Zwischen derart getrennten Variablen braucht dann auch keine α-Konversion mehr in Betracht gezogen zu werden.

Wir haben bewußt davon abgesehen, $W = BB^{\mathsf{T}}$ (wie bei Bourbaki gegeben) zu fordern. Damit kann ein Bindungsknoten mehrere voneinander unabhängige Variablen binden. Es wäre ein leichtes, unseren Ansatz dahingehend zu verfeinern, daß man auch für die Variablenbindung eine „Bindungsmarkierung“ und entsprechend eine Markierungskompatibilität einführt, um eine direkte Entsprechung zu den „Bindungsstrukturen“ aus [Tal93] zu erhalten. Dies würde aber auch den technischen Aufwand unangemessen erhöhen, ohne den Zugang zu den zentralen Problemen dieser Arbeit zu verbessern, so daß wir uns nur auf die einfache Möglichkeit verschiedener, gleich gebundener Variablen beschränken. Deren Behandlung wirft bereits einiges Licht auf die Probleme feinerer Strukturen. Unterbände man auch diese Möglichkeit, so wäre zum einen die Variablenidentität für gebundene Variable überflüssig, zum anderen verlöre man auch wertvolle Einsichten in das Wesen der sonst selten selbständig betrachteten Variablenidentität.

Die speziellen Rollen der nicht bindbaren Schema- und Platzhaltervariablen werden uns erst ab Kapitel 6 interessieren. Solange werden wir meist nur mit v_b oder $\mathrm{L}\,W$, und nur selten mit $\overline{k}$ zu tun haben.

Als Beispiel ist das Tupel $G_1 := (\mathcal{V}_1, M_1, S_1, D_1, B_1, W_1)$ mit

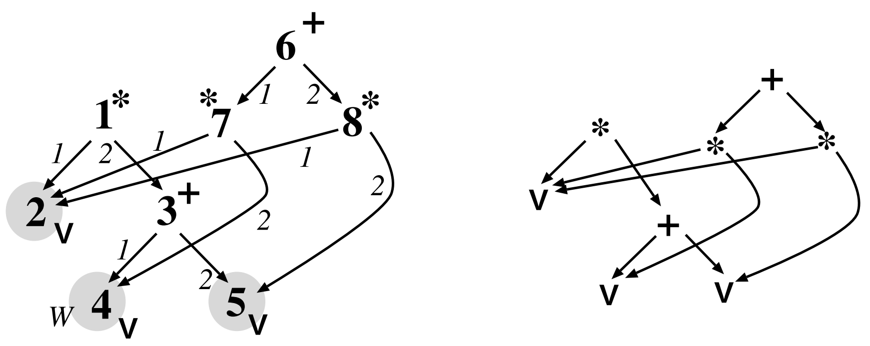
$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_1 &= \{1,2,3,4,5,6\}\\
M_1 &= \{(1,@),(2,\lambda),(3,\,V_1),(4,x),(5,\,V_0),(6,\,V_1)\}\\
S_1 &= \{((1,f),2),((1,a),5),((2,l),3),((3,l),4),((6,l),5)\}\\
D_1 &= \{(1,2),(1,5),(2,3),(3,4),(6,5)\}\\
B_1 &= \{(4,2)\}\\
W_1 &= \{(3,3),(3,6),(6,3),(6,6),(4,4),(5,5)\}
\end{aligned}$$



ein Termgraph auf $\mathcal{L}_\lambda$, der der bereits auf Seite 6 angeführten Termgraphregel zur β-Reduktion entspricht.

Entsprechend der Termgraphregel zur Distributivität der Multiplikation läßt sich der folgende Termgraph $G_2 := (\mathcal{V}_2, M_2, S_2, D_2, B_2, W_2)$ auf $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ definieren:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_2 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\
M_2 &= \{(1, *), (2, V), (3, +), (4, V), (5, V), (6, +), (7, *), (8, *)\} \\
S_2 &= \{((1, 1), 2), ((1, 2), 3), ((3, 1), 4), ((3, 2), 5), ((6, 1), 7), \\
&\quad ((6, 2), 8), ((7, 1), 2), ((7, 2), 4), ((8, 1), 2), ((8, 2), 5)\} \\
B_2 &= \{\} \\
W_2 &= \{(2, 2), (4, 4), (5, 5)\}
\end{aligned}
$$



Im Bild findet sich links eine Darstellung von G_2, in der die Knoten explizit aufgeführt und mit ihren Markierungen annotiert sind, wie schon in dem Bild oben zu G_1. Auch die eingezeichneten Kanten sind entsprechend markiert, so daß die Nachfolgerfunktionen sich genau rekonstruieren lassen.

Die Zeichnung rechts im Bild stellt ebenfalls G_2 dar, aber in der Form, in der wir in Zukunft Beispielgraphen darstellen werden. Dabei benennen wir die einzelnen Knoten nicht explizit und tragen an Stelle von Knotennamen direkt die Markierungen ein. Auch Kanten markieren wir meist nicht explizit, sondern wir unterstellen, daß die gezeichnete Reihenfolge der ausgehenden Kanten (in Abhängigkeit von der jeweiligen Knotenmarkierung) eine Kodierung für die Kantenmarkierungen abgibt. Auch verzichten wir in aller Regel auf die Darstellung des reflexiven Teils der Variablenidentität.

Zur Vereinfachung der Schreibweise bedienen wir uns im weiteren folgender

Konvention 3.2.2: Sofern nicht explizit anders angegeben, gilt für unter dem Namen G bzw. mit beliebigem j unter dem Namen G_j eingeführte Termgraphen folgende notationelle Konvention:

$$G = (\mathcal{V}, M, S, D, B, W) \qquad\qquad G_j = (\mathcal{V}_j, M_j, S_j, D_j, B_j, W_j)\ . \qquad \square$$

Für die Abwesenheit ungebundener Objektvariablen definieren wir den üblichen Namen:

Definition 3.2.3 Der Graph G heißt **geschlossen**, wenn $\mathrm{L}\, v_b M^{\mathsf{T}} \subset \mathrm{L}\, B^{\mathsf{T}}$. $\square$

Zur besseren Beherrschung der verschiedenen Variablen führen wir folgende Begriffe ein:

Definition 3.2.4 [←60] Ein **Variablenvektor** zu einem Graphen G ist ein Vektor $v : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}$, für den $v \subset \overline{\mathrm{L}k}$ und $vW \subset v$ gilt, der also nur Variablen enthält und zu jeder enthaltenen Variablen alle ihre Knoten enthält.

Wenn v zusätzlich keine Objektvariable enthält, $v \subset \overline{v_b M^{\mathsf{T}}}$, dann heißt v auch *Metavariablenvektor*, falls $v \subset v_s M^{\mathsf{T}}$, *Schemavariablenvektor*. $\square$

Man bemerke, daß gemäß dieser Definition auch Platzhaltervariable, auf denen ja keine Variablenidentität definiert ist, in einem Variablenvektor enthalten sein können.

Metaterme im Kontext der CRS entsprechen Termgraphen ohne Platzhaltervariable und nur mit nullstelligen Objektvariablen. Die Entsprechung derjenigen Metaterme, die als linke Regelseiten vorkommen dürfen, zeichnen wir in folgender Definition aus:

Definition 3.2.5 Ein **CRS-Pattern** ist ein geschlossener Graph G, in dem alle Nachfolger von Schemavariablen jeweils verschiedene gebundene Variable sind, also $v_s M^{\mathsf{T}} D \subset v_b M^{\mathsf{T}} \subset \mathrm{L} B^{\mathsf{T}}$ gilt und $S\rho^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}} \sqcap \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}(M v_s^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}})$ injektiv ist. □

Dabei haben wir allerdings von der Beschränkung auf nullstellige Objektvariable abgesehen.

Später werden wir noch folgenden Begriff benötigen:

Definition 3.2.6 [←53] Die **Knotennachfolgerfunktion** $Q_G : \mathcal{E} \times \mathcal{V} \nrightarrow \mathcal{V}$ zu einem Termgraphen G ist folgendermaßen definiert:

$$Q_G := {}_{\mathcal{E}\times\mathcal{V}}\rangle\!\rangle\, \rho^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}, \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}} \rangle\!\rangle S$$

Die zu einem unter dem Namen G eingeführten Termgraphen gehörige Knotennachfolgerfunktion wird auch einfach als $Q := Q_G$ notiert; analog verwenden wir $Q_j := Q_{G_j}$. Nach dem Prinzip ternärer Relationen (Definition 2.5.7) definieren wir noch für jeden Knoten $n : \mathbb{1} \to \mathcal{V}$ von G:

$$Q_{G,n} := \langle\!\langle \mathrm{I}, \mathrm{L}n \langle\!\langle_{\mathcal{E}\times\mathcal{V}} Q_G = \langle\!\langle \mathrm{L}n, \mathrm{I} \langle\!\langle_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}} S = \bigsqcup\{i : \mathbb{1} \to \mathcal{E} \bullet i^{\mathsf{T}} n S_i\}$$

und wir notieren auch $Q_n := Q_{G,n}$ und $Q_{j,n} := Q_{G_j,n}$. □

Wir fassen hier noch einige einfache Rechenhilfen zusammen, die wir in späteren Beweisen benötigen werden:

Lemma 3.2.7 (Eigenschaften von Graphen) [←40, 106, 113] Sei G ein Graph. Dann gilt:

i) $WB = B$

ii) Für jeden Vektor $p : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}$ gilt: $\mathrm{L}pM^{\mathsf{T}} \sqcap W = Mp^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap W$

iii) $\mathrm{L}B^{\mathsf{T}} \sqcap W = B\mathrm{L} \sqcap W$ und $\overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}} \sqcap W = \overline{B\mathrm{L}} \sqcap W$. Es gilt sogar für jeden Vektor $p : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}$ die entsprechende Gleichung: $\mathrm{L}pB^{\mathsf{T}} \sqcap W = Bp^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap W$.

Beweis:

i) $WB \subset B = \mathrm{I}B \sqcap B\mathrm{L} = (\mathrm{I} \sqcap B\mathrm{L})B = (\mathrm{I} \sqcap \mathrm{L}B^{\mathsf{T}})B \subset (\mathrm{I} \sqcap \mathrm{L}v_b M^{\mathsf{T}})B \subset WB$

ii) $\mathrm{L}pM^{\mathsf{T}} \sqcap W = (\mathrm{L}pM^{\mathsf{T}} \sqcap W)\mathrm{I} = W(Mp^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \mathrm{I}) \subset WMp^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap W \subset Mp^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap W$
Die Gegenrichtung folgt damit sofort durch Transposition.

iii) Die erste Behauptung folgt mit Dedekind aus: $\mathrm{L}B^{\mathsf{T}} \sqcap W \subset (\mathrm{L} \sqcap WB)(B^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}W) \subset B\mathrm{L}$. Die zweite Behauptung folgt dann mit Hilfe von Lemma 2.2.5. Die dritte zeigt man völlig analog der ersten. □

Auch wenn wir bisher noch keinen Homomorphiebegriff für unsere Graphen zur Verfügung haben, so können wir doch schon einmal einen passenden Isomorphiebegriff einführen. Der Zusammenhang mit einem der zukünftigen Homomorphiebegriffe wird zu gegebener Zeit hergestellt werden (Satz 6.1.6, Seite 63).

Definition 3.2.8 (Isomorphie von Graphen) [←62, 63]
Zwei Graphen G und G_a heißen *isomorph*, in Zeichen $G \doteq G_a$, wenn es eine totale, bijektive Funktion $\varphi : \mathcal{V} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{V}_a$ gibt mit $(\varphi\|\mathrm{I})S_a = S\varphi$, $\varphi M_a = M$, $\varphi B_a = B\varphi$ und $\varphi W_a = W\varphi$. φ heißt dann *Isomorphismus von G nach G_a*. □

Es gilt:

Lemma 3.2.9 Die Relation $\circeq$ zwischen Graphen eines Alphabets ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Seien G, G_a und G_b Graphen über dem gleichen Graphalphabet. Zunächst ist offensichtlich $\mathrm{I}_\mathcal{V}$ ein Isomorphismus von G nach G und damit ist $\circeq$ reflexiv. Sei nun $\varphi : \mathcal{V} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{V}_a$ ein Isomorphismus von G nach G_a. Dann ist auch $\varphi^\top$ total und bijektiv und es gilt:

- $\varphi^\top S_i = \varphi^\top S_i \varphi\varphi^\top = \varphi^\top\varphi S_{a,i}\varphi^\top = S_{a,i}\varphi^\top$
- $\varphi^\top M = \varphi^\top\varphi M_a = M_a$
- $\varphi^\top B = \varphi^\top B\varphi\varphi^\top = \varphi^\top\varphi B_a\varphi^\top = B_a\varphi^\top$
- $\varphi^\top W = \varphi^\top W\varphi\varphi^\top = \varphi^\top\varphi W_a\varphi^\top = W_a\varphi^\top$

und damit ist $\circeq$ symmetrisch. Sei nun zusätzlich $\psi : \mathcal{V}_a \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{V}_b$ ein Isomorphismus von G_a nach G_b, so ist $\varphi\psi$ eine bijektive Funktion von $\mathcal{V}$ nach $\mathcal{V}_b$ und wir erhalten:

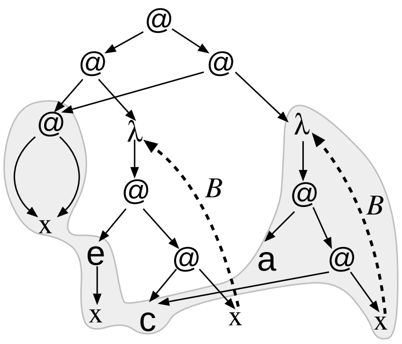
- $\varphi\psi S_{b,i} = \varphi S_{a,i}\psi = S_i\varphi\psi$
- $\varphi\psi M_b = \varphi M_a\psi = M\varphi\psi$
- $\varphi\psi B_b = \varphi B_a\psi = B\varphi\psi$
- $\varphi\psi W_b = \varphi W_a\psi = W\varphi\psi$

Damit ist $\varphi\psi$ ein Isomorphismus von G nach G_b und $\circeq$ ist auch transitiv und daher eine Äquivalenzrelation. □

3.3 Untergraphen

Im Termgraphkontext darf die Knotenmenge eines Untergraphen nach unten keine Grenze besitzen, da diese die Markierungskompatibilität durchbrechen würde. Eine solche Knotenmenge nennen wir *offen*.

Definition 3.3.1 [←54] Ein Knotenvektor $v : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}$ heißt **offen**, wenn $vD \subset v$. □



Es stellt sich heraus, daß dies auch schon die einzige Bedingung für Untergraphbildung ist, so daß durch einen solchen offenen Vektor ein Untergraph induziert wird.

Ein Untergraph *kann* durch einen einzigen Knoten induziert sein (der zugrundeliegende Vektor wäre dann die offene Hülle eines Punktes), muß aber natürlich nicht, wie das nebenstehende Bild zeigt.

Die Strenge unseres Formalismus erfordert einen expliziten Übergang zwischen der Knotenmenge des Ausgangsgraphen und ihrer für den Untergraphen benötigten Teilmenge. Wir bedienen uns hier der *natürlichen Injektion* (siehe ggf. Definition 2.1.10).

Der Beweis der Wohldefiniertheit von Untergraphen bereitet keine besonderen Probleme:

Satz 3.3.2 (Einschränkung auf offene Knotenmengen)
Sei $v : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}$ ein offener Vektor in einem Graphen G. Sei nun $\mathcal{V}_v := \mathrm{ran}(v)$ und sei $\iota : \mathcal{V}_v \rightarrowtail \mathcal{V}$ die natürliche Injektion von $\mathcal{V}_v$ in $\mathcal{V}$ (siehe Definition 2.1.10). Dann wird der *auf v eingeschränkte Graph*, $G|_v$ definiert durch $G|_v := (\mathcal{V}_v, M_v, S_v, D_v, B_v, W_v)$ mit $M_v := \iota M$, $S_v := (\iota\|\mathrm{I})S\iota^\top$, $B_v := \iota B\iota^\top$ und $W_v := \iota W\iota^\top$, und ι ist die *Untergraphinjektion zu v* von $G|_v$ in G.

Der eingeschränkte Graph $G|_v$ ist ein Graph im Sinne von Definition 3.2.1.

Beweis: Überprüfung der Termgrapheigenschaften:

- Eigenschaften der Markierungsfunktion:
  - Totalität: $M_v\mathrm{L} = \iota M\mathrm{L} = \iota\mathrm{L} = \mathrm{L}$

- Eindeutigkeit: $M_v^{\mathsf{T}} M_v = M^{\mathsf{T}} \iota^{\mathsf{T}} \iota M \subset M^{\mathsf{T}} M \subset \mathrm{I}$

- Eigenschaften der Nachfolgerfunktion:
  - Eindeutigkeit: $S_v^{\mathsf{T}} S_v = \iota S^{\mathsf{T}} (\iota^{\mathsf{T}} \| \mathrm{I})(\iota \| \mathrm{I}) S \iota^{\mathsf{T}} \subset \iota S^{\mathsf{T}} (\iota^{\mathsf{T}} \iota \| \mathrm{I}) S \iota^{\mathsf{T}} \subset \iota S^{\mathsf{T}} S \iota^{\mathsf{T}} \subset \iota \iota^{\mathsf{T}} = \mathrm{I}$
  - Markierungskompatibilität:
$$\begin{aligned} S_v \mathrm{L} &= (\iota \| \mathrm{I}) S \iota^{\mathsf{T}} \mathrm{L} \;=\; (\iota \| \mathrm{I}) S \mathrm{L} \;=\; (\iota \| \mathrm{I}) \llbracket M, E \rrbracket \mathrm{L} \\ &= \llbracket \iota M, E \rrbracket \mathrm{L} \;=\; \llbracket \iota M_v, E \rrbracket \mathrm{L} \end{aligned}$$

- Eigenschaften der Bindungsfunktion:
  - $B_v^{\mathsf{T}} B_v = \iota B^{\mathsf{T}} \iota^{\mathsf{T}} \iota B \iota^{\mathsf{T}} \subset \iota B^{\mathsf{T}} B \iota^{\mathsf{T}} \subset \iota \iota^{\mathsf{T}} = \mathrm{I}$
  - $\mathrm{L} B_v^{\mathsf{T}} = \mathrm{L} \iota B^{\mathsf{T}} \iota^{\mathsf{T}} \subset \mathrm{L} B^{\mathsf{T}} \iota^{\mathsf{T}} \subset v_b M^{\mathsf{T}} \iota^{\mathsf{T}} = v_b M_v^{\mathsf{T}}$
  - $\mathrm{L} B_v = \mathrm{L} \iota B \iota^{\mathsf{T}} \subset \mathrm{L} B \iota^{\mathsf{T}} \subset k M^{\mathsf{T}} \iota^{\mathsf{T}} = k M_v^{\mathsf{T}}$
  - $B_v^{\mathsf{T}} = \iota B^{\mathsf{T}} \iota^{\mathsf{T}} \subset \iota D^{+} \iota^{\mathsf{T}} = (\iota D \iota^{\mathsf{T}})^{+} = D_v^{+}$ da v offen.
  - Sei $n : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_v$ ein Punkt mit $n \subset \mathrm{L} B_v (= \mathrm{L} \iota B \iota^{\mathsf{T}} \subset \mathrm{L} B \iota^{\mathsf{T}})$, also auch $n \iota \subset \mathrm{L} B$. Dann gilt
$$\begin{aligned} n B_v^{\mathsf{T}} (D_v^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L} n})^* &= n \iota B^{\mathsf{T}} \iota^{\mathsf{T}} (\iota D^{\mathsf{T}} \iota^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L} n})^* \\ &= n \iota B^{\mathsf{T}} \iota^{\mathsf{T}} (\iota (D^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L} n \iota}) \iota^{\mathsf{T}})^* \\ &\subset n \iota B^{\mathsf{T}} \iota^{\mathsf{T}} \iota (D^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L} n \iota})^* \iota^{\mathsf{T}} \\ &\subset (n \iota) B^{\mathsf{T}} (D^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L} n \iota})^* \iota^{\mathsf{T}} \\ &\subset n \iota D^{+} \iota^{\mathsf{T}} = n D_v^{+} \end{aligned}$$
    Auch hier ging wieder die Offenheit von $v = \mathrm{L} \iota$ ein.

- Eigenschaften der Variablenidentität:
  - $W_v^{\mathsf{T}} = \iota W^{\mathsf{T}} \iota^{\mathsf{T}} = \iota W \iota^{\mathsf{T}} = W_v$
  - $W_v W_v = \iota W \iota^{\mathsf{T}} \iota W \iota^{\mathsf{T}} \subset \iota W W \iota^{\mathsf{T}} \subset \iota \iota^{\mathsf{T}} = \mathrm{I}$
  - $W_v M_v = \iota W \iota^{\mathsf{T}} \iota M \iota^{\mathsf{T}} \subset \iota W M \iota^{\mathsf{T}} \subset \iota M \iota^{\mathsf{T}} = M_v$
  - $W_v B_v = \iota W \iota^{\mathsf{T}} \iota B \iota^{\mathsf{T}} \subset \iota W B \iota^{\mathsf{T}} \subset \iota B \iota^{\mathsf{T}} = B_v$ □

3.4 Pfade

Wenn man zu den Termgraphen aus Definition 3.2.1 Pfade definieren möchte, muß man sich im klaren darüber sein, daß reine Knotenfolgen (mit entsprechenden Zusatzbedingungen) zu wenig Information beinhalten. Erheblich wichtiger sind die Kantenmarkierungen; und so definieren wir zunächst *abstrakte Pfade* als graphenunabhängige Folgen von Kantenmarkierungen — dies ist unkonventionell und entspricht *nicht* herkömmlichen Pfadbegriffen, sondern eher einer Verallgemeinerung von „Richtungen“; dennoch verwenden wir den Namen „Pfad“, da er uns weniger irreführend erscheint. Zur relationenalgebraischen Behandlung solcher Sequenzen greifen wir auf das in Abschnitt 2.6 zur Verfügung gestellte Material zurück.

Definition 3.4.1 Ein **abstrakter Pfad**, oder einfach **Pfad**, ist eine Folge von Kantenmarkierungen $\langle i_1, \ldots, i_k \rangle \in \mathcal{E}^*$ (mit $k \geq 0$), meist als relationenalgebraischer Punkt aus $\mathbb{1} \to \mathcal{E}^*$ aufgefaßt. Die leere Folge $\langle\rangle$ heißt *leerer (abstrakter) Pfad.*

Ein **konkreter Pfad** ist ein Element aus $\mathcal{V} \times \mathcal{E}^*$, also ein Paar bestehend aus einem Knoten und einem abstrakten Pfad. □

Der Begriff des abstrakten Pfades entspricht im Kontext der Termersetzung dem der Position (oder „*occurrence*“, z.B. [Wol]). Konkrete Pfade kann man mit Hilfe der Nachfolgerfunktion entlanggehen:

Definition 3.4.2 Zu einem Termgraphen G heißt $Z : \mathcal{V} \times \mathcal{E}^* \nrightarrow \mathcal{V}$ mit $Z := Z_G := \underline{fold}\langle S, \mathrm{I}\rangle$ die **Pfadfunktion**, und $\mathbb{Z} : \mathcal{V} \times \mathcal{E}^* \leftrightarrow \mathcal{V}$ mit $\mathbb{Z} := \mathbb{Z}_G := (\mathrm{I} \| \underline{prefix}^{\mathsf{T}})Z$ die **Pfadrelation**. Für einen abstrakten Pfad m verwenden wir wieder die Subskript-Schreibweise für ternäre Relationen (siehe Definition 2.5.7), also $Z_m = Z_{G,m}$ und $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{G,m}$. □

In der Subskript-Variante lassen sich diese Definitionen folgendermaßen verdeutlichen: Zu einem Termgraphen G und einem (abstrakten) Pfad $m = \langle i_1, \ldots, i_k \rangle$ ist die Pfadfunktion gegeben durch $Z_m = Z_{G,m} = S_{i_1} \cdots S_{i_k}$ (Eindeutigkeit ist offensichtlich). Die allgemeine Pfadfunktion Z ordnet also einem (Ausgangs-)Knoten und einem abstrakten Pfad den Endknoten des sich daraus ergebenden *konkreten Pfades* zu. Ferner gilt für die Pfadrelation: $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{G,m} = \bigsqcup\{n : \mathbb{1} \to \mathcal{E}^* \mid n^{\mathsf{T}}m \subset \underline{prefix} \bullet Z_{G,n}\}$; hier werden einem konkreten Pfad alle Endknoten seiner Präfixe zugeordnet, also alle Knoten, die *auf* diesem konkreten Pfad liegen. Daher vereinbaren wir noch folgende Ausdrucksweise: Gegeben seien ein Termgraph G und ein Knotenvektor $p : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_G$. Ein Knoten q heißt *auf* (dem abstrakten Pfad) *m von p aus*, bzw. *auf* (dem konkreten Pfad) $\langle\!| p, m |\!\rangle_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}$, wenn $q \subset \langle\!| p, m |\!\rangle_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} \mathbb{Z}$ $(= p\mathbb{Z}_m)$, wenn es also ein Präfix n von m gibt, so daß $q \subset pZ_n$.

Offensichtlich gilt $\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} Z = D^* = \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\mathsf{T}}Z$.

Definition 3.4.3 (Weitere Pfadrelationen) $\mathbb{Z}\!\!\!+ := (\mathrm{I} \| \underline{prefix}^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\underline{empty}})Z$ setzt einen konkreten Pfad in Beziehung mit den Knoten, die nach einem *nichtleeren* Präfix auf ihm liegen.

$Z\!\!\!\not\;\; := Z \sqcap \overline{(\mathbb{Z}\!\!\!+ \sqcap \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*})\mathrm{L}}$ ist die Einschränkung der Pfadfunktion auf solche konkrete Pfade, die keinen Kreis um ihren Ausgangspunkt enthalten. □

Lemma 3.4.4 (Kommutativität mit den Pfadrelationen) [←36, 46] Sei $\Phi \in \{\subset, \supset, =\}$, sei $A : \mathcal{V}_1 \leftrightarrow \mathcal{V}_2$ eine Relation zwischen den Knotenmengen zweier Graphen G_1 und G_2, und es gelte $(A\|\mathrm{I})S_2 \;\Phi\; S_1A$. Dann gilt auch

$$(A\|\mathrm{I})Z_2 \;\Phi\; Z_1A \qquad \text{und} \qquad (A\|\mathrm{I})\mathbb{Z}_2 \;\Phi\; \mathbb{Z}_1A \qquad \text{und} \qquad (A\|\mathrm{I})\mathbb{Z}\!\!\!+_2 \;\Phi\; \mathbb{Z}\!\!\!+_1A \;.$$

Beweis: Es gilt
$$\begin{aligned}
(A\|\mathrm{I})Z_2 &= (A\|\mathrm{I})\,\underline{fold}\langle S_2, \mathrm{I}\rangle \\
&\Phi\;\; \underline{fold}\langle S_1, A\mathrm{I}\rangle && \text{Lemma 2.6.1} \\
&= \underline{fold}\langle S_1, \mathrm{I}A\rangle \\
&= \underline{fold}\langle S_1, \mathrm{I}\rangle A \;=\; Z_1A
\end{aligned}$$
Damit gilt $(A\|\mathrm{I})Z_2 \;\Phi\; Z_1A$. Weiter erhalten wir

$$(A\|\mathrm{I})\mathbb{Z}_2 = (A\|\mathrm{I})(\mathrm{I}\|\underline{prefix}^{\mathsf{T}})Z_2 = (\mathrm{I}\|\underline{prefix}^{\mathsf{T}})(A\|\mathrm{I})Z_2 \;\Phi\; (\mathrm{I}\|\underline{prefix}^{\mathsf{T}})Z_1A = \mathbb{Z}_1A$$

und ebenso

$$\begin{aligned}
(A\|\mathrm{I})\mathbb{Z}\!\!\!+_2 &= (A\|\mathrm{I})(\mathrm{I}\|\underline{prefix}^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\underline{empty}})Z_2 \\
&= (\mathrm{I}\|\underline{prefix}^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\underline{empty}})(A\|\mathrm{I})Z_2 \;\;\Phi\;\; (\mathrm{I}\|\underline{prefix}^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\underline{empty}})Z_1A \;=\; \mathbb{Z}\!\!\!+_1A
\end{aligned}$$
□

Zur Existenz von Pfaden bei Erreichbarkeit gelten zwei recht selbstverständliche Eigenschaften:

Lemma 3.4.5 (Existenz von Pfaden) [←37]
Gegeben seien ein Termgraph G, zwei Knoten $p, q : \mathbb{1} \to \mathcal{V}$ sowie eine beliebige Relation $A : \mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{V}$. Dann gelten folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
A \sqcap D^* &\neq \mathrm{O} &&\Leftrightarrow&& \text{es gibt einen Pfad } m\text{, so daß } A \sqcap Z_m \neq \mathrm{O}\;, \\
q &\subset pD^* &&\Leftrightarrow&& \text{es gibt einen Pfad } m\text{, so daß } q = pZ_m\;.
\end{aligned}$$
□

Gestützt auf Pfadfunktion und -relation läßt sich der graphentheoretische Begriff der Dominierung leicht in eine relationenalgebraische Formulierung umsetzen: Ein Knoten x dominiert einen Knoten y, wenn für jeden konkreten Pfad r, der in y endet, gilt, daß x auf r liegt oder der Anfangsknoten von r, also $r\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}$, von x aus erreichbar ist. Relationenalgebraisch ergibt das:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V} \arrow[u, phantom] & & \mathcal{V}\times\mathcal{E}^* \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[dll, "\mathbb{Z}"'] \arrow[d, "Z"] \\
\mathcal{V} \arrow[u, "D^*"] \arrow[rr, "\underline{dominates}"] & & \mathcal{V}
\end{tikzcd}$$

Definition 3.4.6 Die **Dominierungsrelation** $\underline{dominates} : \mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{V}$ ist definiert als $\underline{dominates} := \overline{\overline{\mathbb{Z}^{\mathsf{T}} \sqcup D^*\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}}Z}$. $\square$

Aus dieser Definition ergibt sich sofort:

Lemma 3.4.7 (Erreichbarkeit und Dominierung) $\underline{dominates} \subset D^*$

Beweis: Mit der Surjektivität von Z erhalten wir ($\pi := \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}$):

$$\underline{dominates} = \overline{\overline{\mathbb{Z}^{\mathsf{T}} \sqcup D^*\pi^{\mathsf{T}}}Z} \subset \overline{\overline{(\mathbb{Z}^{\mathsf{T}} \sqcup D^*\pi^{\mathsf{T}})Z}} \;=\; \mathbb{Z}^{\mathsf{T}}Z \sqcup D^*\pi^{\mathsf{T}}Z \;=\; D^* \qquad \square$$

Weiter könnte in Definition 3.2.1 die Bedingung zur Bindungskapselung ersetzt werden durch $B^{\mathsf{T}} \subset \underline{dominates}$, da sich die Definition von $\underline{dominates}$ nur auf die Nachfolgerfunktion stützt; $B^{\mathsf{T}} \subset D^+$ folgt offensichtlich mit den übrigen Bindungseigenschaften aus der Dominierung.

Lemma 3.4.8 (Dominierung von Pfadenden) [←34] Die Knoten, die das Ende eines konkreten Pfades dominieren, liegen auf diesem Pfad oder von ihnen aus ist der Anfangspunkt dieses Pfades erreichbar: $Z\underline{dominates}^{\mathsf{T}} \subset \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}D^{*\mathsf{T}} \sqcup \mathbb{Z}$.

Beweis: $Z\underline{dominates}^{\mathsf{T}} = Z\overline{Z^{\mathsf{T}}\overline{\mathbb{Z} \sqcup \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}D^{*\mathsf{T}}}} \subset \overline{\overline{\mathbb{Z} \sqcup \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}D^{*\mathsf{T}}}} = \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}D^{*\mathsf{T}} \sqcup \mathbb{Z}$ $\square$

Als Verallgemeinerung des Begriffes der Quellen eines Graphen bezüglich universeller Erreichbarkeit führen wir einen neuen Begriff ein, der auch auf Termgraphen mit Kreisen anwendbar ist.

Definition 3.4.9 [←31] Eine **Knotenbasis** oder einfach **Basis** ist ein Vektor $b : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}$ mit $\mathrm{L}bD^* = \mathrm{L}$ und $D^* \sqcap b^{\mathsf{T}}b \subset \mathrm{I}$. $\square$

Eine Knotenbasis ist also ein Vektor von Knoten, von denen aus alle Knoten des fraglichen Graphen erreichbar sind, und zwar ein minimaler solcher Vektor, d.h. kein Basisknoten ist von einem anderen aus erreichbar (in Gegenwart von Kreisen können natürlich auch selbst auf Kreisen liegende Knoten in einer Basis vorkommen).

Für einen kreisfreien Termgraphen G ist offensichtlich der Vektor der Quellen $\overline{\mathrm{L}D}$ die einzige Knotenbasis.

3.5 Kapselung

Aufgrund der kapselnden Variablenbindung ist neben allgemeiner Erreichbarkeit auch noch wichtig, ob ein Knoten auf einem Pfad von einem kapselnden Konstruktor zu einer von diesem gebundenen Variablen liegt. Für eine Variable interessiert neben der globalen Freiheit auch noch *lokale Freiheit*; wir nennen eine Variable *frei* unter einem anderen Knoten, wenn sie von letzterem aus über einen Pfad erreichbar ist, auf dem kein sie bindender Knoten liegt:

Definition 3.5.1 Die **Variablenfreiheit** $\text{€}_G : \mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{V}$ für einen Graphen G mit

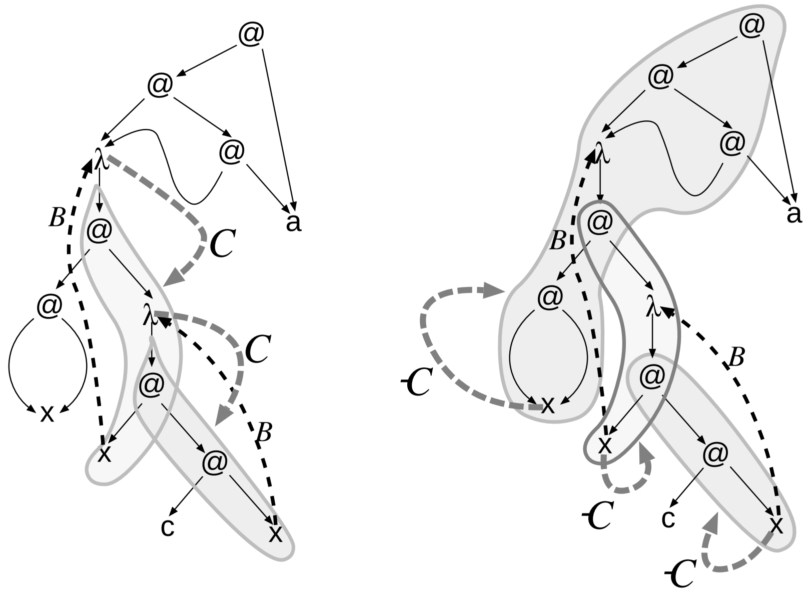
$$\text{€}_G := (W\mathrm{L} \sqcap Z^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{B\mathbb{Z}^{\mathsf{T}}})\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} = \bigsqcup\{n : \mathbb{1} \to \mathcal{V} \mid n \subset \mathrm{L}\,W \bullet n^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap (D^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L}nB})^*\}$$

setzt alle Variablen in Relation mit den Knoten, in deren Untergraphen sie frei vorkommen. Die **Kapselungsrelation** $C_G : \mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{V}$ mit

$$C_G := B^{\mathsf{T}}\text{€}_G = \bigsqcup\{n : \mathbb{1} \to \mathcal{V} \bullet n^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap B^{\mathsf{T}}(D^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L}n})^*\}$$

setzt bindende Konstruktoren in Relation mit den von ihnen eingekapselten Knoten. Dabei heißt ein Knoten von einem bindenden Konstruktor **eingekapselt**, falls eine von letzterem gebundene Variable unter ersterem frei vorkommt. □

Analog zu den Konventionen oben verwenden wir C und $-\!\!\!\!C$ für C_G bzw. $-\!\!\!\!C_G$ und ebenso C_j und $-\!\!\!\!C_j$ für C_{G_j} bzw. $-\!\!\!\!C_{G_j}$.
Das folgende Bild verdeutlicht an zwei Zeichnungen desselben Graphen links die Kapselungsrelation C und rechts die Variablenfreiheit $-\!\!\!\!C$.



Offensichtlich ist $-\!\!\!\!C^{\top} \subset D^*$; aus der Dominierung der Variablenbindung folgt auch $C \subset D^+$. Später werden wir Gelegenheit haben zu fordern, daß jeder Knoten von einem ungekapselten Knoten aus erreichbar ist:

Definition 3.5.2 [←77] Ein Graph G heißt **kapselungsfrei basiert**, wenn es eine Knotenbasis (siehe Definition 3.4.9) $\beta : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}$ gibt mit $\beta C^{\top} = \mathrm{O}$. □

Eine interessante und später sehr wichtige Beobachtung ist die folgende:

Lemma 3.5.3 (Nichtzyklische Kapselung) [←32, 51, 59, 86, 88, 89, 91] Sei G ein kapselungsfrei basierter Graph. Dann ist die Kapselungsrelation nichtzyklisch, d.h. es gilt $C^+ \sqcap \mathrm{I} = \mathrm{O}$.

Beweis: Da C irreflexiv ist, brauchen wir nur C^+C zu betrachten. Sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine Folge mit $n \geq 2$ von Knoten, die zyklisch den jeweils nächsten kapseln, also für alle $1 \leq i < n$ gilt $\alpha_{i+1} \subset \alpha_i C$ und $\alpha_1 \subset \alpha_n C$, insbesondere also $\alpha_1 \neq \alpha_n$.

Sei nun β ein ungekapselter Punkt, von dem aus α_1 erreichbar ist. Da $\alpha_1 \subset \alpha_n C$, liegt eine von α_n gebundene Variable frei unter α_1, also muß jeder Pfad von β nach α_1 über α_n führen, da β sonst von letzterem gekapselt wäre. Daher ist auch α_n von β aus erreichbar.

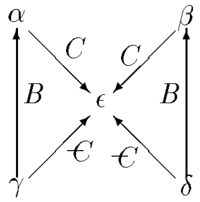
Über die Knoten α_{n-1} bis α_1 läßt sich analog weiterschließen, so daß schließlich auch jeder Pfad von β nach α_n über α_1 führen muß. Damit könnte es aber im Widerspruch zur Annahme keinen endlichen Pfad von β nach α_1 geben. □

Eine nützliche Folge hiervon ist:

Korollar 3.5.4 [←32, 42] In kapselungsfrei basierten Graphen ist C regressiv-endlich. □

Allgemein erhalten wir noch ohne große Probleme:

Lemma 3.5.5 (Totale Ordnung zwischen Kapslern) [←32, 86, 94, 120]
Wenn zwei verschiedene Knoten beide einen dritten kapseln, dann kapselt einer der beiden den anderen: $CC^{\top} \sqcap \overline{\mathrm{I}} \subset C \sqcup C^{\top}$.



Beweis: Seien $\alpha, \beta : \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{V}$ zwei Punkte mit $\alpha^{\mathsf{T}}\beta \subset CC^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{I}}$. Dann gibt es Punkte $\gamma, \delta, \epsilon : \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{V}$ mit $\epsilon \subset \alpha C \sqcap \beta C$, $\gamma \subset \alpha B^{\mathsf{T}} \sqcap \epsilon {-\!\!\!\epsilon}^{\mathsf{T}}$ und $\delta \subset \beta B^{\mathsf{T}} \sqcap \epsilon {-\!\!\!\epsilon}^{\mathsf{T}}$.

Wenn $\alpha \subset \delta {-\!\!\!\epsilon}$, dann gilt $\alpha \subset \beta C$ und damit $\alpha^{\mathsf{T}}\beta \subset C^{\mathsf{T}}$.

Andernfalls liegt β auf jedem Pfad von α nach ϵ. Wenn nun $\beta \subset \gamma {-\!\!\!\epsilon}$, dann gilt $\beta \subset \alpha C$ und damit $\alpha^{\mathsf{T}}\beta \subset C$.

Sonst liegt auch α auf jedem Pfad von β nach ϵ, und mit der Verschiedenheit von α und β erhalten wir einen Widerspruch zur in der Kapselung implizierten Existenz eines endlichen Pfades von α nach ϵ. □

Insgesamt ergibt sich aus Korollar 3.5.4 und Lemma 3.5.5:

Korollar 3.5.6 [←88] In jedem kapselungsfrei basierten Graphen G ist die transponierte Kapselungsrelation C^{T} streng normalisierend, d.h., $(C^{\mathsf{T}})^* \sqcap \overline{\mathrm{L}C}$ ist total und eindeutig. □

Schließlich definieren wir noch eine erst viel später benötigte Variante der Erreichbarkeit, die Pfade über zyklische Kapselungen ausschließt:

Definition 3.5.7 [←78] Die **kapselungsfreie Erreichbarkeit** $\Delta_G : \mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{V}$ zu einem Graphen G ist so definiert, daß für zwei Punkte $x, y : \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{V}$ genau dann $x^{\mathsf{T}}y \subset \Delta_G$ gilt, wenn es einen Pfad von x nach y gibt, auf dem kein Knoten liegt, der x kapselt:

$$\Delta_G := (\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} \sqcap \overline{C^{\mathsf{T}}\mathbb{Z}^{\mathsf{T}}})Z \qquad \square$$

Offensichtlich gilt $\Delta \subset D^*$. Aus Lemma 3.5.3 folgt $C^+ \subset \overline{C}$, so daß wir folgendes erhalten:

Lemma 3.5.8 [←89] In jedem kapselungsfrei basierten Graphen G gilt $C^+ \subset \Delta$. □

Die folgende Abschätzung der Kapselung über die Erreichbarkeit ist in kreisfreien Graphen sogar eine Gleichheit:

Lemma 3.5.9 Jeder Knoten, von dem aus ein anderer Knoten selbst zwar nicht erreichbar ist, aber eine von diesem gebundene Variable, ist von diesem anderen Knoten gekapselt: $\overline{D^*} \sqcap D^*B \subset C^{\mathsf{T}}$.

Beweis: Mit Lemma 2.2.2 und der Eindeutigkeit von B erhalten wir:

$$\overline{D^*} \sqcap D^*B = \overline{\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}\mathbb{Z}} \sqcap \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}ZB \subset \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}(\overline{\mathbb{Z}} \sqcap ZB) = \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}(\overline{\mathbb{Z}}B^{\mathsf{T}} \sqcap Z)B = {-\!\!\!\epsilon}^{\mathsf{T}}B = C^{\mathsf{T}} \qquad \square$$

Ein nützliches Hilfsmittel in zahlreichen Beweisen erhalten wir in folgender Einschränkung der Pfadrelation auf Pfade von Bindern zu von ihnen gebundenen Variablen, die keine Kreise über den Binder enthalten:

Definition 3.5.10 Die **Bindungspfadrelation** $\mathbb{B} : \mathcal{V} \times \mathcal{E}^* \leftrightarrow \mathcal{V}$ zu einem Graphen G ist definiert als

$$\mathbb{B} := \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}B^{\mathsf{T}} \sqcap Z\!\!\!/$$

Die Bindungspfadrelation wird wie die Nachfolgerfunktion auch ternär eingesetzt:

$$\mathbb{B}_m := \langle\!| \mathrm{I}, \mathrm{L}m |\!\rangle_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} \mathbb{B} = B^{\mathsf{T}} \sqcap Z\!\!\!/_m \qquad \square$$

Es gilt $B = \mathbb{B}^{\mathsf{T}}\pi$. Weiter gilt:

Lemma 3.5.11 [←33] Jeder Knoten, unter dem eine gebundene Variable frei vorkommt, liegt auf einem Bindungspfad zu dieser Variablen: ${-\!\!\!\epsilon} \sqcap B\mathrm{L} = \mathbb{B}^{\mathsf{T}}\underset{+}{Z\!\!\!/}$.

Beweis: „$\subset$“: Seien $\beta, \gamma : \mathbb{1} \to \mathcal{V}$ zwei Punkte mit $\gamma^\mathsf{T}\beta \subset \text{€} \sqcap B\mathrm{L}$, dann gilt $\gamma \subset \mathrm{L}B^\mathsf{T}$ und auch $\alpha := \gamma B$ ist ein Punkt. Sei $\{\!\!\{\beta, m\}\!\!\}$ der Zwischenpunkt von $\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}$ in $\gamma^\mathsf{T}\beta \subset \text{€} = (W\mathrm{L} \sqcap Z^\mathsf{T} \sqcap \overline{B\mathbb{Z}^\mathsf{T}})\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}$. Da α nicht auf m von β aus liegt, ist β gemäß der Dominierung der Bindungsfunktion von α aus über einen nichtleeren Pfad n erreichbar, $\beta = \alpha Z_n$, wobei o.B.d.A. $\alpha\underset{+}{\mathbb{Z}}_n \subset \overline{\alpha}$ angenommen werden kann. Dann enthält auch die Konkatenation von n mit m von α aus keinen Kreis über α, so daß damit ein Bindungspfad von α nach γ über β gefunden ist.
„$\supset$“: Seien $\beta, \gamma : \mathbb{1} \to \mathcal{V}$ zwei Punkte mit $\gamma^\mathsf{T}\beta \subset \mathbb{B}^\mathsf{T}\underset{+}{\mathbb{Z}}$ und sei $\{\!\!\{\alpha, m\}\!\!\}$ der Zwischenpunkt, so daß $\alpha = \gamma B$. Dann läßt sich m gemäß der Definition von $\underset{+}{\mathbb{Z}}$ in zwei Teilpfade n_0, n_1 zerlegen, so daß $m = \{\!\!\{n_0, n_1\}\!\!\}\underline{conc}$ und $\beta = \alpha Z_{n_0}$ und $\gamma = \beta Z_{n_1}$. Weiter gilt $\beta\mathbb{Z}_{n_1} \subset \alpha\underset{+}{\mathbb{Z}}_m \subset \overline{\alpha}$, so daß $\beta \subset \gamma\text{€}$. □

Hieraus folgt:

Lemma 3.5.12 [←40, 108] Ein Binder kapselt genau die Knoten, die auf den von ihm ausgehenden Bindungspfaden liegen: $C = \pi^\mathsf{T}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}(\mathbb{B}\mathrm{L} \sqcap \underset{+}{\mathbb{Z}})$.

Beweis: Aus $C = B^\mathsf{T}\text{€} = B^\mathsf{T}\mathbb{B}^\mathsf{T}\underset{+}{\mathbb{Z}} = \pi^\mathsf{T}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}\mathbb{B}\mathbb{B}^\mathsf{T}\underset{+}{\mathbb{Z}} = \pi^\mathsf{T}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}(\mathbb{B}\mathbb{B}^\mathsf{T} \sqcap \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}\pi^\mathsf{T}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*})\underset{+}{\mathbb{Z}}$ folgt mit Lemma 2.2.3 die Behauptung. □

Fast nur als Umformulierung erhalten wir:

Lemma 3.5.13 [←48] Alle Knoten auf einem Bindungspfad sind von dessen Ausgangspunkt gekapselt: $\mathbb{B} \subset \overline{(\underset{+}{\mathbb{Z}} \sqcap \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}\overline{C})}\mathrm{L}$.

Beweis: Es gilt: $\mathbb{B}\mathrm{L} \sqcap \underset{+}{\mathbb{Z}} = (\mathrm{I} \sqcap \mathbb{B}\mathrm{L})\underset{+}{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{B}\mathbb{B}^\mathsf{T}\underset{+}{\mathbb{Z}} \subset \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}\pi^\mathsf{T}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}\mathbb{B}\mathbb{B}^\mathsf{T}\underset{+}{\mathbb{Z}} = \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}C$. Mit Lemma 2.2.1(ii) folgt hieraus die Behauptung. □

Wir können auch für die Variablenfreiheit eine alternative Definition errechnen:

Lemma 3.5.14 [←33, 50] $\text{€} = (W\mathrm{L} \sqcap \overline{B\mathrm{L}} \sqcap D^{*\mathsf{T}}) \sqcup \mathbb{B}^\mathsf{T}\underset{+}{\mathbb{Z}}$

Beweis: Nach Lemma 3.5.11 ist nur noch $\text{€} \sqcap \overline{B\mathrm{L}} = W\mathrm{L} \sqcap \overline{B\mathrm{L}} \sqcap D^{*\mathsf{T}}$ zu zeigen:

$$\text{€} \sqcap \overline{B\mathrm{L}} = (W\mathrm{L} \sqcap Z^\mathsf{T} \sqcap \overline{B\mathbb{Z}^\mathsf{T}} \sqcap \overline{B\mathrm{L}})\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} = W\mathrm{L} \sqcap \overline{B\mathrm{L}} \sqcap Z^\mathsf{T}\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} = W\mathrm{L} \sqcap \overline{B\mathrm{L}} \sqcap D^{*\mathsf{T}} \quad \square$$

Quasi als Korrolar erhalten wir:

Lemma 3.5.15 [←82] Jede Variable, die von einem anderen Knoten aus zwar erreichbar ist, aber nicht frei unter ihm liegt, ist gebunden: $\overline{\text{€}^\mathsf{T}} \sqcap D^* \sqcap \mathrm{L}W \subset \mathrm{L}B^\mathsf{T}$

Beweis:
$$\begin{array}{rcll}
\overline{\text{€}^\mathsf{T}} \sqcap D^* \sqcap \mathrm{L}W & = & \overline{(\mathrm{L}W \sqcap \overline{\mathrm{L}B^\mathsf{T}} \sqcap D^*) \sqcup \underset{+}{\mathbb{Z}}^\mathsf{T}\mathbb{B}} \sqcap D^* \sqcap \mathrm{L}W & \text{Lemma 3.5.14} \\
 & = & \overline{\mathrm{L}W \sqcap \overline{\mathrm{L}B^\mathsf{T}} \sqcap D^*} \sqcap \overline{\underset{+}{\mathbb{Z}}^\mathsf{T}\mathbb{B}} \sqcap D^* \sqcap \mathrm{L}W & \text{De Morgan} \\
 & \subset & (\overline{\mathrm{L}W} \sqcup \mathrm{L}B^\mathsf{T} \sqcup \overline{D^*}) \sqcap D^* \sqcap \mathrm{L}W & \text{De Morgan} \\
 & \subset & \mathrm{L}B^\mathsf{T} & \square
\end{array}$$

Abschließend läßt sich noch formal herleiten, daß der Binder des Endknotens eines Pfades entweder auf diesem Pfad selbst liegt oder den Anfangsknoten kapselt:

Lemma 3.5.16 (Binder von Pfadenden) [←48] $ZB \subset \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}C^\mathsf{T} \sqcup \mathbb{Z}$

Beweis:

$$
\begin{array}{rcll}
ZB & = & Z(B \sqcap \underline{\mathit{dominates}}^{\top}) & \\
 & = & (\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} D^{*\top} \sqcup \mathbb{Z}) \sqcap ZB & \text{Lemma 3.4.8} \\
 & \subset & (\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} D^{*\top} \sqcap \overline{\mathbb{Z}} \sqcap ZB) \sqcup \mathbb{Z} & \\
 & \subset & (\overline{\mathbb{Z}} \sqcap ZB) \sqcup \mathbb{Z} & \\
 & \subset & \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} \pi^{\top}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} (\overline{\mathbb{Z}} B^{\top} \sqcap Z) B \sqcup \mathbb{Z} & \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} \text{ total, } B \text{ eind.} \\
 & \subset & \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} \pi^{\top}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} (\overline{\mathbb{Z} B^{\top}} \sqcap Z) B \sqcup \mathbb{Z} & B \text{ eind.} \\
 & = & \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} \mathrlap{-}C^{\top} B \sqcup \mathbb{Z} & B\mathrm{L} \subset W\mathrm{L}, \text{ Def. } \mathrlap{-}C \\
 & = & \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} C^{\top} \sqcup \mathbb{Z} & \text{Def. } C \qquad \square
\end{array}
$$

Kapitel 4

Identifizierungen

Entsprechend der Intuition, daß Termgraphen durch „Sharing“, d.h. durch Identifizierung gleicher Teilterme, aus Termen (eigentlich aus Termbäumen) entstehen, führen wir nun *Identifizierungen* als Äquivalenzrelationen zur Vorbereitung dieses Sharing ein, also als Relationen $R : \mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{V}$ mit $\mathrm{I} \subset R$, $R \subset R^{\mathsf{T}}$ und $RR \subset R$. Dies erspart uns vorläufig, zwischen dem identifizierten und dem nichtidentifizierten Termgraphen unterscheiden zu müssen. Anschließend stellen wir einige Eigenschaften vor und zeigen dann, daß diese Identifizierungen zusammen mit der Infimums- und Supremumsbildung von Äquivalenzrelationen auf kapselungsfrei basierten Graphen einen vollständigen Verband bilden. Damit erhalten wir einen eindeutigen Begriff von *Maximalidentifizierung*. Schließlich untersuchen wir noch die Gewinnung von *Quotientengraphen* durch Herausdividieren von Identifizierungen.

4.1 Definition und Eigenschaften

In der Definition von Identifizierungen für unsere Graphen bedürfen die Variablen besonderer Aufmerksamkeit. Das Problem, bei identifizierten Variablen verschiedener Namen einen dieser Namen auszuwählen oder gar einen neuen zu generieren, ist durch Abkehr von der Unterscheidung der Variablen durch ihre Namen gelöst, da wir uns der explizit gemachten Variablenidentität bedienen. Auf diese Weise erhalten wir ohne größere Probleme eine eindeutig bestimmte Maximalidentifizierung.

Zunächst betrachten wir das Wechselspiel zwischen Äquivalenzrelationen und Knotenmarkierung:

Lemma 4.1.1 (Markierungstreue von Äquivalenzrelationen)
Sei G ein Termgraph und R eine Äquivalenzrelation auf G. Dann gilt

$$R \subset MM^{\mathsf{T}} \quad \Leftrightarrow \quad RM = M \quad \Leftrightarrow \quad RM \subset M$$

Beweis: „$1 \Rightarrow 2$“: $RM \subset MM^{\mathsf{T}}M \subset M \subset RM$. „$3 \Rightarrow 1$“: $R = R\mathrm{I} \subset RMM^{\mathsf{T}} = MM^{\mathsf{T}}$. □

Damit können wir die Formulierung auswählen, die das Gesamtbild am einheitlichsten ausfallen läßt.

Definition 4.1.2 [←40] Eine **Identifizierung** auf einem Graphen G ist eine Äquivalenzrelation $R : \mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{V}$, die folgende Eigenschaften besitzt:

Markierungstreue:	$RM \subset M$
Nachfolgertreue:	$(R\Vert\mathrm{I})S \subset SR$
Bindungstreue:	$RB \subset BR$
Kapselrespekt:	$R \subset \overline{C}$
Variablentreue:	$RW \subset WR$
Erhaltung freier Variablen:	$R \sqcap \mathrm{L}W \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}} \subset W$
Erhaltg. der Verschiedenheit gleich gebundener Var.:	$R \sqcap BB^{\mathsf{T}} \subset W$ □

Bei Betrachtung einzelner Nachfolgerfunktionen S_i zeigt sich die Nachfolgertreue in der Form

$$\forall\, i : \mathbb{1} \to \mathcal{E} \bullet RS_i \subset S_i R \ .$$

Erhaltung freier Variablen bedeutet, daß freie, d.h. nicht gebundene Variablenknoten nur mit Knoten der gleichen Variablen identifiziert werden dürfen.

Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen bedeutet, daß innerhalb gleich gebundener Variablenknoten nur zur gleichen Variablen gehörige identifiziert werden dürfen.

Diese beiden Bedingungen zu den Variablen vermeiden hierbei die Konflikte, die in Termsprachen entsprechend bei α-Konversion auftreten. Der Kapselrespekt ist eine Hygienebedingung, die in kreisfreien Graphen trivialerweise erfüllt ist. Die übrigen Bedingungen gewährleisten, daß nur isomorphe Untergraphen identifiziert werden.

Aus der Nachfolgertreue lassen sich für die aus der Nachfolgerfunktion abgeleiteten Begriffe der Assoziierten, der Knotennachfolgerfunktion und der Pfadrelationen entsprechende Inklusionen herleiten.

Lemma 4.1.3 (Eigenschaften zur Nachfolgertreue)
Sei G ein Termgraph und R eine nachfolgertreue Äquivalenzrelation auf G. Dann gilt:

i) $RD \subset DR$, $RD^+ \subset D^+R$ und $RD^* \subset D^*R$;

ii) für die Knotennachfolgerfunktion gilt $Q^{\mathsf{T}}(\mathrm{I}\|R)Q \subset R$; damit gilt für zwei Punkte x, y : $\mathbb{1} \to \mathcal{V}$ mit $x^{\mathsf{T}}y \subset R$ insbesondere $Q_x^{\mathsf{T}}Q_y \subset R$.

Beweis:

i) $RD = R\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}S = \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}(R \underset{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}{\|} \mathrm{I})S \subset \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}SR = DR$. Die weiteren Aussagen folgen unmittelbar mit Lemma 2.2.6.

ii) über die Definition der Knotennachfolgerfunktionen:

$$Q_x^{\mathsf{T}}Q_y = S^{\mathsf{T}}{}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}\rangle\!\rangle\, x^{\mathsf{T}}\mathrm{L}, \mathrm{I}\,\rangle\!\rangle\langle\!\langle\, \mathrm{L}\,y, \mathrm{I}\,\langle\!\langle_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}\, S \subset S^{\mathsf{T}}(x^{\mathsf{T}}y \underset{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}{\|} \mathrm{I})S \subset S^{\mathsf{T}}(R \underset{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}{\|} \mathrm{I})S \subset S^{\mathsf{T}}SR \subset R$$

Lemma 4.1.4 (Identifizierungen und Pfadrelationen) [←37, 40] Für nachfolgertreue Äquivalenzrelationen R auf der Knotenmenge eines Graphen G gilt:

$$(R\|\mathrm{I})Z \subset ZR \qquad \text{und} \qquad (R\|\mathrm{I})\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}R \qquad \text{und} \qquad (R\|\mathrm{I})\underset{+}{\mathbb{Z}} \subset \underset{+}{\mathbb{Z}}R$$

Beweis: Alle Aussagen folgen mit $(R\|\mathrm{I})S \subset SR$ direkt aus Lemma 3.4.4. □

Im Zusammenspiel mit der Nachfolgerfunktion ist folgende Eigenschaft einer Identifizierung interessant:

Definition 4.1.5 Eine Identifizierung R auf G heißt **nichtzyklisch** genau dann, wenn R zu evtl. bereits vorhandenen Kreisen keine neuen einführt: $R \sqcap D^+ \subset \mathrm{I}$. □

Es läßt sich zeigen, daß auf endlichen DAGs jede Identifizierung nichtzyklisch ist, da eine zyklische Identifizierung sich entweder auf einen bereits existierenden Kreis oder auf eine unendliche periodische Kette stützen würde. Dabei kommt uns zugute, daß sich beides gleichermaßen in den Eigenschaften der Pfadfunktion zu *einem* abstrakten Pfad niederschlägt. Genauer wird der Beweis sogar für progressiv-endliche Graphen (Definition 2.3.3) geführt; doch dies sind genau die endlichen DAGs, falls die Markierungskompatibilität E jeder Knotenmarkierung nur endlich viele Kantenmarkierungen zuordnet und so über die Markierungskompatibilität der Nachfolgerfunktion endliche Verzweigung gewährleistet.

Satz 4.1.6 (Nichtzyklizität bei endlichen DAGs) [←43]
Wenn die Assoziierte eines Graphen G progressiv-endlich ist, dann ist jede nachfolgertreue Äquivalenzrelation auf G nichtzyklisch.

Beweis: Wir führen den Beweis durch Kontraposition. Angenommen, es sei R eine nachfolgertreue Äquivalenzrelation mit:

$$R \sqcap D^+ \sqcap \overline{\mathrm{I}} \neq \mathrm{O} \quad .$$

Dann gibt es analog zu Lemma 3.4.5 einen (nichtleeren) Pfad m, so daß:

$$R \sqcap Z_m \sqcap \overline{\mathrm{I}} \neq \mathrm{O} \quad .$$

Wir fassen kurz wichtige Eigenschaften von Z_m zusammen:

$$Z_m \neq \mathrm{O} \quad , \qquad Z_m^{\mathsf{T}} Z_m \subset \mathrm{I} \quad , \qquad R Z_m \subset Z_m R \quad .$$

(Letzteres folgt aus Lemma 4.1.4.) Es sei:

$$Y := R \sqcap Z_m \sqcap \overline{\mathrm{I}} \quad ,$$

dann ist auch Y, sozusagen eine Menge von durch R eingeführten m-Kreisen, eine nichtleere Funktion. Der Wertebereich von Y ist im Definitionsbereich von Z_m enthalten:

$$\mathrm{L}\, Y = \mathrm{L}\, Y^{\mathsf{T}} Y \subset \mathrm{L} Z_m^{\mathsf{T}} R \subset \mathrm{L} R Z_m^{\mathsf{T}} = \mathrm{L} Z_m^{\mathsf{T}} \tag{1}$$

Weiter gilt noch $Y Z_m = Y\, Y^{\mathsf{T}} Y Z_m \subset Y Z_m^{\mathsf{T}} R Z_m \subset Y Z_m^{\mathsf{T}} Z_m R \subset Y R$, und damit:

$$\begin{aligned} Y Z_m &= Y Z_m \sqcap Y R \underset{Y \text{ eind.}}{=} Y(Z_m \sqcap R) = Y(((Z_m \sqcap \mathrm{I}) \sqcup (Z_m \sqcap \overline{\mathrm{I}})) \sqcap R) \\ &= Y((Z_m \sqcap \mathrm{I} \sqcap R) \sqcup (Z_m \sqcap \overline{\mathrm{I}} \sqcap R)) \subset Y(\mathrm{I} \sqcup Y) = Y \sqcup Y Y \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\mathrm{L}\, Y Z_m \subset \mathrm{L}\, Y \sqcup \mathrm{L}\, Y Y \subset \mathrm{L}\, Y \sqcup \mathrm{L}\mathrm{L}\, Y = \mathrm{L}\, Y$$

Unter Verwendung von (1) erhalten wir hieraus $\mathrm{L}\, Y \subset \mathrm{L}\, Y Z_m Z_m^{\mathsf{T}} \subset \mathrm{L}\, Y Z_m^{\mathsf{T}}$. Da D progressiv-endlich ist, so mit Lemma 2.3.5 auch $Z_m \subset D^+$, und mit Lemma 2.3.4 folgt $Y = \mathrm{O}$, also $R \sqcap Z_m \sqcap \overline{\mathrm{I}} = \mathrm{O}$ im Widerspruch zu den Annahmen. □

Wir fassen einige sich aus der Definition ergebende einfache Eigenschaften bezüglich Bindung und Variablenidentität zusammen:

Lemma 4.1.7 (Einfache Eigenschaften von Identifizierungen) [←42, 62]
Sei G ein Graph und R eine Äquivalenzrelation auf G. Dann gilt

i) bei Variablentreue: $R W = W R$, $W \subset R W R$,
ii) bei Erhaltung freier Variablen und Variablentreue: $W R \sqcap \overline{\mathrm{L} B^{\mathsf{T}}} \subset W$,
iii) bei Erhaltung freier Variablen und Markierungstreue: $W R \sqcap \overline{\mathrm{L} B^{\mathsf{T}}} \subset W$,
iv) zur Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen:

$$R \sqcap B B^{\mathsf{T}} \subset W \quad \Leftrightarrow \quad R W \sqcap B B^{\mathsf{T}} \subset W \quad ,$$

v) zusätzlich bei Variablentreue: $R \sqcap B B^{\mathsf{T}} \subset W \quad \Leftrightarrow \quad R W R \sqcap B B^{\mathsf{T}} \subset W$,
vi) bei Bindungstreue, Erhaltung freier Variablen und Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen:

$$R \sqcap \mathrm{L}\, W \subset W \sqcup (R \sqcap B(R \sqcap \overline{\mathrm{I}}) B^{\mathsf{T}}) \; ,$$

vii) $W \subset R W R \sqcap \overline{B \overline{\mathrm{I}} B^{\mathsf{T}}}$; bei Variablentreue, Erhaltung freier Variablen und Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen gilt Gleichheit.

Beweis:

i) Es gilt: $W R = W^{\mathsf{T}} R^{\mathsf{T}} = (R W)^{\mathsf{T}} \subset (W R)^{\mathsf{T}} = R^{\mathsf{T}} W^{\mathsf{T}} = R W$ und damit $R W = W R$.

ii) $$\begin{aligned} WR \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}} &= WR \sqcap RW \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}} \subset WR \sqcap \mathrm{L}W \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}} \\ &= W(R \sqcap \mathrm{L}W \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}}) \subset WW \subset W \end{aligned}$$

iii) $$\begin{aligned} WR \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}} &= W(R \sqcap W\mathrm{L} \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}}) = W(R \sqcap M(v_b^{\mathsf{T}} \sqcup v_s^{\mathsf{T}})\mathrm{L} \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}}) \\ &\subset W(R \sqcap \mathrm{L}(v_b \sqcup v_s)M^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}}) \\ &\subset W(R \sqcap \mathrm{L}W \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}}) \subset WW = W \end{aligned}$$

iv) „$\Rightarrow$“ folgt aus $\mathrm{I} \sqcap \mathrm{L}B^{\mathsf{T}} \subset W \sqcap \mathrm{L}B^{\mathsf{T}}$. Für „$\Leftarrow$“ erhalten wir mit einer Modalregel:

$$RW \sqcap BB^{\mathsf{T}} \subset (R \sqcap BB^{\mathsf{T}}W^{\mathsf{T}})W \subset (R \sqcap BB^{\mathsf{T}})W \subset WW \subset W \;.$$

v) folgt aus dem letzten Punkt mit $RW = RRW = RWR$.

vi) $R \sqcap \mathrm{L}W$

$$\begin{aligned} &= R \sqcap \mathrm{L}W \sqcap (\mathrm{L}B^{\mathsf{T}} \sqcup \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}}) && \mathrm{L} = \mathrm{L}B^{\mathsf{T}} \sqcup \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}} \\ &\subset (R \sqcap \mathrm{L}B^{\mathsf{T}}) \sqcup (R \sqcap \mathrm{L}W \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}}) && \text{Distributivität} \\ &\subset (R \sqcap (RB \sqcap \mathrm{L})B^{\mathsf{T}}) \sqcup W && \text{Modalr., Erhaltg. fr. Var.} \\ &\subset (R \sqcap BRB^{\mathsf{T}}) \sqcup W && \text{einf. Bindungstreue} \\ &= (R \sqcap BB^{\mathsf{T}}) \sqcup (R \sqcap B(R \sqcap \overline{\mathrm{I}})B^{\mathsf{T}}) \sqcup W && R = \mathrm{I} \sqcup (R \sqcap \overline{\mathrm{I}}) \\ &\subset W \sqcup (R \sqcap B(R \sqcap \overline{\mathrm{I}})B^{\mathsf{T}}) && \text{EdVggV.} \end{aligned}$$

vii) Offensichtlich gilt $W \subset RWR$. Ferner gilt:

$$B\overline{\mathrm{I}}B^{\mathsf{T}} = (B\mathrm{L} \sqcap \overline{B\mathrm{I}})B^{\mathsf{T}} = B\mathrm{L} \sqcap \overline{B}B^{\mathsf{T}} = B\mathrm{L} \sqcap \mathrm{L}B^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{BB^{\mathsf{T}}}$$

Daher erhalten wir mit einer Modalregel

$$\begin{aligned} W \sqcap B\overline{\mathrm{I}}B^{\mathsf{T}} &= (W \sqcap B\mathrm{L}) \sqcap \mathrm{L}B^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{BB^{\mathsf{T}}} \subset B(B^{\mathsf{T}}W \sqcap \mathrm{L}) \sqcap \mathrm{L}B^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{BB^{\mathsf{T}}} \\ &\subset B(B^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}) \sqcap \mathrm{L}B^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{BB^{\mathsf{T}}} \subset BB^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{BB^{\mathsf{T}}} = \mathrm{O} \end{aligned}$$

Dies ergibt sofort $W \subset \overline{B\overline{\mathrm{I}}B^{\mathsf{T}}}$ und damit die erste Behauptung. Die zweite zeigt man folgendermaßen:

$RWR \sqcap \overline{B\overline{\mathrm{I}}B^{\mathsf{T}}} =$

$$\begin{aligned} &= (RWR \sqcap \overline{B\mathrm{L}}) \sqcup (RWR \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}}) \sqcup (RWR \sqcap BB^{\mathsf{T}}) && \text{de Morgan} \\ &\subset (RW \sqcap \overline{B\mathrm{L}}) \sqcup (WR \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}}) \sqcup W && \text{Vtr., (iv)} \\ &\subset W \sqcup W \sqcup W && \text{E.fr.Var., (ii)} \\ &= W \end{aligned}$$

□

Eine zentrale Eigenschaft, die sich aus dem Kapselrespekt ergibt, ist die folgende:

Lemma 4.1.8 (Erhaltung von Bindungspfaden) [←40, 43, 49, 107]

Für jede kapselrespektierende, bindungs- und nachfolgertreue Äquivalenzrelation R auf der Knotenmenge eines Graphen G gilt:

$$(R \| \mathrm{I})\mathbb{B} \subset \mathbb{B}R \;,$$

bzw. äquivalent für alle abstrakten Pfade m: $R\mathbb{B}_m \subset \mathbb{B}_m R$.

Beweis: Es seien für einen beliebigen, aber festen abstrakten Pfad m zwei Punkte $\alpha_1, \gamma_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}$ mit $\alpha_1^{\mathsf{T}}\gamma_2 \subset R\mathbb{B}_m$ gegeben, und sei $\alpha_2 := \gamma_2 B$ der entsprechende Zwischenpunkt. Für den konkreten Pfad $\{\!\!\{ \alpha_2, m \}\!\!\}$ wird also vorausgesetzt, daß er keinen Kreis über α_2 enthält.

$$\begin{tikzcd} \alpha_1 \arrow[r, leftrightarrow, "R"] \arrow[d, "Z_m"'] & \alpha_2 \arrow[d, "\mathbb{B}_m"] \\ \beta_1 \arrow[r, leftrightarrow, "R"] & \beta_2 \end{tikzcd}$$

Nun gilt $\gamma_2 \subset \alpha_1 R(Z_m \sqcap B^{\mathsf{T}}) \subset \alpha_1 Z_m R$. Sei $\gamma_1 := \alpha_1 Z_m$, so erhalten wir $\alpha_2 \subset \gamma_1 RB \subset \gamma_1 BR$. Daraus folgt $\gamma_1 B \neq \mathrm{O}$ und $\gamma_1 B \subset \alpha_1 R$. Falls $\alpha_1 \subset \gamma_1 \not{C}$, dann gilt auch $\alpha_1 \subset \gamma_1 BB^{\mathsf{T}}\not{C} = \gamma_1 BC$, und wir erhalten mit $R \sqcap C \supset B^{\mathsf{T}}\gamma_1^{\mathsf{T}}\alpha_1 \neq \mathrm{O}$ einen Widerspruch zum Kapselrespekt von R.

Falls sonst $\alpha_1 \neq \gamma_1 B$, dann liegt $\gamma_1 B$ auf jedem Pfad von α_1 nach γ_1, also auch auf $\{\!|\, \alpha_1, m \,|\!\}$. Sei $n : \mathbb{1} \to \mathcal{E}^*$ ein abstrakter Pfad mit $n^{\mathsf{T}}m \subset \underline{\mathit{prefix}}$ und $\alpha_1 Z_n = \gamma_1 B$, also ein Präfix von m, über das $\gamma_1 B$ von α_1 aus zu erreichen ist. Dann gilt

$$\alpha_2 \subset \gamma_1 BR = \alpha_1 Z_n R \subset \alpha_2 R Z_n R \subset \alpha_2 Z_n RR = \alpha_2 Z_n R \ .$$

Nach den bisherigen Annahmen gilt $\underline{\mathit{empty}} \neq n \neq m$ und $\alpha_2 \neq \alpha_2 Z_n$ und damit auch $\alpha_2 Z_n \subset \alpha_2(C \sqcap R)$, was einen Widerspruch zum Kapselrespekt ergibt.

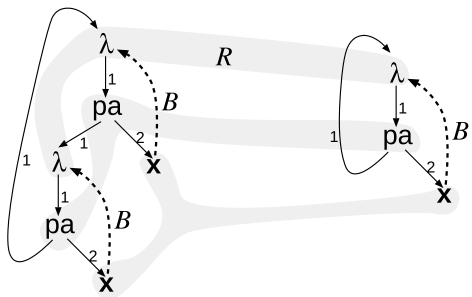
Damit bleibt nur $\alpha_1 = \gamma_1 B$, und $\alpha_1^{\mathsf{T}}\gamma_2 \subset \mathbb{B}_m R$ ist gezeigt.

Angenommen, $\gamma_1 \subset \overline{\alpha_1 Ȥ_m}$, dann muß es einen abstrakten Pfad $n : \mathbb{1} \to \mathcal{E}^*$ geben mit $n \neq \underline{\mathit{empty}}$, $n^{\mathsf{T}}m \subset \underline{\mathit{prefix}}$ und $\alpha_1 Z_n = \alpha_1$, also ein nichtleeres Präfix von m, über das α_1 von α_1 aus zu erreichen ist. Auch hier erhalten wir wieder

$$\alpha_2 \subset \alpha_1 R = \alpha_1 Z_n R \subset \alpha_2 R Z_n R \subset \alpha_2 Z_n RR = \alpha_2 Z_n R$$

und damit auch $\alpha_2 Z_n \subset \alpha_2(C \sqcap R)$, was einen Widerspruch zum Kapselrespekt ergibt. Also gilt $\gamma_1 \subset \alpha_1 Ȥ_m$ und damit die gesamte Behauptung. □

Ohne die Einschränkung von Z auf $Ȥ$ in der Definition von $\mathbb{B}$ erhielten wir trotz Kapselrespekts im folgenden Beispiel keine Erhaltung des Bindungspfades $\langle 1, 1, 1, 2 \rangle$:

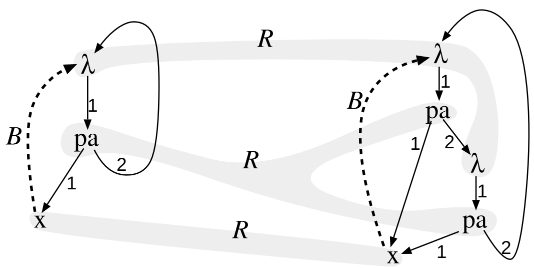


Über die Erhaltung der Bindungspfade kann man zeigen, daß bei der Bindungstreue aufgrund des Kapselrespektes im Endeffekt Gleichheit herrscht:

Lemma 4.1.9 (Bindungstreue kapselrespektierender Äquivalenzrelationen) Sei G ein Graph und R eine kapselrespektierende nachfolger- und bindungstreue Äquivalenzrelation auf G. Dann gilt auch $BR \subset RB$.

Beweis: $BR = \mathbb{B}^{\mathsf{T}}\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}R = \mathbb{B}^{\mathsf{T}}(R\|\mathrm{I})\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} \ \subset \ R\mathbb{B}^{\mathsf{T}}\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} \ \subset \ RB$ □

Ohne Kapselrespekt lassen sich leicht Gegenbeispiele angeben, wie in der im folgenden Bild dargestellten Situation (der Graph ist sogar kapselungsfrei basiert):



Es würde auch der rechte Untergraph allein genügen; der linke dient hauptsächlich zur Illustration des identifizierten Ergebnisses.

Aus der Erhaltung von Bindungspfaden läßt sich noch Kommutativität von Identifizierungen mit den Kapselungsrelationen gewinnen:

Lemma 4.1.10 (Identifizierungen und Kapselung) [←42, 82, 108] Für jede Identifizierung R auf einem Graphen G gilt $R\text{€}^{\mathsf{T}} \subset \text{€}^{\mathsf{T}} R$ und $RC = CR$.

Beweis: Seien zwei Punkte $\alpha_1, \gamma_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}$ gegeben mit $\alpha_1^{\mathsf{T}}\gamma_2 \subset R\text{€}^{\mathsf{T}}$. Sei weiter $\alpha_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}$ ein Zwischenpunkt, also mit $\alpha_2 \subset \alpha_1 R$ und $\gamma_2 \subset \alpha_2 \text{€}^{\mathsf{T}}$, und sei m ein abstrakter Pfad, so daß $\gamma_2 = \alpha_2 Z_m$ und $\alpha_2 \mathbb{Z}_m \sqcap \gamma_2 B = \mathrm{O}$. Dann gilt $\gamma_2 \subset \alpha_1 R Z_m \subset \alpha_1 Z_m R$. Sei $\gamma_1 := \alpha_1 Z_m$. Falls $\alpha_1 \mathbb{Z}_m \sqcap \gamma_1 B \neq \mathrm{O}$, dann wähle man abstrakte Pfade n_1, n_2, so daß ihre Konkatenation m ergibt und $\gamma_1 B = \alpha_1 Z_{n_1}$ und $\gamma_1 = \gamma_1 B \not{Z}_{n_2}$. Dann gilt $\alpha_2 Z_{n_1} \subset \alpha_1 R Z_{n_1} \subset \alpha_1 Z_{n_1} R \subset \gamma_1 B R$ und mit Lemma 4.1.8 erhalten wir: $\gamma_1 \subset \alpha_2 Z_{n_1} R(\not{Z}_{n_2} \sqcap B^{\mathsf{T}}) = \alpha_2 Z_{n_1} R \mathbb{B}_{n_2} \subset \alpha_2 Z_{n_1} \mathbb{B}_{n_2} R \subset (\alpha_2 Z_{n_1} \sqcap \gamma_2 B)\mathrm{L}$, was im Widerspruch mit der Annahme $\alpha_2 \mathbb{Z}_m \sqcap \gamma_2 B = \mathrm{O}$ steht.

Damit ist $R\text{€}^{\mathsf{T}} \subset \text{€}^{\mathsf{T}} R$ bewiesen, und es folgt problemlos: $RC^{\mathsf{T}} = R\text{€}^{\mathsf{T}} B \subset \text{€}^{\mathsf{T}} R B \subset \text{€}^{\mathsf{T}} B R = C^{\mathsf{T}} R$.

Schließlich gilt noch:

$$
\begin{array}{rcll}
RC & = & R\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}(\mathbb{B}\mathrm{L} \sqcap \underset{+}{\mathbb{Z}}) & \text{Lemma 3.5.12} \\
& = & \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}(R\|\mathrm{I})(\mathbb{B}\mathrm{L} \sqcap \underset{+}{\mathbb{Z}}) & (\|) \\
& \subset & \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}((R\|\mathrm{I})\mathbb{B}\mathrm{L} \sqcap (R\|\mathrm{I})\underset{+}{\mathbb{Z}}) & \sqcap\text{-Subdistributivität} \\
& \subset & \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}(\mathbb{B}R\mathrm{L} \sqcap \underset{+}{\mathbb{Z}}R) & \text{Lemma 4.1.8, 4.1.4} \\
& = & \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}(\mathbb{B}\mathrm{L} \sqcap \underset{+}{\mathbb{Z}})R & R\mathrm{L} = \mathrm{L}\text{, Lemma 2.1.12} \\
& = & CR &
\end{array}
$$

□

Die fehlende Inklusion „$R\text{€} \subset \text{€}R$“ kann ungültig sein, wenn verschiedene Knoten einer freien Variablen nicht identifizierte Vorgänger haben.

Immerhin ließe sich eine entsprechende Einschränkung beweisen:

Behauptung 4.1.11 Auf gebundene und individuelle freie Variable eingeschränkt gilt die Subkommutativität einer Identifizierung R über die Variablenfreiheit:

$$\overline{(W \sqcap \overline{B\mathrm{L}} \sqcap \overline{\mathrm{I}})\mathrm{L}} \sqcap R\text{€} \subset \text{€}R$$

□

Der folgende Hilfssatz stellt noch eine alternative Formulierung der Erhaltung freier Variablen zur Verfügung, so daß wir uns damit später den Beweis eines wichtigen Satzes erleichtern:

Lemma 4.1.12 (Erhaltung freier Variablen) [←41]
Die Bedingung zur Erhaltung freier Variablen in der Definition der Identifizierungen kann gleichwertig durch folgende ersetzt werden: Freie Variablenknoten dürfen nur mit anderen Knoten der gleichen Variablen in einer Klasse sein:

$$\overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}W \sqcap R \subset \overline{B\mathrm{L}} \sqcap W\mathrm{L} \sqcap W$$

Beweis: Zum Erhalt freier Variablen zeigen wir zunächst, daß die neue Bedingung aus der in Definition 4.1.2 folgt; dabei hilft uns Lemma 3.2.7:

$$\overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}W \sqcap R \subset \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}W \sqcap W \subset \overline{B\mathrm{L}} \sqcap W\mathrm{L} \sqcap W$$

Der Beweis der Gegenrichtung ist trivial. □

4.2 Verbandseigenschaften

Um von Maximalidentifizierung sprechen zu können, benötigen wir zunächst eine Ordnung auf der Menge der Identifizierungen zu einem Graphen. Diese ist offensichtlich durch die relationale Inklusion ($\_ \subset \_$) gegeben und entspricht der Hintereinanderausführbarkeit von Identifizierungen (nach Elimination eines Quotienten).

Insbesondere haben wir ohne weiteres für zwei vergleichbare Identifizierungen $R_1 \subset R_2$ auf demselben Graphen:

$$R_2 \text{ nichtzyklisch} \quad \Rightarrow \quad R_1 \text{ nichtzyklisch}$$

Wir werden aber statt der Inklusionsordnung zunächst die auf Äquivalenzen bekannten Verbandsoperationen der Infimumsbildung $\_ \wedge \_$ und Supremumsbildung $\_ \vee \_$ betrachten (siehe Definition 2.4.2).

Mit Hilfe der Lemmata in Abschnitt 2.4 übertragen sich die meisten Identifizierungseigenschaften problemlos auf Infimum und Supremum:

Lemma 4.2.1 (Eigenschaften von Infimum und Supremum) [←43]
Seien $\mathcal{R}$ eine Menge von Äquivalenzrelationen auf der Knotenmenge eines Graphen G. Dann besitzen $\bigvee \mathcal{R}$ und, falls $\mathcal{R}$ nichtleer ist, auch $\bigwedge \mathcal{R}$ alle Identifizierungseigenschaften, abgesehen evtl. von Variablentreue beim Infimum und Kapselrespekt und Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen beim Supremum.

Beweis: Wir zeigen nacheinander die Identifizierungseigenschaften:

Markierungstreue: für das Infimum erhalten wir direkt:

$$(\bigwedge \mathcal{R})M = (\bigsqcap \mathcal{R})M \subset \bigsqcap \{R : \mathcal{R} \bullet RM\} \subset \bigsqcap \{R : \mathcal{R} \bullet M\} = M \;;$$

für das Supremum gilt die Markierungstrue bei leerem $\mathcal{R}$ wegen $\mathrm{I}M = M$; bei nichtleerem $\mathcal{R}$ folgt aus $(\bigsqcup \mathcal{R})M = \bigsqcup \{R : \mathcal{R} \bullet RM\} \subset \bigsqcup \{R : \mathcal{R} \bullet M\} = M = M\mathrm{I}$ mit Lemma 2.2.6 $(\bigvee \mathcal{R})M = (\bigsqcup \mathcal{R})^* M \subset M\mathrm{I}^* = M$.

Nachfolgertreue: Da für jedes $i : \mathbb{1} \to \mathcal{E}$ die Nachfolgerfunktion S_i eindeutig ist, sind Lemma 2.4.3 und Lemma 2.4.4 anwendbar und sowohl Infimum als auch Supremum sind nachfolgertreu.

Bindungstreue folgt für Infimum mit der Eindeutigkeit von B aus Lemma 2.4.4 und für Supremum aus Lemma 2.4.3.

Kapselrespekt des Infimums: $\bigwedge \mathcal{R} = \bigsqcap \{R : \mathcal{R} \bullet R\} \subset \bigsqcap \{R : \mathcal{R} \bullet \overline{C}\} = \overline{C}$

Variablentreue des Supremums folgt wieder aus Lemma 2.4.3.

Erhaltung freier Variablen folgt für Infimum und Supremum mittels Lemma 4.1.12 aus Lemma 2.4.5.

Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen des Infimums:

$$(\bigwedge \mathcal{R}) \sqcap B^{\mathsf{T}}B = (\bigsqcap \mathcal{R}) \sqcap B^{\mathsf{T}}B = \bigsqcap \{R : \mathcal{R} \bullet R \sqcap B^{\mathsf{T}}B\} \subset \bigsqcap \{R : \mathcal{R} \bullet W\} = W \quad \square$$

Die verbliebenen Lücken zu schließen erfordert jeweils einen etwas höheren Aufwand.

Lemma 4.2.2 (Variablentreue des Infimums) [←43]
Das Infimum $\bigwedge \mathcal{R}$ einer nichtleeren Menge $\mathcal{R}$ von Identifizierungen ist variablentreu.

Beweis: Wir zeigen die Variablentreue getrennt für freie und gebundene Variable:

$$(\bigwedge \mathcal{R})\, W \sqcap \overline{BL} = ((\bigwedge \mathcal{R}) \sqcap \overline{BL})\, W = \bigsqcap \{R : \mathcal{R} \bullet R \sqcap \overline{BL}\}\, W \subset \bigsqcap \{R : \mathcal{R} \bullet W\}\, W = W$$

Sei R_0 ein beliebiges Element von $\mathcal{R}$; dann gilt $\bigwedge\mathcal{R} \subset R_0$. Weiter erhalten wir:

$$\begin{array}{rcl}
(\bigwedge\mathcal{R})\,W \sqcap B\mathrm{L} & = & ((\bigwedge\mathcal{R}) \sqcap B(\bigwedge\mathcal{R})B^{\mathsf{T}})\,W \\
& \subset & \quad \langle \text{Subdistr. der Mult., } WB = B \rangle \\
& & (\bigwedge\mathcal{R})\,W \sqcap B(\bigwedge\mathcal{R})B^{\mathsf{T}} \\
& \subset & \quad \langle \text{Kapselrespekt, Nachfolger- und Bindungstreue des Infimums} \rangle \\
& & (\bigwedge\mathcal{R})\,W \sqcap BB^{\mathsf{T}}(\bigwedge\mathcal{R}) \\
& \subset & \quad \langle \text{Modalregel} \rangle \\
& & ((\bigwedge\mathcal{R})\,W(\bigwedge\mathcal{R}) \sqcap BB^{\mathsf{T}})(\bigwedge\mathcal{R}) \\
& \subset & \quad \langle \bigwedge\mathcal{R} \subset R_0 \rangle \\
& & (R_0 W R_0 \sqcap BB^{\mathsf{T}})(\bigwedge\mathcal{R}) \\
& \subset & \quad \langle \text{Lemma 4.1.7 (v)} \rangle \\
& & W(\bigwedge\mathcal{R})
\end{array}$$

□

Lemma 4.2.3 (Kapselrespekt und EdVggV des Supremums) [←43, 118]
Das Supremum einer nichtleeren Menge $\mathcal{R}$ von Identifizierungen auf einem kapselungsfrei basierten Graphen G ist kapselrespektierend und erhält die Verschiedenheit gleich gebundener Variablen.

Beweis: Für $w = \langle R_1, \ldots, R_n \rangle \in \mathcal{R}^*$ sei $\mathcal{R}_w$ das entsprechende Produkt, also $\mathcal{R}_w := R_1 \cdots R_n$. Wir zeigen, daß für alle $w \in \mathcal{R}^*$ gilt:

i) $C\mathcal{R}_w \subset \mathcal{R}_w C$

ii) $\mathcal{R}_w \subset \overline{C}$

iii) $(\mathcal{R}_w \| \mathrm{I})\mathbb{B} \subset \mathbb{B}\mathcal{R}_w$

iv) $\mathcal{R}_w \sqcap BB^{\mathsf{T}} \subset W$

Für den leeren Pfad gilt $\mathcal{R}_{\langle\rangle} = \mathrm{I}$ und alle vier Aussagen sind trivialerweise wahr. Wir nehmen nun an, daß alle Aussagen für ein beliebiges $w \in \mathcal{R}^*$ gelten; sei $R \in \mathcal{R}$.

i)
$$\begin{array}{rcll}
C\mathcal{R}_{R:w} & = & CR\mathcal{R}_w & \\
& \subset & RC\mathcal{R}_w & \text{Lemma 4.1.10} \\
& \subset & R\mathcal{R}_w C & \text{Annahme i)} \\
& = & \mathcal{R}_{R:w} &
\end{array}$$

ii)
$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{L}(C \sqcap \mathcal{R}_{R:w}) & \subset & \mathrm{L}R(\mathcal{R}_w \sqcap RC) & \text{Modalregel} \\
& \subset & \mathrm{L}(R \sqcap \mathcal{R}_w C^{\mathsf{T}})C & \text{Modalregel} \\
& \subset & \mathrm{L}(R \sqcap C^{\mathsf{T}}\mathcal{R}_w)C & \text{Annahme i)} \\
& \subset & \mathrm{L}C^{\mathsf{T}}(\mathcal{R}_w \sqcap CR)C & \text{Modalregel} \\
& \subset & \mathrm{L}(\mathcal{R}_w \sqcap RC)C & \text{Lemma 4.1.10} \\
& \subset & \mathrm{L}R(C \sqcap R\mathcal{R}_w)C & \text{Modalregel} \\
& \subset & \mathrm{L}(C \sqcap \mathcal{R}_{R:w})C &
\end{array}$$

Mit Lemma 2.3.4 folgt hieraus und aus der regressiven Endlichkeit von C (Korollar 3.5.4) $\mathrm{L}(C \sqcap \mathcal{R}_{R:w}) = \mathrm{O}$ und damit $\mathcal{R}_{R:w} \subset \overline{C}$.

iii)
$$\begin{aligned}(\mathcal{R}_{R:w}\|\mathrm{I})\mathbb{B} &= (R\|\mathrm{I})(\mathcal{R}_w\|\mathrm{I})\mathbb{B} & \\ &\subset (R\|\mathrm{I})\mathbb{B}\mathcal{R}_w & \text{Annahme iii)}\\ &\subset \mathbb{B}R\mathcal{R}_w & \text{Lemma 4.1.8}\\ &= \mathbb{B}\mathcal{R}_{R:w}\end{aligned}$$

iv) Zu zeigen ist $\mathcal{R}_{R:w} \sqcap BB^{\mathsf{T}} \subset W$. Seien $\alpha, \beta : \mathbb{1} \to \mathcal{V}$ zwei beliebige Punkte mit $\alpha^{\mathsf{T}}\beta \subset R\mathcal{R}_w \sqcap BB^{\mathsf{T}}$, und sei $\gamma : \mathbb{1} \to \mathcal{V}$ ein Zwischenpunkt mit $\gamma \subset \alpha R \sqcap \beta\mathcal{R}_w$. Dann gilt

$$\gamma B \subset \alpha RB \sqcap \beta\mathcal{R}_w B \subset \alpha BR \sqcap \beta B\mathcal{R}_w = \alpha BR \sqcap \alpha B\mathcal{R}_w = \alpha B(R \sqcap \mathcal{R}_w)$$

Für einen geeigeneten abstrakten Pfad m gilt mit Annahme iii) und Lemma 4.1.8 weiter $\gamma = \gamma B\mathbb{B}_m \subset \alpha B(R \sqcap \mathcal{R}_w)\mathbb{B}_m \subset \alpha B\mathbb{B}_m(R \sqcap \mathcal{R}_w)$. Für $\delta := \alpha B\mathbb{B}_m$ erhalten wir aus der Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen von R die Abschätzung $\alpha^{\mathsf{T}}\delta \subset R \sqcap BB^{\mathsf{T}} \subset W$, und aus Annahme iv) erhalten wir $\delta^{\mathsf{T}}\beta \subset \mathcal{R}_w \sqcap BB^{\mathsf{T}} \subset W$. Insgesamt ergibt sich damit $\alpha^{\mathsf{T}}\beta{=}\alpha^{\mathsf{T}}\delta\delta^{\mathsf{T}}\beta \subset WW = W$. Da α und β beliebig gewählt waren, gilt $\mathcal{R}_{R:w} \sqcap BB^{\mathsf{T}} \subset W$.

Durch Induktion über den Aufbau der Elemente von $\mathcal{R}^*$ sind damit i), ii), iii) und iv) von oben für alle $w \in \mathcal{R}^*$ bewiesen. Da $\bigvee \mathcal{R} = \bigsqcup\{w : \mathcal{R}^* \bullet \mathcal{R}_w\}$, erhalten wir aus ii) direkt den Kapselrespekt und aus iv) ohne weitere Probleme die Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen. □

Damit ergibt sich unmittelbar:

Satz 4.2.4 (Verband der Identifizierungen) Die Menge der Identifizierungen auf einem festen kapselungsfrei basierten Graphen zusammen mit den Operationen $(\_ \wedge \_)$ und $(\_ \vee \_)$ ist ein vollständiger Unterverband des Verbandes der Äquivalenzrelationen und hat daher ein größtes Element, die **Maximalidentifizierung**.

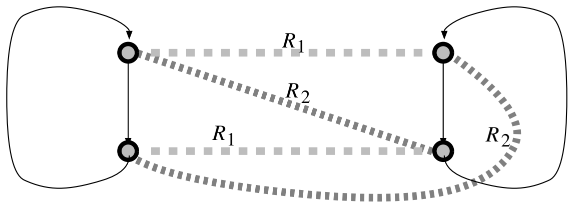
Beweis: Die Abgeschlossenheit der Verbandsoperationen der Äquivalenzrelationen auf $\mathcal{V}$ in der Menge der Identifizierungen auf G ist mit Lemma 4.2.1, 4.2.2 und 4.2.3 bewiesen — das Supremum der leeren Menge von Identifizierungen ist die Identität und damit trivialerweise wieder eine Identifizierung. □

Ähnliche Resultate in der Literatur, z.B. in [BS92], beziehen sich immer nur auf Termgraphen ohne Variablenbindung und -identität. Wie wir gesehen haben, bereiten gerade diese Komponenten jedoch die größten Schwierigkeiten.

Mit zwei nichtzyklischen Identifizierungen R_1 und R_2 ist offensichtlich auch ihr Infimum $R_1 \wedge R_2$ nichtzyklisch:

$$(R_1 \wedge R_2) \sqcap (D^+ \sqcap \bar{\mathrm{I}}) = (R_1 \sqcap (D^+ \sqcap \bar{\mathrm{I}})) \sqcap (R_2 \sqcap (D^+ \sqcap \bar{\mathrm{I}})) = \mathrm{O} \sqcap \mathrm{O} = \mathrm{O}$$

Bei nicht progressiv-endlichem D hingegen braucht das Supremum zweier nichtzyklischer Identifizierungen nicht wieder nichtzyklisch zu sein, wie schon der folgende vierknotige Graph zeigt:



Auf einem festen endlichen DAG allerdings erhält man mit Satz 4.1.6 einen vollständigen Verband nichtzyklischer Identifizierungen.

Wir führen nun einen Begriff ein, der dazu dient, zu kennzeichnen, wann zwei Untergraphen identifiziert werden können, also *gleichwertig* sind, und zwar eingeschränkt auf den Fall, daß beide Untergraphen von jeweils einem Knoten induziert werden:

Definition 4.2.5 [←102] In einem Graphen G heißen zwei Knoten (Punkte) $a, b : \mathbb{1} \to \mathcal{V}$ **gleichwertig**, in Zeichen $a \underset{G}{\equiv} b$, wenn beide von genau den gleichen Konstruktoren eingekapselt werden, also $aC^{\scriptscriptstyle\mathsf{T}} = bC^{\scriptscriptstyle\mathsf{T}}$, und wenn es eine Identifizierung R mit $a \subset bR$ gibt, die also a und b identifiziert. □

Im Falle eines DAGs heißt dies im wesentlichen, daß die von den beiden Knoten a und b ausgehenden Unter-WurzelDAGs bis auf Identifizierung gleich sind und die in ihnen frei vorkommenden Variablen jeweils paarweise identisch sind. Wenn man die Kapselungsbedingung wegließe, wären u.a. auch die gebundenen Variablen gleichwertiger Bindungskonstrukte (z.B. λ-Abstraktionen) gleichwertig, was offensichtlich falsch ist, da diese Variablen allein nicht identifizierbar sind.

Daß dieser Begriff wirklich bedeutet, daß genau die von zwei gleichwertigen Knoten induzierten Untergraphen identifiziert werden können, weisen wir in Abschnitt 8.4 formal unter Rückgriff auf Korrespondenzen nach.

Nebenbei sei bemerkt, daß in Bäumen Gleichwertigkeit im wesentlichen Isomorphie von Unterbäumen bedeutet, während in maximalidentifizierten Graphen Gleichwertigkeit nur für identische Knoten gilt.

4.3 Quotientengraphen

Es stellt sich natürlich die Frage, ob sich eine Identifizierung auch aus einem Graphen herausdividieren läßt (auf Mengen verwenden wir $A/_R$ für die Quotientenmenge von A bzgl. der Äquivalenzrelation R, und die natürliche Projektion schreiben wir χ_R). Wir definieren eine naheliegende Quotientenbildung. Es stellt sich heraus, daß vor allem der Nachweis der Dominierung der Variablenbindung erheblichen Aufwand erfordert.

Wir können jedoch zeigen, daß schon Quotientenbildung von Graphen mit *Kongruenzen*, die nicht alle Identifizierungseigenschaften besitzen, wieder Graphen liefert, aber z.B. Kommutativität der Projektionen mit der Kapselung nur durch Identifizierungen gewährleistet wird. Der Übergang von einem Graphen zum entsprechenden maximalidentifizierten Graphen ist damit recht einfach.

Definition 4.3.1 (Graphquotient) [←46] Sei $G = (\mathcal{V}, M, S, D, B, W)$ ein Graph, R eine Äquivalenzrelation auf G und $\chi := \chi_R$. Dann ist

$$G/_R = (\mathcal{V}_R, M_R, S_R, D_R, B_R, W_R)$$

der *Graphquotient* von G durch R, wobei

$$\mathcal{V}_R := \mathcal{V}/_R \qquad S_R := (\chi^{\scriptscriptstyle\mathsf{T}} \| \mathrm{I})S\chi \qquad B_R := \chi^{\scriptscriptstyle\mathsf{T}} B\chi$$
$$M_R := \chi^{\scriptscriptstyle\mathsf{T}} M \qquad D_R := \chi^{\scriptscriptstyle\mathsf{T}} D\chi \qquad W_R := \chi^{\scriptscriptstyle\mathsf{T}} W\chi$$
□

Vor dem Beweis der Wohldefiniertheit dieser identifizierten Graphen zeigen wir erst einige Hilfssätze, die uns dabei helfen werden. Zunächst erhalten wir ohne Probleme Verträglichkeit der Projektion mit den Graphkomponenten:

Lemma 4.3.2 (Eigenschaften der Projektion) [←45–48, 50, 62, 82]
Sei G ein Graph, R eine Äquivalenzrelation auf G und $G_R = G/_R$ der Graphquotient. Dann gilt ($\chi := \chi_R$):

i) bei Markierungstreue: $\chi M_R = M$
ii) bei Nachfolgertreue: $(\chi\|\mathrm{I})S_R = S\chi$ und $(\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})S \subset S_R\chi^{\mathsf{T}}$
iii) bei Nachfolgertreue: $\chi S_{R,i} = S_i\chi$ und $\chi^{\mathsf{T}} S_i \subset S_{R,i}\chi^{\mathsf{T}}$
iv) bei Nachfolgertreue: $\chi D_R = D\chi$ und $\chi^{\mathsf{T}} D \subset D_R\chi^{\mathsf{T}}$
v) bei Bindungstreue: $\chi B_R \subset B\chi$ und $\chi B_R^{\mathsf{T}} \supset B^{\mathsf{T}}\chi$
vi) bei strikter Bindungstreue ($BR \subset RB$): $\chi B_R \supset B\chi$ und $\chi B_R^{\mathsf{T}} \subset B^{\mathsf{T}}\chi$
vii) bei Variablentreue: $\chi W_R = W\chi$.

Beweis:
i) $\chi M_R = \chi\chi^{\mathsf{T}} M = RM = M$
ii) Es gilt $S\chi \subset (R\|\mathrm{I})S\chi = (\chi\|\mathrm{I})(\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})S\chi = (\chi\|\mathrm{I})S_R$ und mit diesen Gleichheiten auch die Gegenrichtung $(\chi\|\mathrm{I})S_R = (R\|\mathrm{I})S\chi \subset SR\chi = S\chi$. Die zweite Aussage ergibt sich direkt: $(\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})S = (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})(R\|\mathrm{I})S \subset (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})SR = (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})S\chi\chi^{\mathsf{T}} = S_R\chi^{\mathsf{T}}$.
iii) $S_i\chi \subset RS_i\chi = \chi\chi^{\mathsf{T}} S_i\chi = \chi S_{R,i} = RS_i\chi \subset S_iR\chi = S_i\chi$, bzw.
$\chi^{\mathsf{T}} S_i = \chi^{\mathsf{T}} RS_i \subset \chi^{\mathsf{T}} S_iR = \chi^{\mathsf{T}} S_i\chi\chi^{\mathsf{T}} = S_{R,i}\chi^{\mathsf{T}}$
iv) $D\chi \subset RD\chi = \chi\chi^{\mathsf{T}} D\chi = \chi D_R = RD\chi \subset DR\chi = D\chi$, bzw.
$\chi^{\mathsf{T}} D \subset \chi^{\mathsf{T}} DR = \chi^{\mathsf{T}} D\chi\chi^{\mathsf{T}} = D_R\chi^{\mathsf{T}}$
v) $\chi B_R = \chi\chi_R^{\mathsf{T}} B\chi = RB\chi \subset BR\chi = B\chi$ und
$\chi B_R^{\mathsf{T}} = \chi\chi_R^{\mathsf{T}} B^{\mathsf{T}}\chi = RB^{\mathsf{T}}\chi \supset B^{\mathsf{T}} R\chi = B^{\mathsf{T}}\chi$
vi) analog zur Bindungstreue
vii) $\chi W_R = \chi\chi_R^{\mathsf{T}} W\chi = RW\chi = WR\chi = W\chi$ □

Diese Eigenschaften machen offensichtlich, daß man eine Identifizierungsprojektion auch als *Überlagerung* auffassen kann.[1]

Die Aussagen von oben über die Assoziierte lassen sich auch auf ihre transitive Hülle übertragen:

Lemma 4.3.3 (Erreichbarkeit) [←47, 50, 51] Sei G ein Termgraph, R eine nachfolgertreue Äquivalenzrelation auf G und $\chi = \chi_R$. Dann gilt:

$$\chi D_R^+ = D^+\chi \ , \quad \chi D_R^* = D^*\chi \ , \quad D_R^+ = \chi^{\mathsf{T}} D^+\chi \ , \quad D_R^* = \chi^{\mathsf{T}} D^*\chi \ .$$

Beweis: Aus Lemma 4.3.2 und Lemma 2.2.6 erhalten wir sofort die beiden ersten Aussagen. Daraus erhalten wir weiter: $D_R^+ = D_R D_R^* = \chi^{\mathsf{T}} D\chi D_R^* = \chi^{\mathsf{T}} DD^*\chi = \chi^{\mathsf{T}} D^+\chi$ und $D_R^* = D_R^+ \sqcup \mathrm{I} = \chi^{\mathsf{T}} D^+\chi \sqcup \chi^{\mathsf{T}}\chi = \chi^{\mathsf{T}}(D^+ \sqcup \mathrm{I})\chi = \chi^{\mathsf{T}} D^*\chi$. □

Sogar für eine eingeschränkte Assoziierte können wir eine entsprechende Aussage zeigen:

Lemma 4.3.4 (Erreichbarkeit—eingeschränkt)
Sei G ein Termgraph, R eine nachfolgertreue Äquivalenzrelation auf G, $A : \mathcal{V}_R \leftrightarrow \mathcal{V}_R$ eine beliebige Knotenrelation im identifizierten Graphen und $\chi := \chi_R$. Dann gilt:

$$(D_R^{\mathsf{T}} \sqcap A)^*\chi^{\mathsf{T}} = \chi^{\mathsf{T}}(D^{\mathsf{T}} \sqcap \chi A\chi^{\mathsf{T}})^* \ .$$

Beweis: Zunächst gilt:
$$\begin{aligned}(D_R^{\mathsf{T}} \sqcap A)\chi^{\mathsf{T}} &= D_R^{\mathsf{T}}\chi^{\mathsf{T}} \sqcap A\chi^{\mathsf{T}} && \chi \text{ eindeutig}\\ &= (\chi^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}} \sqcap A\chi^{\mathsf{T}}) && \text{Nachfolgertreue}\\ &= \chi^{\mathsf{T}}(D^{\mathsf{T}} \sqcap \chi A\chi^{\mathsf{T}}) && \chi \text{ eindeutig}\end{aligned}$$

Mit Lemma 2.2.6 folgt hieraus die Behauptung. □

[1] Hierbei ist jedoch nicht der vereinfachte sich nur auf die Assoziierte stützende Überlagerungsbegriff z.B. aus [SS89] zu verwenden, sondern ein die Kanten berücksichtigender, wie z.B. in [Sch76, Sch77]. Als Kantenmenge ist $\mathcal{V} \times \mathcal{E}$ zu verwenden, und wir erhalten partielle Graphen.

Aus $(\chi\|\mathrm{I})S_R = S\chi$ und $(\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})S \subset S_R\chi^{\mathsf{T}}$ und $(\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})(\chi\|\mathrm{I}) = (\chi^{\mathsf{T}}\chi\|\mathrm{I}) = \mathrm{I}$ folgt mit Lemma 3.4.4 direkt:

Lemma 4.3.5 (Projektion und Pfadrelationen) [←48–51]

$$\begin{array}{lll}
(\chi\|\mathrm{I})Z_R = Z\chi & Z_R = (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})Z\chi & (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})Z \subset Z_R\chi^{\mathsf{T}} \\
(\chi\|\mathrm{I})\mathbb{Z}_R = \mathbb{Z}\chi & \mathbb{Z}_R = (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})\mathbb{Z}\chi & (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_R\chi^{\mathsf{T}} \\
(\chi\|\mathrm{I})\not{\mathbb{Z}}_R = \not{\mathbb{Z}}\chi & \not{\mathbb{Z}}_R = (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})\not{\mathbb{Z}}\chi & (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})\not{\mathbb{Z}} \subset \not{\mathbb{Z}}_R\chi^{\mathsf{T}}
\end{array} \qquad \square$$

Auch die freien Variablen gehen direkt ineinander über:

Lemma 4.3.6 (Freie Variable im identifizierten Graphen) Sei G ein Graph, R eine Äquivalenzrelation auf G und $G_R = G/_R$ der mit R identifizierte Graph. Dann gilt bei Bindungstreue von R: $\overline{\mathrm{L}B_R} \sqcap \mathrm{L}\,W_R \supset (\overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}\,W)\chi_R$; bei strikter Bindungstreue ($BR \subset RB$) gilt „$\subset$".

Beweis: Unter Ausnutzung der Eindeutigkeit von $\chi := \chi_R$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{L}B_R^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}\,W_R &= \overline{\mathrm{L}\chi^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}\chi} \sqcap \mathrm{L}\chi^{\mathsf{T}}W\chi \;=\; (\overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}\chi}\chi^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}\,W)\chi \\
&= (\mathrm{L}\chi^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}\chi\chi^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}\,W)\chi \;=\; (\mathrm{L} \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}R} \sqcap \mathrm{L}\,W)\chi \\
&\supset / \subset \; (\overline{\mathrm{L}RB^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}\,W)\chi \;=\; (\overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}\,W)\chi
\end{aligned} \qquad \square$$

Sogar falls die in Frage kommende Äquivalenzrelation nur einen gewissen Teil der Identifizierungsbedingungen erfüllt, sind wir in der Lage, die Wohldefiniertheit des identifizierten Graphen zu beweisen. Diese Bedingungen fassen wir in der folgenden Definition zusammen:

Definition 4.3.7 Eine **Kongruenz** ist eine Äquivalenzrelation auf der Knotenmenge eines Graphen, die folgende vier Eigenschaften besitzt: Nachfolgertreue, Markierungstreue, Bindungstreue und Variablentreue. □

Damit können wir nun zeigen, daß der in Definition 4.3.1 eingeführte Graphquotient ein wohldefinierter Graph ist:

Satz 4.3.8 (Quotientenbildung mit Kongruenz) [←51, 62] Sei G ein Graph und R eine Kongruenz auf G. Dann ist $G_R := G/_R$ ein Graph nach Definition 3.2.1, der **Quotientengraph**.

Beweis: Sei zunächst $\chi := \chi_R$. Unter Verwendung von Lemma 4.3.2 erhalten wir:

- Eigenschaften der Markierungsfunktion:
  - Eindeutigkeit: $M_R^{\mathsf{T}}M_R = M^{\mathsf{T}}\chi M_R = M^{\mathsf{T}}M \subset \mathrm{I}$
  - Totalität: $M_R\mathrm{L} = \chi^{\mathsf{T}}M\mathrm{L} = \chi^{\mathsf{T}}\mathrm{L} = \mathrm{L}$
- Eigenschaften der Nachfolgerfunktion:
  - Eindeutigkeit: $S_R^{\mathsf{T}}S_R = \chi^{\mathsf{T}}S^{\mathsf{T}}(\chi\|\mathrm{I})S_R = \chi^{\mathsf{T}}S^{\mathsf{T}}S\chi \subset \chi^{\mathsf{T}}\chi = \mathrm{I}$
  - Markierungskompatibilität:

$$\begin{aligned}
M_R E &= \chi^{\mathsf{T}}ME = \chi^{\mathsf{T}}\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}(S\mathrm{L} \sqcap \rho_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}) = \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}}(\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})(S\mathrm{L} \sqcap \rho_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}) \\
&= \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}}((\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})S\chi\mathrm{L} \sqcap \rho_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}}) = \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}}(S_R\mathrm{L} \sqcap \rho_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}})
\end{aligned}$$

- Eigenschaften der Assoziierten:

$$\chi^{\mathsf{T}}D\chi = \chi^{\mathsf{T}}\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}S\chi = \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}}(\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})S\chi = \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}}S_R = D_R \qquad \square$$

- Eigenschaften der Bindungsfunktion:
  - Eindeutigkeit: $B_R^{\mathsf{T}} B_R = \chi^{\mathsf{T}} B^{\mathsf{T}} \chi B_R = \chi^{\mathsf{T}} B^{\mathsf{T}} B \chi \subset \chi^{\mathsf{T}} \chi = \mathrm{I}$
  - Nur auf Variablen definiert: $\mathrm{L} B_R^{\mathsf{T}} = \mathrm{L} \chi^{\mathsf{T}} B^{\mathsf{T}} \chi = \mathrm{L} B^{\mathsf{T}} \chi \subset \mathrm{L} v_b M^{\mathsf{T}} \chi = \mathrm{L} v_b M_R^{\mathsf{T}}$
  - Nur konstante Konstruktoren als Werte:
$$\mathrm{L} B_R = \mathrm{L} \chi^{\mathsf{T}} B \chi = \mathrm{L} B \chi \subset \mathrm{L} k M^{\mathsf{T}} \chi = \mathrm{L} k M_R^{\mathsf{T}}$$
  - Erreichbarkeit: mit Hilfe von Lemma 4.3.3: $B_R^{\mathsf{T}} = \chi^{\mathsf{T}} B^{\mathsf{T}} \chi \subset \chi^{\mathsf{T}} D^{+} \chi = D_R^{+}$
  - Dominierung: Für alle $n : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_R$ mit $n \subset \mathrm{L} B_R$ gilt:

$$\begin{array}{lll}
\multicolumn{2}{l}{n B_R^{\mathsf{T}} (D_R^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L} n})^*} & \\
= & n B_R^{\mathsf{T}} \chi^{\mathsf{T}} (D^{\mathsf{T}} \sqcap \chi \overline{\mathrm{L} n} \chi^{\mathsf{T}})^* \chi & \\
\subset & n \chi^{\mathsf{T}} B^{\mathsf{T}} (D^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L} n \chi^{\mathsf{T}}})^* \chi & \text{Lemma 4.3.2} \\
= & \bigsqcup \{ p : \mathbb{1} \to \mathcal{V} \mid p \subset n \chi^{\mathsf{T}} \quad \bullet\, p B^{\mathsf{T}} (D^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L} n \chi^{\mathsf{T}}})^* \chi \} & \\
= & \bigsqcup \{ p : \mathbb{1} \to \mathcal{V} \mid p \subset n \chi^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L} B \bullet p B^{\mathsf{T}} (D^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L} n \chi^{\mathsf{T}}})^* \chi \} & p \subset \overline{\mathrm{L} B} \Rightarrow p B^{\mathsf{T}} = \mathrm{O} \\
\subset & \bigsqcup \{ p : \mathbb{1} \to \mathcal{V} \mid p \subset n \chi^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L} B \bullet p B^{\mathsf{T}} (D^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L} p})^* \chi \} & \overline{\mathrm{L} n \chi^{\mathsf{T}}} \subset \overline{\mathrm{L} p} \\
\subset & \bigsqcup \{ p : \mathbb{1} \to \mathcal{V} \mid p \subset n \chi^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L} B \bullet p D^{+} \chi \} & \text{Kapselung in } G \\
\subset & n \chi^{\mathsf{T}} D^{+} \chi & \\
= & n D_R^{+} &
\end{array}$$

- Eigenschaften der Variablenidentität:
  - Reflexivität: $W_R^{\mathsf{T}} = \chi^{\mathsf{T}} W^{\mathsf{T}} \chi \subset \chi^{\mathsf{T}} W \chi = W_R$
  - Transitivität: $W_R W_R = \chi^{\mathsf{T}} W \chi W_R = \chi^{\mathsf{T}} W W \chi \subset \chi^{\mathsf{T}} W \chi = W_R$
  - Genau auf Variablen definiert:
$$\mathrm{L} W_R \;=\; \mathrm{L} \chi^{\mathsf{T}} W \chi \;=\; \mathrm{L} W \chi \;=\; \mathrm{L}(v_b \sqcup v_s) M^{\mathsf{T}} \chi \;=\; \mathrm{L}(v_b \sqcup v_s) M_R^{\mathsf{T}}$$
  - Markierungstreue: $W_R M_R = \chi^{\mathsf{T}} W \chi M_R = \chi^{\mathsf{T}} W M \subset \chi^{\mathsf{T}} M = M_R$
  - Bindungstreue: $W_R B_R = \chi^{\mathsf{T}} W \chi B_R \subset \chi^{\mathsf{T}} W B \chi \subset \chi^{\mathsf{T}} B \chi = B_R$ $\square$

Nur für Identifizierungen hingegen lassen sich weitergehende Eigenschaften beweisen, die schließlich auch Vertauschbarkeit der Projektion mit der Kapselung beinhalten.

Lemma 4.3.9 (Bindungspfade im Quotienten) [←48]
Wenn R eine Identifizierung auf G ist, gilt $\mathbb{B}_R \subset (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})\mathbb{B}\chi$.

Beweis:

$$\begin{array}{lcll}
\mathbb{B}_R & = & \pi_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*} B_R^{\mathsf{T}} \sqcap \mathcal{Z}_R & \\
& = & \pi_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*} B_R^{\mathsf{T}} \sqcap Z_R \sqcap \overline{(\not\mathbb{Z}_R \sqcap \pi_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*})\mathrm{L}} & \\
& = & \pi_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*} B_R^{\mathsf{T}} \sqcap (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})Z\chi \sqcap \overline{((\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})\not\mathbb{Z}\chi \sqcap \pi_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*})\mathrm{L}} & \\
& \subset & (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})((\chi\|\mathrm{I})\pi_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*} B_R^{\mathsf{T}}\chi^{\mathsf{T}} \sqcap Z \sqcap (\chi\|\mathrm{I})\overline{(\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})(\not\mathbb{Z}\chi \sqcap \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}\chi)\mathrm{L}})\chi & \\
& \subset & (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})(\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}\chi\chi^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}} \sqcap Z \sqcap \overline{(\not\mathbb{Z}\chi \sqcap \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}\chi)\mathrm{L}})\chi & \text{Bindungstreue } R \\
& \subset & (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})(\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}RB^{\mathsf{T}} \sqcap Z \sqcap \overline{(\not\mathbb{Z} \sqcap \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}R)\mathrm{L}})\chi & \text{Lemma 4.3.2} \\
& \subset & (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})((\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}R \sqcap ZB)B^{\mathsf{T}} \sqcap Z \sqcap \overline{(\not\mathbb{Z} \sqcap \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}R)\mathrm{L}})\chi & \text{Modalregel} \\
& \subset & (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})((\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}R \sqcap (\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}C^{\mathsf{T}} \sqcup \mathbb{Z}))B^{\mathsf{T}} \sqcap Z \sqcap \overline{(\not\mathbb{Z} \sqcap \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}R)\mathrm{L}})\chi & \text{Lemma 3.5.16} \\
& \subset & (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})((\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}R \sqcap \mathbb{Z})B^{\mathsf{T}} \sqcap Z \sqcap \overline{(\not\mathbb{Z} \sqcap \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}R)\mathrm{L}})\chi & \text{Kapselrespekt } R \\
& \subset & (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})((\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}R \sqcap \mathbb{Z} \sqcap \overline{(\not\mathbb{Z} \sqcap \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}R)\mathrm{L}})B^{\mathsf{T}} \sqcap \mathcal{Z})\chi & \text{Definition } \mathcal{Z} \\
& = & (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})(\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}B^{\mathsf{T}} \sqcap \mathcal{Z})\chi & \\
& = & (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})\mathbb{B}\chi & \text{Definition } \mathbb{B} \quad \square
\end{array}$$

Lemma 4.3.10 (Vertauschbarkeit mit Bindungspfaden) [←48–50]
Wenn R eine Identifizierung auf G ist, gilt $(\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_R\chi^{\mathsf{T}}$.

Beweis:

$$\begin{array}{lcll}
(\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})\mathbb{B} & = & (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})(\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}B^{\mathsf{T}} \sqcap \mathcal{Z} \sqcap \overline{(\not\mathbb{Z} \sqcap \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}\overline{C})\mathrm{L}}) & \text{Lemma 3.5.13} \\
& \subset & \pi_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*}\chi^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}} \sqcap (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})(\mathcal{Z} \sqcap \overline{(\not\mathbb{Z} \sqcap \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}R)\mathrm{L}}) & \text{Kapselrespekt } R \\
& = & \pi_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*}B_R^{\mathsf{T}}\chi^{\mathsf{T}} \sqcap (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})(Z \sqcap \overline{(\not\mathbb{Z} \sqcap \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*})\mathrm{L}} \sqcap \overline{(\not\mathbb{Z} \sqcap \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}R)\mathrm{L}}) & \\
& = & \pi_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*}B_R^{\mathsf{T}}\chi^{\mathsf{T}} \sqcap (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})(Z \sqcap \overline{(\not\mathbb{Z} \sqcap \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}R)\mathrm{L}}) & \\
& = & \pi_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*}B_R^{\mathsf{T}}\chi^{\mathsf{T}} \sqcap (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})Z \sqcap (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})\overline{(\not\mathbb{Z} \sqcap \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}\chi\chi^{\mathsf{T}})\chi\mathrm{L}} & \\
& \subset & \pi_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*}B_R^{\mathsf{T}}\chi^{\mathsf{T}} \sqcap Z_R\chi^{\mathsf{T}} \sqcap (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})\overline{(\not\mathbb{Z}\chi \sqcap \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}\chi)\mathrm{L}} & \text{Lemma 4.3.5} \\
& \subset & (\pi_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*}B_R^{\mathsf{T}} \sqcap Z_R \sqcap (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})\overline{((\chi\|\mathrm{I})\not\mathbb{Z} \sqcap (\chi\|\mathrm{I})\pi_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*})\mathrm{L}})\chi^{\mathsf{T}} & \text{Lemma 4.3.5} \\
& = & (\pi_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*}B_R^{\mathsf{T}} \sqcap Z_R \sqcap (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})\overline{(\chi\|\mathrm{I})(\not\mathbb{Z} \sqcap \pi_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*})\mathrm{L}})\chi^{\mathsf{T}} & \\
& = & (\pi_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*}B_R^{\mathsf{T}} \sqcap Z_R \sqcap \overline{(\not\mathbb{Z} \sqcap \pi_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*})\mathrm{L}})\chi^{\mathsf{T}} & \\
& = & (\pi_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*}B_R^{\mathsf{T}} \sqcap \mathcal{Z}_R)\chi^{\mathsf{T}} & \\
& = & \mathbb{B}_R\chi^{\mathsf{T}} &
\end{array}$$

$\square$

Lemma 4.3.11 (Bindungspfade und Quotienten) [←49, 50]
Wenn R eine Identifizierung auf G ist, gilt $\mathbb{B}_R = (\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})\mathbb{B}\chi$ und $\mathbb{B}\chi = (\chi\|\mathrm{I})\mathbb{B}_R$.

Beweis: Aus Lemma 4.3.10 ergibt sich $(\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})\mathbb{B}\chi \subset \mathbb{B}_R\chi^{\mathsf{T}}\chi = \mathbb{B}_R$; die Gegenrichtung ist in Lemma 4.3.9 gezeigt. Weiter erhalten wir:

$$\mathbb{B}\chi \subset (\chi\|\mathrm{I})(\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})\mathbb{B}\chi = (\chi\|\mathrm{I})\mathbb{B}_R = (\chi\|\mathrm{I})(\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})\mathbb{B}\chi = (R\|\mathrm{I})\mathbb{B}\chi \subset \mathbb{B}R\chi = \mathbb{B}\chi \qquad \square$$

Damit läßt sich nun die Vertauschbarkeit der Projektion mit der Kapselung zeigen:

Lemma 4.3.12 (Vertauschbarkeit mit der Kapselung) [←50, 51, 108] Sei G ein Graph und R eine kapselrespektierende nachfolger- und bindungstreue Äquivalenzrelation auf G. Für den mit R identifizierten Graphen $G_R := G/_R$ gilt ($\chi := \chi_R$):

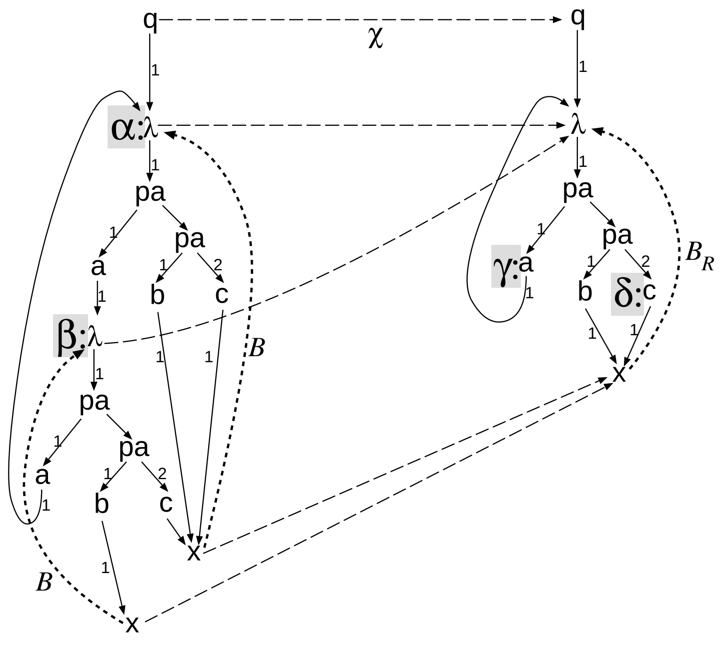
$$C\chi = \chi\, C_R \;, \qquad \chi^{\mathsf{T}} C = C_R \chi^{\mathsf{T}} \qquad \text{und} \qquad C_R = \chi^{\mathsf{T}} C \chi$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{array}{rcll}
C\chi & = & \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}(\mathbb{B}\mathrm{L} \sqcap \underset{+}{\mathbb{Z}})\chi & \\
& = & \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}(\mathbb{B}\mathrm{L} \sqcap (\chi\|\mathrm{I})\underset{+}{\mathbb{Z}}_R) & \text{Lemma 4.3.5} \\
& \subset & \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}(\chi\|\mathrm{I})((\chi^{\mathsf{T}}\|\mathrm{I})\mathbb{B}\mathrm{L} \sqcap \underset{+}{\mathbb{Z}}_R) & \text{Modalregel} \\
& \subset & \chi\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*}(\mathbb{B}_R\chi^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \underset{+}{\mathbb{Z}}_R) & \text{Lemma 4.3.10} \\
& = & \chi\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*}(\mathbb{B}_R\mathrm{L} \sqcap \underset{+}{\mathbb{Z}}_R) & \\
& = & \chi\, C_R & \\
& = & \chi\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*}(\mathbb{B}_R\mathrm{L} \sqcap \underset{+}{\mathbb{Z}}_R) & \\
& = & \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}(\chi\|\mathrm{I})(\mathbb{B}_R\mathrm{L} \sqcap \underset{+}{\mathbb{Z}}_R) & \\
& = & \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}((\chi\|\mathrm{I})\mathbb{B}_R\mathrm{L} \sqcap (\chi\|\mathrm{I})\underset{+}{\mathbb{Z}}_R) & \chi \text{ eindeutig} \\
& \subset & \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}(\mathbb{B}\chi\mathrm{L} \sqcap \underset{+}{\mathbb{Z}}\chi) & \text{Lemma 4.3.11, 4.1.8} \\
& = & \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}(\mathbb{B}\mathrm{L} \sqcap \underset{+}{\mathbb{Z}})\chi & \\
& = & C\chi\;. &
\end{array}$$

Daraus erhalten wir zunächst $\chi^{\mathsf{T}}C = \chi^{\mathsf{T}}RC = \chi^{\mathsf{T}}CR = \chi^{\mathsf{T}}C\chi\chi^{\mathsf{T}} = \chi^{\mathsf{T}}\chi\, C_R\chi^{\mathsf{T}} = C_R\chi^{\mathsf{T}}$ und schließlich auch $C_R = C_R\chi^{\mathsf{T}}\chi = \chi^{\mathsf{T}}C\chi$. □

Folgendes Bild zeigt an einer nicht kapselrespektierenden Äquivalenzrelation, daß ohne Kapselrespekt weder $C\chi \subset \chi\, C_R$ noch $C\chi \supset \chi\, C_R$ zu gelten braucht:



Für die hervorgehobenen Punkte gilt $\alpha^{\mathsf{T}}\gamma \subset \overline{\chi\, C_R} \sqcap C\chi$ und $\beta^{\mathsf{T}}\delta \subset \chi\, C_R \sqcap \overline{C\chi}$. Auch die Erhaltung von Bindungspfaden (Lemma 4.1.8) bricht hier zusammen.

Schließlich gilt noch die Vertauschbarkeit der Projektion mit der Variablenfreiheit:

Lemma 4.3.13 (Vertauschbarkeit mit der Variablenfreiheit) [←82] Sei G ein Graph und R eine kapselrespektierende nachfolger- und bindungstreue Äquivalenzrelation auf G. Für den mit R identifizierten Graphen $G_R := G/_R$ gilt (sei $\chi := \chi_R$):

$$\not{C}\chi \subset \chi\not{C}_R\ , \qquad \not{C}_R\chi^\top = \chi^\top\not{C} \qquad \text{und} \qquad \not{C}_R = \chi^\top\not{C}\chi$$

Beweis:

$$\begin{array}{rcll}
\not{C}\chi & = & (W\mathrm{L} \sqcap \overline{B\mathrm{L}} \sqcap D^*\chi) \sqcup \mathbb{B}^\top\underset{+}{\mathbb{Z}}\chi & \\
 & = & (W\chi\mathrm{L} \sqcap \overline{B\chi\mathrm{L}} \sqcap \chi D_R^*) \sqcup \mathbb{B}^\top(\|\mathrm{I})\chi\underset{+}{\mathbb{Z}} & \text{Lemma 4.3.3, 4.3.5} \\
 & \subset & (\chi W_R\mathrm{L} \sqcap \overline{\chi B_R\mathrm{L}} \sqcap \chi D_R^*) \sqcup \chi\mathbb{B}^\top_R\underset{+}{\mathbb{Z}} & \text{Lemma 4.3.10} \\
 & = & \chi((W_R\mathrm{L} \sqcap \overline{B_R\mathrm{L}} \sqcap D_R^*) \sqcup \mathbb{B}^\top_R\underset{+}{\mathbb{Z}}) & \\
 & = & \chi\not{C}_R &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
\not{C}_R\chi^\top & = & (W_R\mathrm{L} \sqcap Z_R^\top \sqcap \overline{B_R\mathbb{Z}^\top_R})\pi_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*}\chi^\top & \\
 & = & (W_R\mathrm{L} \sqcap \chi^\top Z^\top(\chi\|\mathrm{I}) \sqcap \overline{\chi^\top B\chi\chi^\top\mathbb{Z}^\top(\chi\|\mathrm{I})})(\chi^\top\|\mathrm{I})\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} & \\
 & \subset & (W_R\mathrm{L} \sqcap \chi^\top Z^\top(\chi\|\mathrm{I})(\chi^\top\|\mathrm{I}) \sqcap \overline{\chi^\top BR\mathbb{Z}^\top(\chi\|\mathrm{I})}(\chi^\top\|\mathrm{I}))\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} & \chi \text{ eindeutig} \\
 & \subset & (W_R\mathrm{L} \sqcap \chi^\top Z^\top(R\|\mathrm{I}) \sqcap \overline{\chi^\top BR\mathbb{Z}^\top(\chi\|\mathrm{I})(\chi^\top\|\mathrm{I})})\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} & \chi \text{ eindeutig} \\
 & \subset & (W_R\mathrm{L} \sqcap \chi^\top RZ^\top \sqcap \overline{\chi^\top BR\mathbb{Z}^\top(R\|\mathrm{I})})\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} & \\
 & \subset & (W_R\mathrm{L} \sqcap \chi^\top Z^\top \sqcap \overline{\chi^\top B\mathbb{Z}^\top(R\|\mathrm{I})(R\|\mathrm{I})})\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} & \text{Lemma 4.3.5} \\
 & \subset & (W_R\mathrm{L} \sqcap \chi^\top(Z^\top \sqcap \chi\overline{\chi^\top B\mathbb{Z}^\top(RR\|\mathrm{I})}))\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} & \chi \text{ eindeutig} \\
 & \subset & \chi^\top(\chi W_R\mathrm{L} \sqcap Z^\top \sqcap \overline{\chi\chi^\top B\mathbb{Z}^\top(R\|\mathrm{I})})\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} & \chi \text{ eindeutig, } RR \subset R \\
 & \subset & \chi^\top(W\mathrm{L} \sqcap Z^\top \sqcap \overline{B\mathbb{Z}^\top})\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} & \mathrm{I} \subset R \\
 & = & \chi^\top\not{C} & \text{Definition } \not{C} \\
 & = & \chi^\top(W\mathrm{L} \sqcap \overline{B\mathrm{L}} \sqcap D^{*\top}) \sqcup \chi^\top\mathbb{B}^\top\underset{+}{\mathbb{Z}} & \text{Lemma 3.5.14} \\
 & \subset & \chi^\top(W\chi\mathrm{L} \sqcap \overline{B\chi\mathrm{L}} \sqcap D^{*\top}) \sqcup \mathbb{B}^\top_R(\chi^\top\|\mathrm{I})\underset{+}{\mathbb{Z}} & \text{Lemma 4.3.11} \\
 & \subset & \chi^\top(\chi W_R\mathrm{L} \sqcap \overline{\chi B_R\mathrm{L}} \sqcap D^{*\top}) \sqcup \mathbb{B}^\top_R(\chi^\top\|\mathrm{I})\underset{+}{\mathbb{Z}} & \text{Lemma 4.3.2} \\
 & \subset & \chi^\top(\chi(W_R\mathrm{L} \sqcap \overline{B_R\mathrm{L}}) \sqcap D^{*\top}) \sqcup \mathbb{B}^\top_R\underset{+}{\mathbb{Z}}_R\chi^\top & \text{Lemma 4.3.5} \\
 & \subset & (W_R\mathrm{L} \sqcap \overline{B_R\mathrm{L}} \sqcap \chi^\top D^{*\top}) \sqcup \mathbb{B}^\top_R\underset{+}{\mathbb{Z}}_R\chi^\top & \chi \text{ eindeutig} \\
 & = & (W_R\mathrm{L} \sqcap \overline{B_R\mathrm{L}} \sqcap D_R^{*\top}\chi^\top) \sqcup \mathbb{B}^\top_R\underset{+}{\mathbb{Z}}_R\chi^\top & \text{Lemma 4.3.3} \\
 & = & ((W_R\mathrm{L} \sqcap \overline{B_R\mathrm{L}} \sqcap D_R^{*\top}) \sqcup \mathbb{B}^\top_R\underset{+}{\mathbb{Z}}_R)\chi^\top & \\
 & = & \not{C}_R\chi^\top &
\end{array}$$

Daraus folgt weiter: $\not{C}_R = \not{C}_R\chi^\top\chi = \chi^\top\not{C}\chi$. □

Lemma 4.3.14 (Quotientengraph kapselungsfrei basiert) [←51] Für eine Identifizierung R auf einem kapselungsfrei basierten Graphen G ist auch der Quotient $G_R := G/_R$ kapselungsfrei basiert.

Beweis: Sei β eine kapselungsfreie Basis von G, also insbesondere mit $\beta \subset \overline{\mathrm{L}C}$ und $\beta D^* = \mathrm{L}$. Dann gilt für ihr Bild unter der natürlichen Projektion χ zu R unter Hinzuziehung von Lemma 4.3.12:

$$\beta\chi \sqcap \mathrm{L}C_R \subset (\beta \sqcap \mathrm{L}\chi^\top C)\chi = (\beta \sqcap \mathrm{L}C)\chi = \mathrm{O}\ .$$

Für die Erreichbarkeit erhalten wir mit Lemma 4.3.3: $\beta\chi D_R^* = \beta D^*\chi = \mathrm{L}\chi = \mathrm{L}$. Damit ist in $\beta\chi$ eine kapselungsfreie Basis enthalten. $\square$

Lemma 4.3.15 (Vertauschbarkeit mit der kapselungsfreien Erreichbarkeit) [←82]
Wenn R eine Identifizierung auf G ist, gilt $\chi\Delta_R \subset \Delta\chi$

Beweis:

$$\begin{array}{rcll}
\chi\Delta_R & = & \chi(\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*} \sqcap \overline{C^{\mathsf{T}}_R\mathbb{Z}^{\mathsf{T}}_R})Z_R & \\
& = & (\chi\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}_R\times\mathcal{E}^*} \sqcap \overline{\chi\, C^{\mathsf{T}}_R\mathbb{Z}^{\mathsf{T}}_R})Z_R & \chi \text{ eindeutig} \\
& = & (\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}(\chi\|\mathrm{I}) \sqcap \overline{C^{\mathsf{T}}\chi\,\mathbb{Z}^{\mathsf{T}}_R})Z_R & \text{Lemma 4.3.12} \\
& \subset & (\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}(\chi\|\mathrm{I}) \sqcap \overline{C^{\mathsf{T}}\mathbb{Z}^{\mathsf{T}}(\chi\|\mathrm{I})})Z_R & \text{Lemma 4.3.5} \\
& \subset & (\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} \sqcap \overline{C^{\mathsf{T}}\mathbb{Z}^{\mathsf{T}}})(\chi\|\mathrm{I})Z_R & \text{Lemma 2.2.2} \\
& = & (\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} \sqcap \overline{C^{\mathsf{T}}\mathbb{Z}^{\mathsf{T}}})Z\chi & \text{Lemma 4.3.5} \\
& = & \Delta\chi & \square
\end{array}$$

Auf dem Umweg über den Qotientengraphen läßt sich sehr elegant eine Verschärfung der Bedingung des Kapselrespektes beweisen:

Lemma 4.3.16 (Verschärfung des Kapselrespektes)
Für jede Identifizierung R auf einem kapselungsfrei basierten Graphen G gilt $R \subset \overline{C^+}$.

Beweis: Wegen Satz 4.3.8, Lemma 4.3.14 und 3.5.3 ist auch im Quotientengraphen die Kapselung kreisfrei und wir erhalten mit Lemma 4.3.12, 2.2.6:

$$R \sqcap C^+ = \chi\chi^{\mathsf{T}} \sqcap C^+ \subset (\chi \sqcap C^+\chi)\chi^{\mathsf{T}} = (\chi \sqcap \chi\, C_R^+)\chi^{\mathsf{T}} = \chi(\mathrm{I} \sqcap C_R^+)\chi^{\mathsf{T}} = \mathrm{O} \qquad \square$$

Kapitel 5

Intervalle und Abschnitte

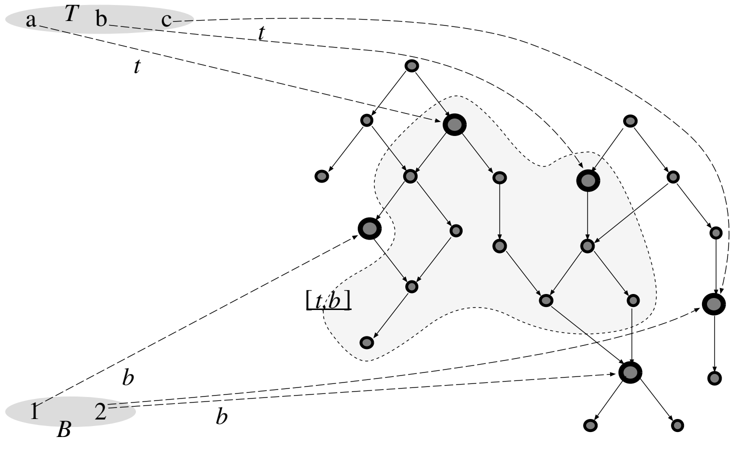
Bevor wir uns mit Homomorphiebegriffen für unsere Termgraphen beschäftigen, führen wir Konzepte ein, die nützlich für die Betrachtung der Bilder von Metavariablen sein werden. Das Bild einer nullstelligen Metavariablen könnte zwar als Untergraph betrachtet werden, da wir aber auch Metavariable mit Nachfolgern betrachten, ist ein solches Verfahren nicht mehr möglich — das Bild solcher Metavariablen ist auch von „unten" zu begrenzen.

In Abschnitt 5.1 führen als als Konzeptionalisierung der nötigen Begrenzung von „oben" *und* „unten" *Intervalle* ein, und in Abschnitt 5.2 beschäftigen wir uns mit Wechselwirkungen des *Inneren* von Intervallen mit der Variablenbindung — sich in dieser Beziehung besonders wohlverhaltende Intervalle nennen wir *Graphausschnitte*.

In der Gegenwart von Kreisen wird das Zusammenspiel von Intervallinnerem und Kapselung noch einmal komplizierter; in Abschnitt 5.3 führen wir *Abschnitte* als entsprechend modifizierte Variante des Intervallbegriffs ein.

5.1 Intervalle

Wir führen Intervalle als Paare von Relationen ein. Diese Relationen haben jeweils den Knotenbereich $\mathcal{V}$ des in Frage kommenden Graphen G als Zielbereich; die — möglicherweise sogar verschiedenen — Ausgangsbereiche $\mathcal{T}$ und $\mathcal{B}$ bleiben freigestellt. Die erste der beiden Relationen eines Intervalls entspricht der *oberen Grenze*, die zweite der *unteren Grenze*, wobei die Nachfolgerrelation D wie bisher schon in den Beispielen als von oben nach unten gerichtet aufgefaßt wird. Die Ausgangsbereiche der Grenzen bewirken eine Indizierung, die für manche Zwecke nützlich sein wird.



Bei der Frage, welche Knoten *innerhalb* eines gegebenen Intervalles liegen, gehen wir von denen der oberen Grenze aus, soweit sie nicht selbst auf der unteren Grenze liegen. Knoten, die auf einem nicht über die untere Grenze führenden Pfad von jenen aus erreichbar sind, gelten als innerhalb des Intervalles gelegen. Die untere Grenze bleibt vollständig ausgeschlossen.

Definition 5.1.1 Ein **Intervall** auf einem Graphen G ist ein $[t, b]$ notiertes Paar von Relationen $t : \mathcal{T} \leftrightarrow \mathcal{V}$ und $b : \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{V}$. $[t, b]$ heißt auch das *Intervall von t bis b (in G)*.

Als Variable für Intervalle werden wir Kleinbuchstaben der folgenden Form verwenden: $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}, \mathsf{e}, \ldots$ Für ein Intervall $\mathsf{a} = [t, b]$ heißt $t_{\mathsf{a}} := t$ *obere Grenze von* a, $b_{\mathsf{a}} := b$ *untere*

Grenze von $\mathfrak{a}$ und die Relation

$$\underline{\mathfrak{a}} = \underline{[t, b]} = t\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}(Z \sqcap \overline{\mathbb{Z}\, b^{\mathsf{T}}}\mathrm{L}) = (t \sqcap \overline{\mathrm{L}_{\mathcal{T},\mathcal{B}} b})(D \sqcap \overline{\mathrm{L}_{\mathcal{V},\mathcal{B}} b})^* \ ,$$

die den Elementen der oberen Grenze die von ihnen aus erreichbaren „inneren“ Knoten zwischen $\mathrm{L}t$ einschließlich und $\mathrm{L}b$ ausschließlich zuordnet, heißt die **Zugangsrelation** zu $\mathfrak{a}$. $\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$ heißt der *Intervallvektor* zu $\mathfrak{a}$. □

Hierbei ist zu beachten, daß nur über *endliche* Pfade von der oberen Grenze aus erreichbare Knoten in den Intervallvektor aufgenommen werden. Wir nennen ein Intervall $\mathfrak{a}$ *leer*, falls $\underline{\mathfrak{a}} = \mathrm{O}$.

Interessant ist auch, ob die Knoten der unteren Grenze vom Intervallinneren aus erreichbar sind:

Definition 5.1.2 Ein Intervall $\mathfrak{a} = [t, b]$ heißt **kohärent**, wenn die untere Grenze nirgends „abgelöst“ ist, d.h. $\mathrm{L}b \subset \mathrm{L}t \sqcup \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}D$. $\mathfrak{a}$ heißt **halbkohärent**, wenn $\mathrm{L}b \subset \mathrm{L}tD^*$, also wenn die gesamte untere Grenze von der oberen aus erreichbar ist. □

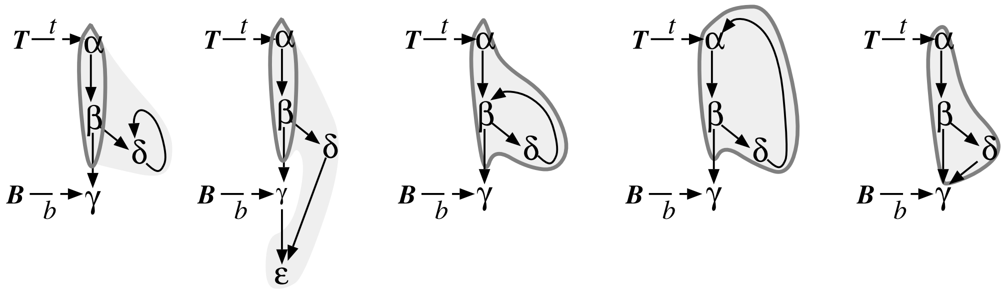
Kohärente Intervalle sind insbesondere auch halbkohärent.

Da ohnehin gilt $\mathrm{L}(t\sqcup\underline{\mathfrak{a}}D)\sqcap\overline{\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}} \subset \mathrm{L}b \subset \overline{\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}}$, hat man damit für kohärentes $\mathfrak{a}$ bei gegebenem $\underline{\mathfrak{a}}$ und t schon eine eindeutige Bestimmung von $\mathrm{L}b$: $\mathrm{L}b = \mathrm{L}(t \sqcup \underline{\mathfrak{a}}D) \sqcap \overline{\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}}$. Der Teil des Intervallinneren, von dem aus die untere Grenze erreichbar ist, spielt eine wichtige Rolle:

Definition 5.1.3 [←55] Das **Gerüst** eines Intervalles $\mathfrak{a}$ ist die Teilrelation $\underset{\top}{\mathfrak{a}} : \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{V}$ von $\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$, die für zwei Punkte $c : \mathbb{1} \to \mathcal{B}$ und $x : \mathbb{1} \to \mathcal{V}$ das Atom $c^{\mathsf{T}}x$ genau dann enthält, wenn es einen Pfad von x nach $cb_{\mathfrak{a}}$ gibt, der ganz in $\underline{\mathfrak{a}}$ verläuft, also

$$\underset{\top}{\mathfrak{a}} := b_{\mathfrak{a}}(D^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}})^+$$ □

Im folgenden Bild sind die Gerüste von fünf Beispielintervallen angezeigt. Nur in den ersten beiden Graphen liegt der mit δ markierte Knoten zwar im Inneren des Intervalles $[t, b]$, aber außerhalb seines Gerüstes:



Zu einem Punkt betrachten wir das Intervall, das durch ihn selbst als obere Grenze und seine Nachfolger als untere Grenze gegeben ist:

Definition 5.1.4 Das zu einem Knoten $x : \mathbb{1} \to \mathcal{V}$ gehörige **Punktintervall** ist definiert durch: $[x] := [x, Q_x]$, wobei Q_x die Knotennachfolgerfunktion (Definition 3.2.6) zu x in G ist. □

Für schlingentragende Knoten x sind die zugehörigen Punktintervalle natürlich leer: $\underline{[x]} = \mathrm{O}$; für nicht schlingentragende Knoten enthalten sie genau x: $\underline{[x]} = x$; insgesamt also immer $\underline{[x]} \subset x$. Offensichtlich sind alle Punktintervalle halbkohärent, aber i.a. nicht kohärent — nämlich genau dann nicht, wenn der betreffende Knoten schlingentragend ist und noch wenigstens einen weiteren Nachfolger hat.

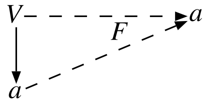
Punktintervalle werden erst durch Abbildung in einen anderen Graphen interessant. Ganz allgemein definieren wir die Abbildung eines Intervalls durch eine Funktion als Überladung der Multiplikation. Multiplikation von rechts lassen wir einfach in Intervalle hineindistribuieren:

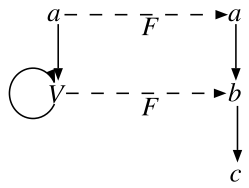
Definition 5.1.5 Das **Bildintervall** eines Intervalles $\mathfrak{a} = [t, b]$ unter einer totalen Funktion $F : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ ist

$$\mathfrak{a}F = [t, b]F := [tF, bF] \;.$$

Für ein Punktintervall $[x]$ heißt $[x]F$ auch *Bildintervall von x unter F.* □

Zu beachten ist, daß der Bildpunkt von x nicht unbedingt im Bildintervall von x enthalten sein muß, wie in den Beispielen im folgenden Bild (x ist mit „V“ markiert):





Aber es gilt immerhin:

$$\underline{[x]F} \neq \mathrm{O} \qquad \Leftrightarrow \qquad xF \subset \underline{[x]F} \qquad \Leftrightarrow \qquad xF \sqcap xDF = \mathrm{O}$$

5.2 Intervalle und Variable

Nachdem in Abschnitt 5.1 bisher Intervalle nur unter Berücksichtigung der Nachfolgerrelationen eingeführt wurden, werden wir in der Folge näher auf das Zusammenspiel von Intervallen mit den anderen Bestandteilen unserer Graphen eingehen.

Hierzu werden wir ein abgestuftes System von Begriffen einführen, mittels derer wir verschiedene Grade des Wohlverhaltens der Intervallgrenzen in bezug auf Variablenidentität und -bindung greifbar machen.

Definition 5.2.1 (Abschlußeigenschaften) [←104, 106] Gegeben seien ein Graph G und ein Intervall $\mathfrak{a}$ in G. Der Vektor $\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$ bzw. das Intervall $\mathfrak{a}$ heißt

variablenabgeschlossen, falls $(\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}B^{\mathsf{T}})\, W \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$,
d.h. lokal gebundene Variable liegen entweder ganz innerhalb oder ganz außerhalb von $\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$;

bindungsabgeschlossen, falls $\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}B^{\mathsf{T}} \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$,
d.h. von in $\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$ liegenden Konstruktoren gebundene Variable liegen selbst auch in $\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$;

Graphausschnitt, falls $\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}C_G \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$,
d.h. die untere Grenze „durchbricht“ keine Kapselungen;

offen, falls $\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}D \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$,
d.h. die untere Grenze wird nicht erreicht. □

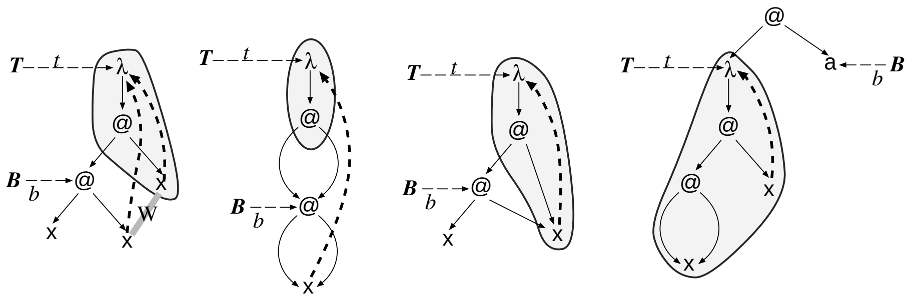
Offenheit von Vektoren kennen wir bereits aus Definition 3.3.1. Typische offene Intervalle sind solche, deren untere Grenze die Nullrelation ist.

Lemma 5.2.2 [←119] Für einen Graphen G und ein Intervall $\mathfrak{a}$ in G gelten folgende Implikationen:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{a} \text{ offen} & \Rightarrow & \mathfrak{a} \text{ Graphausschnitt} \\ & \Rightarrow & \mathfrak{a} \text{ bindungsabgeschlossen} \\ & \Rightarrow & \mathfrak{a} \text{ variablenabgeschlossen} \end{array}$$

Beweis: Wenn $\mathfrak{a}$ offen ist, erhalten wir: $\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}C \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}D^* \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$. Wenn $\mathfrak{a}$ Graphausschnitt ist, erhalten wir: $\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}B^{\mathsf{T}} \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}C \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$. Wenn $\mathfrak{a}$ bindungsabgeschlossen ist, erhalten wir: $(\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}B^{\mathsf{T}})\,W \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}B^{\mathsf{T}}W = \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}B^{\mathsf{T}} \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$. □

Das folgende Bild illustriert die Abschlußeigenschaften an Beispielen. So sehen wir zunächst ein nicht variablenabgeschlossenes Intervall, dann ein zwar variablenabgeschlossenes, nicht aber bindungsabgeschlossenes Intervall, als drittes ein bindungsabgeschlossenes Intervall, das kein Graphausschnitt ist und schließlich ein offenes, aber nicht kohärentes Intervall.



Lemma 5.2.3 Für jedes bindungsabgeschlossene Intervall $\mathfrak{a}$ gilt: $B \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}} \subset B \sqcap \underline{\mathfrak{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}$.

Beweis: $B \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}} = \mathrm{I}B \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}} \subset (\mathrm{I} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}B^{\mathsf{T}})B \subset (\mathrm{I} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}})B \subset (\mathrm{I} \sqcap \underline{\mathfrak{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L})B = B \sqcap \underline{\mathfrak{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}$ □

Lemma 5.2.4 (Schnitt und Vereinigung von Graphausschnitten)
Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beide Graphausschnitte. Seien weiter Intervalle $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ gegeben, so daß $\underline{\mathfrak{c}} = \underline{\mathfrak{a}} \sqcap \underline{\mathfrak{b}}$ und $\underline{\mathfrak{d}} = \underline{\mathfrak{a}} \sqcup \underline{\mathfrak{b}}$, dann sind auch $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ Graphausschnitte.

Beweis: $\underline{\mathfrak{c}}C_G = (\underline{\mathfrak{a}} \sqcap \underline{\mathfrak{b}})C_G \subset \underline{\mathfrak{a}}C_G \sqcap \underline{\mathfrak{b}}C_G \subset \underline{\mathfrak{a}} \sqcap \underline{\mathfrak{b}} = \underline{\mathfrak{c}}$
$\underline{\mathfrak{d}}C_G = (\underline{\mathfrak{a}} \sqcup \underline{\mathfrak{b}})C_G = \underline{\mathfrak{a}}C_G \sqcup \underline{\mathfrak{b}}C_G \subset \underline{\mathfrak{a}} \sqcup \underline{\mathfrak{b}} = \underline{\mathfrak{d}}$ □

Ein Punktintervall $[x]$ ist, solange x kein Binder ist, also $xB^{\mathsf{T}} = \mathrm{O}$ gilt, immer ein Graphausschnitt, denn dann gilt: $\underline{[x]}C_G \subset xC_G = \mathrm{O} \subset \underline{[x]}$.

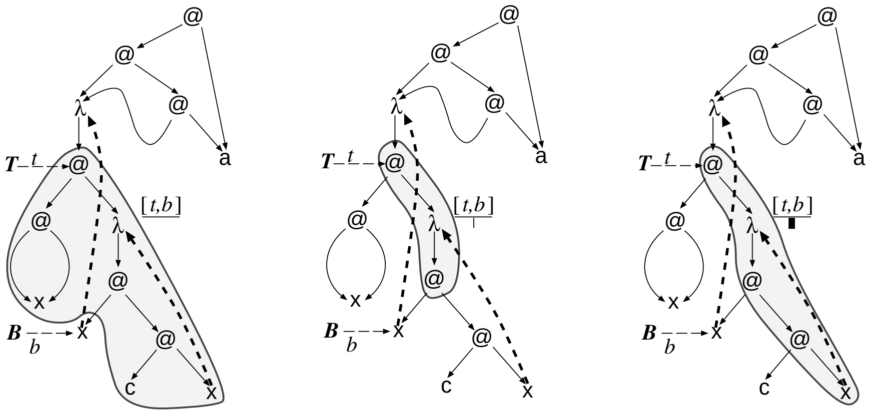
5.3 Kapselgerüst und Abschnitte

Die folgende Definition ist wesentlich für sparsames Kopieren zum Beispiel der Rümpfe von λ-Abstraktionen. Wadsworth hat durch Klarstellung der in der folgenden Definition vorgenommenen Unterscheidung effiziente Graphreduktion ermöglicht [Wad71, Seite 154]. Er bezeichnet die Teile eines Intervalles außerhalb unseres *Kapselgerüstes* als „abstrahierbar“; aufgrund der einfachen Struktur der von ihm betrachteten Intervalle — es kommen nur Rümpfe von λ-Abstraktionen in Frage — benötigt Wadsworth jedoch keinen eigenen Intervallbegriff. Für allgemeinere Intervalle müssen wir das Gerüst aus Definition 5.1.3 noch bezüglich Kapselung abschließen:

Definition 5.3.1 Das **Kapselgerüst** $\underset{\boldsymbol{\top}}{\mathfrak{a}} : \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{V}$ eines Intervalles $\mathfrak{a}$ in G ist definiert als:

$$\underset{\boldsymbol{\top}}{\mathfrak{a}} := b_{\mathfrak{a}}(D^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}})((D^{\mathsf{T}} \sqcup C) \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}})^* \qquad (= \ b_{\mathfrak{a}}(D^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}})((D^{\mathsf{T}} \sqcup B^{\mathsf{T}}) \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}})^* \ )$$ □

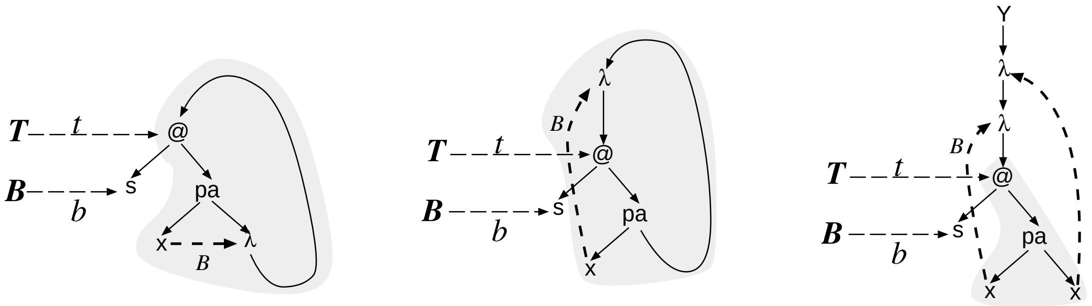
Offensichtlich gilt $\mathrm{L}\underset{\top}{\mathfrak{a}} \subset \mathrm{L}\underset{\boldsymbol{\top}}{\mathfrak{a}} \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$. Für Graphausschnitte gilt weiter $\underset{\boldsymbol{\top}}{\mathfrak{a}} = \underset{\top}{\mathfrak{a}}C^*$. Das folgende Bild zeigt zu einem Intervall links den Intervallvektor, in der Mitte das Gerüst und rechts das Kapselgerüst:



Lemma 5.3.2 (Kapselgerüst bleibt Graphausschnitt) [←156]
Für einen Graphausschnitt $\mathfrak{a}$ sind auch sein Kapselgerüst $\mathrm{L}\underset{\blacktriangledown}{\underline{\mathfrak{a}}}$ und dessen relatives Komplement $\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\underset{\blacktriangledown}{\underline{\mathfrak{a}}}}$ Graphausschnitte. Ferner ist $\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\underset{\blacktriangledown}{\underline{\mathfrak{a}}}}$ offen.

Beweis:
$$\begin{aligned}
\underset{\blacktriangledown}{\underline{\mathfrak{a}}}C &= \underline{\mathfrak{a}}C \sqcap \underset{\blacktriangledown}{\underline{\mathfrak{a}}}(C \sqcap \underset{\blacktriangledown}{\underline{\mathfrak{a}}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}) \subset \underline{\mathfrak{a}} \sqcap \underset{\blacktriangledown}{\underline{\mathfrak{a}}}(C \sqcap \underline{\mathfrak{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}) = \underset{\blacktriangledown}{\underline{\mathfrak{a}}}(C \sqcap \underline{\mathfrak{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}) \\
&= \underset{\blacktriangledown}{\underline{\mathfrak{a}}}(C \sqcap \underline{\mathfrak{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}) = b_{\mathfrak{a}}(D^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}})((D^{\mathsf{T}} \sqcup C) \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}})^*(C \sqcap \underline{\mathfrak{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}) \\
&\subset b_{\mathfrak{a}}(D^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}})((D^{\mathsf{T}} \sqcup C) \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}})^* = \underset{\blacktriangledown}{\underline{\mathfrak{a}}}
\end{aligned}$$
Die zweite Behauptung folgt aus $\mathrm{L}\underset{\blacktriangledown}{\underline{\mathfrak{a}}}C^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}} \subset \mathrm{L}\underset{\blacktriangledown}{\underline{\mathfrak{a}}}(C^{\mathsf{T}} \sqcap \underline{\mathfrak{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}) \subset \mathrm{L}\underset{\blacktriangledown}{\underline{\mathfrak{a}}}$. Ebenso schließen wir aus $\mathrm{L}\underset{\blacktriangledown}{\underline{\mathfrak{a}}}D^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}} \subset \mathrm{L}\underset{\blacktriangledown}{\underline{\mathfrak{a}}}(D^{\mathsf{T}} \sqcap \underline{\mathfrak{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}) \subset \mathrm{L}\underset{\blacktriangledown}{\underline{\mathfrak{a}}}$ auf die Offenheit. □

Im folgenden Bild besteht das Kapselgerüst ganz rechts nur aus dem „@"-Knoten, in den linken beiden verschiedenen Zeichnungen des gleichen Graphen aber aus dem ganzen Intervallinneren. Da die rechte Zeichnung nur eine Möglichkeit darstellt, durch Einsatz eines Y-Kombinators und einer zusätzlichen Abstraktion Kreise zu vermeiden, ist diese Differenz in den Kapselgerüsten sehr unbefriedigend.



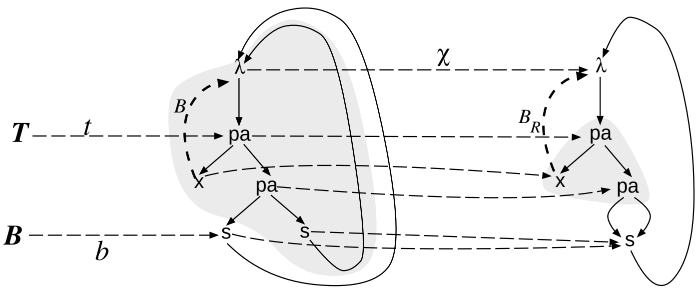
Es fällt auf, daß hier Vorgänger der oberen Grenze innerhalb des Intervalles liegen. Dabei sind weniger solche Fälle interessant, in denen ein Knoten der oberen Grenze von einem echt anderen Knoten der oberen Grenze aus erreichbar ist, sondern mehr diejenigen, in denen ein Knoten der oberen Grenze von sich selbst aus erreichbar ist. Kritisch wird dies vor allem dann, wenn ein Knoten der oberen Grenze von einem Knoten im Inneren des Intervalles gekapselt wird — wegen der Irreflexivität der Kapselungsrelation kann er wenigstens nicht von sich selbst gekapselt werden.

Definition 5.3.3 [←58, 119] Ein Intervall $[t, b]$ heißt **selbstkapselnd**, wenn $\mathrm{L}\,t\,C^{\mathsf{T}} \sqcap \underline{[t, b]} \neq \mathrm{O}$. Andernfalls heißt $[t, b]$ auch *selbstkapselungsfrei.* □

Nach dieser Definition ist unmittelbar ersichtlich, daß für jedes selbstkapselungsfreie Intervall $[t, b]$ die untere Grenze um die t kapselnden Knoten $t\,C^{\mathsf{T}}$ erweitert werden kann, ohne daß der Intervallvektor sich ändert. Es gilt also:

$$[t, b] \text{ selbstkapselungsfrei} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{[t, b]} = \underline{[t, b \sqcup \mathrm{L}\,t\,C^{\mathsf{T}}]}$$

Selbstkapselung ist natürlich nur in Anwesenheit von Kreisen möglich; in einem DAG sind alle Intervalle selbstkapselungsfrei. Das in den Quotientengraphen projizierte Bild eines selbstkapselnden Intervalles ist nicht unbedingt wieder selbstkapselnd:



Eine unter der Obergrenze eines Intervalles frei vorkommende Variable ist nur in selbstkapselungsfreien Intervallen sicher nicht im Intervallinneren gebunden.

Lemma 5.3.4 (Selbstkapselungsfreie Intervalle und lokal freie Variable) [←166]
Für selbstkapselungsfreie Intervalle $\mathsf{a} = [t, b]$ gilt $\mathrm{L}\underline{\mathsf{a}} \sqcap \mathrm{L}\,W \sqcap \overline{\mathrm{L}\underline{\mathsf{a}}B^{\mathsf{T}}} = \mathrm{L}\underline{\mathsf{a}} \sqcap \mathrm{L}\,t\,\not\mathcal{C}^{\mathsf{T}}$.

Beweis: „$\subset$" gilt trivialerweise aufgrund der Erreichbarkeit gebundener Variablen vom Bindungsknoten aus und der Definition von $\not\mathcal{C}$. „$\supset$" folgt direkt aus der Definition der Selbstkapselungsfreiheit. □

Da Selbstkapselung oft sehr störend wirkt, definieren wir eine Variante des Intervallbegriffs, die solche Effekte vermeidet. Die meisten Notationen und Begriffe verwenden wir analog; der Schlüssel zum Abschnittsbegriff ist die Definition der Zugangsrelation, die außer an der unteren Grenze auch an Knoten, die die obere Grenze kapseln, halt macht:

Definition 5.3.5 Ein **Abschnitt** auf einem Graphen G ist ein $[t, b\rrbracket$ notiertes Paar von Relationen $t : \mathcal{T} \leftrightarrow \mathcal{V}$ und $b : \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{V}$.

Zu einem Abschnitt $\mathsf{a} = [t, b\rrbracket$ heißt $t_{\mathsf{a}} := t$ *obere Grenze von* a, $b_{\mathsf{a}} := b$ *untere Grenze von* a. Die **Zugangsrelation** von Abschnitten wird definiert durch

$$\underline{[t, b\rrbracket} = \underline{[t, b \sqcup \mathrm{L}\,t\,C^{\mathsf{T}}]}$$

Die Bildung von *Punktabschnitten, Bildabschnitten, Gerüsten und Kapselgerüsten* ist analog der bei Intervallen:

$$[x\rrbracket := [x, Q_x\rrbracket \qquad \underset{\top}{\mathsf{a}} := b_{\mathsf{a}}(D^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathsf{a}})^{+}$$

$$[t, b\rrbracket F := [tF, bF\rrbracket \qquad \underset{\blacktriangledown}{\mathsf{a}} := b_{\mathsf{a}}(D^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathsf{a}})((D^{\mathsf{T}} \sqcup C) \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathsf{a}})^{*}$$

Der Abschnitt a heißt *kohärent*, wenn $\mathrm{L}\,b_{\mathsf{a}} \subset \mathrm{L}\,t_{\mathsf{a}} \sqcup \mathrm{L}\underline{\mathsf{a}}D$, und *halbkohärent*, wenn $\mathrm{L}\,b_{\mathsf{a}} \subset \mathrm{L}\,t_{\mathsf{a}}D^{*}$. Abschnitte sind *per definitionem* selbstkapselungsfrei. Der Abschnitt a ist ein *Graphausschnitt*, wenn $\underline{\mathsf{a}}C \subset \underline{\mathsf{a}}$. □

Auch für Abschnitte, die Graphausschnitte sind, gilt wieder $\underset{\top}{\mathsf{a}} = \underset{\top}{\mathsf{a}}C^{*}$.

Man muß sich dessen bewußt sein, daß Intervalle und Abschnitte trotz vieler gleicher (sozusagen „überladener") Notationen nicht kompatibel zueinander sind. Wir können jedoch Konversionsfunktionen angeben:

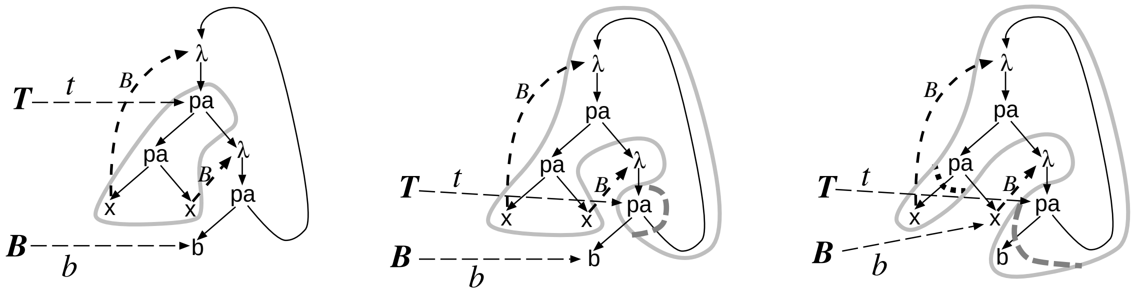
Definition 5.3.6 (Konversionen zwischen Intervallen und Abschnitten)
Die Funktion $\rfloor\_\lfloor$ konvertiert a, sei a Intervall oder Abschnitt, in einen Abschnitt $\rfloor\mathsf{a}\lfloor := [t_{\mathsf{a}}, b_{\mathsf{a}}\rrbracket$ und die Funktion $\rceil\_\lceil$ konvertiert a in ein Intervall $\rceil\mathsf{a}\lceil := [t_{\mathsf{a}}, b_{\mathsf{a}}]$. □

Auf Intervallen ist $\rceil\_\lceil$ natürlich die identische Abbildung ebenso wie $\rfloor\_\lfloor$ auf Abschnitten. Diese neuerliche Überladung hat den Vorteil, daß man in ambivalenten Kontexten zu einem Intervall oder Abschnitt $\mathfrak{a}$ immer das entsprechende Intervall $\rceil\mathfrak{a}\lceil$ bzw. den Abschnitt $\rfloor\mathfrak{a}\lfloor$ ansprechen kann.

Definition 5.3.7 Die **Selbstkapselungsgrenze** $\widehat{\mathfrak{a}} : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}$ eines Intervalles oder Abschnittes $\mathfrak{a}$ ist der Vektor derjenigen Knoten, die die obere Grenze $t_{\mathfrak{a}}$ aus dem Inneren des *Intervalles* $\rceil\mathfrak{a}\lceil$ heraus kapseln:

$$\widehat{\mathfrak{a}} := \mathrm{L}\underline{\rceil\mathfrak{a}\lceil} \sqcap \mathrm{L}\, t_{\mathfrak{a}} C^{\mathsf{T}}$$ □

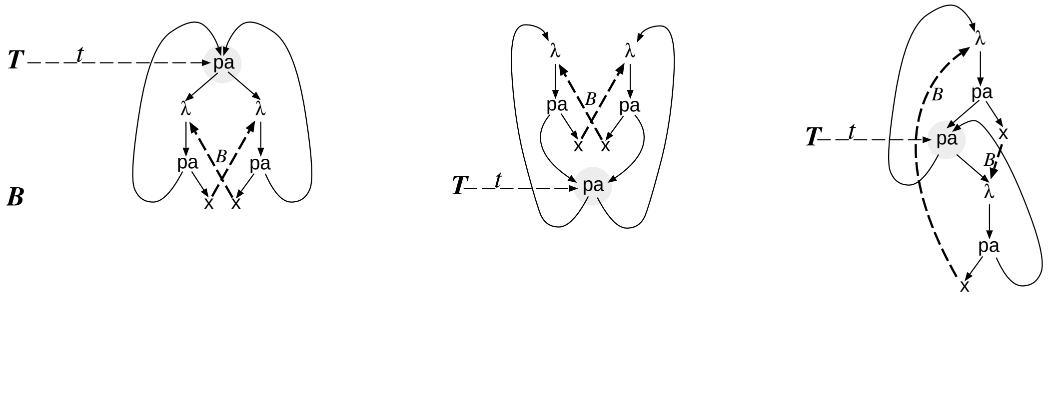
Das folgende Bild zeigt drei verschiedene Abschnitte in demselben Graphen, die alle auch Graphausschnitte sind, wobei die inneren Knoten umrahmt sind. Alle drei Abschnitte haben auch dieselbe nichtleere Selbstkapselungsgrenze. Nur der linke Abschnitt ist nicht kohärent, so daß Gerüst und Kapselgerüst leer sind. Gerüst und Kapselgerüst des mittleren Abschnittes sind jeweils genau die obere Grenze $\mathrm{L}t$. Im rechts dargestellten Abschnitt umfaßt das Kapselgerüst alle inneren Knoten bis auf den mit „b“ markierten; die gepunktete Linie trennt den einzigen davon nicht zum Gerüst gehörenden Knoten ab:



Kreise in Termgraphen werden üblicherweise zur Darstellung von Rekursionen verwendet. Wer sich auf Term-DAGs beschränkt, stellt meist andere Mittel hierzu bereit; es sind dies entweder Rekursionskonstruktoren, die selbst Variable binden oder z.B. ein Y-Kombinator, der zusammen mit einer Funktionsabstraktion auftreten kann. In beiden Fällen läuft die Kante, die im zyklischen Fall auf die Selbstkapselungsgrenze führte, nun auf eine extern gebundene Variable. Die Verwendung von Abschnitten statt Intervallen stellt also sicher, daß beim Bezug auf Teile von Rekursionsrümpfen unabhängig von der Darstellungsweise — sei es durch Zyklen oder durch Variablenbindung — immer nur die im wesentlichen gleichen Teile, nicht aber der rekursive Rückbezug erfaßt werden.

Betrachtet man in der Abbildung vor Definition 5.3.3 Abschnitte statt Intervallen, so bestehen die Kapselgerüste der beiden verschiedenen Graphen jetzt beide nur noch aus dem jeweiligen „@“-Knoten.

Häufig möchte man auf die von einem Knoten der Selbstkapselungsgrenze gebundene Variable noch zugreifen und muß dann wissen, ob sie im Inneren des Abschnittes liegt. Zunächst könnte sie ja auch von einem anderen Knoten der Selbstkapselungsgrenze abgetrennt sein:

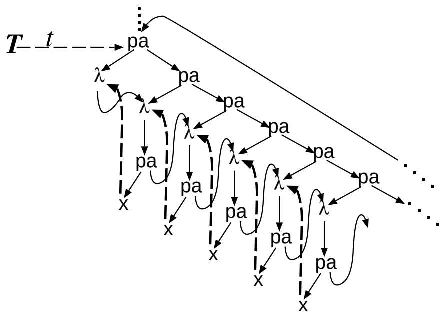


Der hier dreimal in verschiedener Anordnung gezeichnete Beispielgraph ist aber nicht kapselungsfrei basiert.

Aus der Kreisfreiheit der Kapselungsrelation (Lemma 3.5.3) erhalten wir nämlich:

Lemma 5.3.8 (Abschnittskonsistenz) [←87, 88] Zu einem Abschnitt $\mathfrak{a} = [t, b\rrbracket$ in einem kapselungsfrei basierten Graphen, dessen obere Grenze ein Punkt ist und dessen Selbstkapselungsgrenze $\widehat{\mathfrak{a}}$ nichtleer ist, enthält das Intervall $[t, \widehat{\mathfrak{a}}]$ zu jedem Knoten $x \subset \mathrm{L}\widehat{\mathfrak{a}}$ der Selbstkapselungsgrenze mindestens eine lokal freie, aber in der Selbstkapselungsgrenze gebundene Variable y aus $x(C \sqcap \mathrm{L}\widehat{\mathfrak{a}})^* B^{\mathsf{T}}$. Es gilt sogar $y \subset xCB^{\mathsf{T}}$ und yB liegt auf jedem Pfad von x nach t.

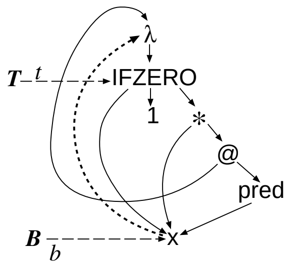
Beweis: Sei λ_1 zu einem beliebigen Pfad von einem ungekapselten Knoten nach t der erste Knoten der Selbstkapselungsgrenze γ auf diesem Pfad. Falls $\lambda_1\, B^{\mathsf{T}} \sqcap \underline{[t, \gamma]} \neq \mathrm{O}$, ist die Aussage wahr.



Andernfalls muß es einen Knoten $\lambda_2 \subset \gamma$ der Selbstkapselungsgrenze von $\underline{\mathfrak{a}}$ geben, der auf einem Pfad von t zu einer von λ_1 gebundenen Variablen liegt, so daß $\lambda_2 \neq \lambda_1$. Dann gilt $\lambda_2 \subset \lambda_1\, C$. Falls λ_2 auch keine gebundene Variable in $\underline{\mathfrak{a}}$ besäße, und λ_1 diese abschnitte, gälte auch $\lambda_1 \subset \lambda_2\, C$, was einen Widerspruch zu Lemma 3.5.3 ergäbe. Außerdem muß jeder Pfad von λ_1 nach t über λ_2 führen, sonst erhielten wir auch wieder $\lambda_1 \subset \lambda_2\, C$.

Da nicht λ_1 — und natürlich auch nicht λ_2 — die von λ_2 gebundenen Variablen aus $\underline{[t, \gamma]}$ abtrennt, muß es ein $\lambda_3 \subset \gamma$ geben, mit $\lambda_3 \subset \lambda_2\, C$. Auch alle Pfade von λ_2 nach t müssen über λ_3 führen, *et cetera ad infinitum* (aus der Kreisfreiheit der Kapselung folgt, daß alle diese λ_i verschieden sind).

So läßt sich zeigen, daß es keinen endlichen Pfad von λ_1 nach t geben kann, was aber im Widerspruch dazu steht, daß λ_1 in der Selbstkapselungsgrenze von $\mathfrak{a}$ enthalten ist. □



Das Bild rechts zeigt anhand einer einfachen zyklischen Formulierung der Fakultätsfunktion, daß die oben existent gezeigte gebundene Variable nicht in $\underline{\mathfrak{a}}$ zu liegen braucht — sie kann dann natürlich nur durch die untere Grenze b abgetrennt sein.

Man vergewissert sich leicht, daß der Abschnitt $[t, b\rrbracket$ in diesem Beispiel ein Graphausschnitt ist.

Kapitel 6

Einbettungen

In diesem Kapitel formulieren wir in Abschnitt 6.1 Bedingungen, die sicherstellen, daß eine Abbildung zwischen den Knotenmengen zweier Termgraphen die Struktur des Urbildgraphen außerhalb eines Vektors von Metavariablen erhält. Abbildungen, die diese Bedingungen erfüllen, nennen wir Einbettungen, und es ist leicht zu zeigen, daß Einbettungen eine Kategorie bilden.

In Abschnitt 6.2 definieren wir, was wir unter dem Bild einer Metavariablen verstehen wollen, und zwar unter Rückgriff auf die Intervall- und Abschnittsbegriffe aus dem letzten Kapitel. In den verbleibenden Abschnitten dieses Kapitels beschäftigen wir uns mit den verschiedenen Aspekten der Interaktion solcher Einbettungen mit den Nachfolgerfunktionen — hauptsächlich, was die Bilder der Metavariablen betrifft.

6.1 Einbettungen

Als ersten Schritt zur Definition von Homomorphismen führen wir *Einbettungen* ein. Einbettungen sind strukturerhaltend auf einem Teil der Knotenmenge; abgesehen wird hierbei von den sogenannten *Metavariablen der Einbettung.* Sei also zu zwei Graphen G_1 und G_2 eine totale Funktion $F : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ zwischen den beiden Knotenmengen gegeben. Zusätzlich betrachten wir einen Metavariablenvektor (siehe Definition 3.2.4) $p : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_1$ zu G_1, dann gilt $p \subset (v_s \sqcup v_p)M_1^\top$, d.h. p darf nur Schema- und Platzhaltervariable enthalten. Variable in p sind gerade die *Metavariablen der Einbettung*, so daß die Bedingungen auf $F \sqcap \overline{p^\top \mathrm{L}}$ beschränkt werden müssen. Diese Form der Beschränkung wird in der Folge allgegenwärtig sein, so daß wir eine spezielle Schreibweise einführen, die die relationenalgebraischen Terme übersichtlicher hält und die Zuordnung der Beschränkung leichter macht:

$$F_{\lceil\overline{p}\rceil} := F \sqcap \overline{p^\top \mathrm{L}}$$

Dabei bindet diese Art der „Domain-Restriktion“ stärker als z.B. die Transposition. Allerdings werden wir die Verwendung dieser Notation i.w. auf Einbettungen beschränken und diese Abkürzung kaum allgemein einsetzen.

Die Bedingungen zur Erhaltung der Graphstruktur lassen sich jeweils auf verschiedene Weisen formulieren. Wir zeigen zunächst einige Äquivalenzen für Bindung und Variablenidentität.

Lemma 6.1.1 (Abbildungen und Bindung) Für jede totale Funktion F von G_1 in G_2 gilt bei gegebenem Variablenvektor $p : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_1$:

$$\begin{aligned} F_{\lceil\overline{p}\rceil}^\top B_1 \subset B_2 F_{\lceil\overline{p}\rceil}^\top \quad &\Leftrightarrow \quad (B_1 =)\ B_1 \sqcap \overline{p^\top \mathrm{L}} \subset F B_2 F^\top \\ &\Leftrightarrow \quad (B_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil} =)\ B_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil} \sqcap \overline{p^\top \mathrm{L}} \subset F_{\lceil\overline{p}\rceil} B_2 \;\Rightarrow\; F_{\lceil\overline{p}\rceil} B_2 \sqcap B_1 \mathrm{L} \subset B_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil} \end{aligned}$$

Beweis: Die eingeklammerten Gleichheiten folgen aus der Einschränkung der Variablenbindung auf Objektvariable.

„1 ⇒ 3“: $B_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil} \sqcap \overline{p^\top \mathrm{L}} = (\mathrm{I} \sqcap \overline{p^\top \mathrm{L}}) B_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil} \subset F_{\lceil\overline{p}\rceil} F_{\lceil\overline{p}\rceil}^\top B_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil} \subset F_{\lceil\overline{p}\rceil} B_2 F_{\lceil\overline{p}\rceil}^\top F_{\lceil\overline{p}\rceil} \subset F_{\lceil\overline{p}\rceil} B_2$

„2 ⇒ 1“: $F_{\lceil\overline{p}\rceil}^\top B_1 = F^\top (B_1 \sqcap \overline{p^\top \mathrm{L}}) \subset F^\top F B_2 F^\top \subset B_2 F^\top$

„$3 \Rightarrow 2$“: $FB_2F^{\mathsf{T}} \supset B_1F_{\lceil\overline{p}\rceil}F^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{p^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} = B_1FF^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{p^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \supset B_1 \sqcap \overline{p^{\mathsf{T}}\mathrm{L}}$

(Für die Gleichheit brauchen wir $B_1W_1 = \mathrm{O}$, also die in Definition 3.2.1 getroffene Einschränkung der Binder auf konstante Konstruktoren.)

„$1 \Rightarrow 4$“: mit einer Modalregel und der Eindeutigkeit von B_2 erhalten wir:

$$F_{\lceil\overline{p}\rceil}B_2 \sqcap B_1\mathrm{L} \subset B_1(\mathrm{L} \sqcap B_1^{\mathsf{T}}F_{\lceil\overline{p}\rceil}B_2) = B_1B_1^{\mathsf{T}}F_{\lceil\overline{p}\rceil}B_2 \subset B_1F_{\lceil\overline{p}\rceil}B_2^{\mathsf{T}}B_2 \subset B_1F_{\lceil\overline{p}\rceil} \qquad \square$$

Lemma 6.1.2 (Abbildungen und Variablenidentität) Für jede totale Funktion F von G_1 in G_2 gilt bei gegebenem Variablenvektor $p : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_1$:

$$F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}W_1 \subset W_2F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil} \qquad \Leftrightarrow \qquad W_1F_{\lceil\overline{p}\rceil} \subset F_{\lceil\overline{p}\rceil}W_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad W_1F \sqcap \overline{p^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \subset FW_2$$

Beweis: „$1 \Leftrightarrow 2$“ durch Transposition. „$2 \Leftrightarrow 3$“:

$$\begin{aligned} W_1F_{\lceil\overline{p}\rceil} \subset F_{\lceil\overline{p}\rceil}W_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (W_1 \sqcap \overline{\mathrm{L}p})F \subset F_{\lceil\overline{p}\rceil}W_2 \\ &\Leftrightarrow \quad W_1F \sqcap \overline{p^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \subset F_{\lceil\overline{p}\rceil}W_2 \quad \Leftrightarrow \quad W_1F \sqcap \overline{p^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \subset FW_2 \qquad \square \end{aligned}$$

Für die Markierungs- und Nachfolgerfunktionen gelten ähnliche Äquivalenzen, deren einfache Beweise wir auslassen:

$$F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}M_1 \subset M_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad F_{\lceil\overline{p}\rceil}M_2 \subset M_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad F_{\lceil\overline{p}\rceil}M_2 = M_1 \sqcap \overline{p^{\mathsf{T}}\mathrm{L}}$$

$$F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}S_{1,i} \subset S_{2,i}F^{\mathsf{T}} \qquad \Leftrightarrow \qquad S_{1,i}F \sqcap \overline{p^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} = F_{\lceil\overline{p}\rceil}S_{2,i}$$

Für die Definition von *Einbettungen*, d.h. Abbildungen, die die Struktur unserer Graphen außerhalb der Metavariablen erhalten, wählen wir daraus jeweils eine in ein einheitliches Schema passende aus:

Definition 6.1.3 (Einbettung) Zu zwei Graphen G_1 und G_2 seien eine totale Funktion $F : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ zwischen den beiden Knotenmengen und ein Variablenvektor $p : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_1$ zu G_1 gegeben. Wenn folgende Forderungen erfüllt sind:

Markierungstreue: $F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}M_1 \subset M_2$,

Nachfolgertreue: $(F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}\|\mathrm{I})S_1 \subset S_2F^{\mathsf{T}}$, bzw. für alle $i : \mathbb{1} \to \mathcal{E}$ muß $F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}S_{1,i} \subset S_{2,i}F^{\mathsf{T}}$ gelten,

Bindungstreue: $F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}B_1 \subset B_2F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}$,

Variablentreue: $F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}W_1 \subset W_2F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}$ und

Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen: $F_{\lceil\overline{p}\rceil}W_2F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil} \sqcap B_1B_1^{\mathsf{T}} \subset W_1$,

dann heißt F eine **Einbettung** von G_1 in G_2, und zwar eine **p-Einbettung**. Weiter heißt $F_{\lceil\overline{p}\rceil}$ der **konstante Anteil** von F. $\square$

Möchte man die Komposition zweier Einbettungen F und G betrachten, so muß man sich zunächst über den Metavariablenvektor p des Ergebnisses Gedanken machen. Der Metavariablenvektor p_F der ersten Einbettung muß offensichtlich in p enthalten sein; und für den Metavariablenvektor p_G der zweiten Einbettung müssen die Urbilder unter F — es genügt sogar unter $F_{\lceil\overline{p_F}\rceil}$ — in p enthalten sein. Damit erhalten wir:

Lemma 6.1.4 (Komposition von Einbettungen) [←65, 99] Für eine p_F-Einbettung F von G_1 in G_2 und eine p_G-Einbettung G von G_2 in G_3 ist FG eine p-Einbettung von G_1 in G_3 mit $p := p_F \sqcup p_GF^{\mathsf{T}} (= p_F \sqcup p_GF^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil})$, und es gilt $(FG)_{\lceil\overline{p}\rceil} = F_{\lceil\overline{p_F}\rceil}G_{\lceil\overline{p_G}\rceil}$.

Beweis: Zunächst zeigen wir die letzte Behauptung:

$$\begin{aligned}
(FG)_{\lceil p \rceil} &= FG \sqcap \overline{p^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} = FG \sqcap \overline{p_F^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap \overline{F p_G^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} = FG \sqcap F\overline{p_G^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap \overline{p_F^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \\
&= F(G \sqcap \overline{p_G^{\mathsf{T}}\mathrm{L}}) \sqcap \overline{p_F^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} = (F \sqcap \overline{p_F^{\mathsf{T}}\mathrm{L}})\, G_{\lceil p_G \rceil} = F_{\lceil p_F \rceil}\, G_{\lceil p_G \rceil}
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir noch nacheinander die Einbettungseigenschaften von FG :

Markierungstreue: $(FG)_{\lceil p \rceil}^{\mathsf{T}} M_1 = G_{\lceil p_G \rceil}^{\mathsf{T}} F_{\lceil p_F \rceil}^{\mathsf{T}} M_1 \subset F_{\lceil p_F \rceil}^{\mathsf{T}} M_2 \subset M_3$

Nachfolgertreue: $(FG)_{\lceil p \rceil}^{\mathsf{T}} S_{1,i} = G_{\lceil p_G \rceil}^{\mathsf{T}} F_{\lceil p_F \rceil}^{\mathsf{T}} S_{1,i} \subset G_{\lceil p_G \rceil}^{\mathsf{T}} S_{2,i} F^{\mathsf{T}} \subset S_{3,i} G^{\mathsf{T}} F^{\mathsf{T}} \subset S_{3,i} (FG)^{\mathsf{T}}$

Bindungstreue: $(FG)_{\lceil p \rceil}^{\mathsf{T}} B_1 = G_{\lceil p_G \rceil}^{\mathsf{T}} F_{\lceil p_F \rceil}^{\mathsf{T}} B_1 \subset G_{\lceil p_G \rceil}^{\mathsf{T}} B_2 F_{\lceil p_F \rceil}^{\mathsf{T}} \subset B_3 G_{\lceil p_G \rceil}^{\mathsf{T}} F_{\lceil p_F \rceil}^{\mathsf{T}} = B_3 (FG)_{\lceil p \rceil}^{\mathsf{T}}$

Variablentreue:

$$W_1 (FG)_{\lceil p \rceil} = W_1 F_{\lceil p_F \rceil}\, G_{\lceil p_G \rceil} \subset F_{\lceil p_F \rceil}\, W_2\, G_{\lceil p_G \rceil} \subset F_{\lceil p_F \rceil}\, G_{\lceil p_G \rceil}\, W_3 = (FG)_{\lceil p \rceil}\, W_3$$

Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen:

$$\begin{aligned}
&(FG)_{\lceil p \rceil}\, W_3 (FG)_{\lceil p \rceil}^{\mathsf{T}} \sqcap B_1 B_1^{\mathsf{T}} \\
=\ & F_{\lceil p_F \rceil}\, G_{\lceil p_G \rceil}\, W_3\, G_{\lceil p_G \rceil}^{\mathsf{T}} F_{\lceil p_F \rceil}^{\mathsf{T}} \sqcap B_1 B_1^{\mathsf{T}} \sqcap F B_2 F^{\mathsf{T}} F B_2^{\mathsf{T}} F^{\mathsf{T}} && \text{B.-treue } F \\
\subset\ & F_{\lceil p_F \rceil}\, G_{\lceil p_G \rceil}\, W_3\, G_{\lceil p_G \rceil}^{\mathsf{T}} F_{\lceil p_F \rceil}^{\mathsf{T}} \sqcap B_1 B_1^{\mathsf{T}} \sqcap F B_2 B_2^{\mathsf{T}} F^{\mathsf{T}} && F \text{ eindeutig} \\
=\ & F_{\lceil p_F \rceil} (G_{\lceil p_G \rceil}\, W_3\, G_{\lceil p_G \rceil}^{\mathsf{T}} \sqcap B_2 B_2^{\mathsf{T}}) F_{\lceil p_F \rceil}^{\mathsf{T}} \sqcap B_1 B_1^{\mathsf{T}} && \text{Lemma 2.2.4} \\
\subset\ & F_{\lceil p_F \rceil}\, W_2 F_{\lceil p_F \rceil}^{\mathsf{T}} \sqcap B_1 B_1^{\mathsf{T}} && \text{EdVggV. } G \\
\subset\ & W_1 && \text{EdVggV. } F \qquad \square
\end{aligned}$$

Es ist naheliegend, zu untersuchen, ob sich Projektionen zu Quotientengraphen (siehe Satz 4.3.8) als Einbettungen auffassen lassen. Offensichtlich sind keine Metavariablen involviert, so daß wir $p = \mathrm{O}$ wählen können, und es stellt sich heraus, daß einer Projektion nur eine Kongruenz zugrundezuliegen braucht, damit sie eine Einbettung ist; Identitäten sind damit natürlich auch Einbettungen.

Lemma 6.1.5 (Projektion als Einbettung) [←82]
Sei G_1 ein Graph und R eine Kongruenz auf G_1. Dann ist die natürliche Projektion χ_R zu R eine Einbettung von G_1 in $G_2 = G_1/_R$, und zwar eine O-Einbettung.

Beweis: Mit $p = \mathrm{O}$, $\chi := \chi_R$ und mit Hilfe von Lemma 4.3.2 erhalten wir:

Markierungstreue: $\chi^{\mathsf{T}} M_1 = M_2$

Nachfolgertreue: $\chi^{\mathsf{T}} S_{1,i} \subset S_{2,i} \chi^{\mathsf{T}}$

Bindungstreue: $\chi^{\mathsf{T}} B_1 \subset B_2 \chi^{\mathsf{T}}$

Variablentreue: $\chi^{\mathsf{T}} W_1 = W_2 \chi^{\mathsf{T}}$

Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen: unter Verwendung von Lemma 4.1.7 erhalten wir:

$$\chi\, W_2 \chi^{\mathsf{T}} \sqcap B_1 B_1^{\mathsf{T}} = \chi \chi^{\mathsf{T}} W_1 \sqcap B_1 B_1^{\mathsf{T}} = R\, W_1 \sqcap B_1 B_1^{\mathsf{T}} \subset W_1 \qquad \square$$

Auch Isomorphismen nach Definition 3.2.8 sind Einbettungen, und der Einbettungsbegriff steht in sinnvoller Beziehung zu diesem Isomorphismenbegriff:

Satz 6.1.6 (Isomorphie) [←26] Isomorphismen der Kategorie der O-Einbettungen sind gerade die Isomorphismen nach Definition 3.2.8.

Beweis: Sei F eine O-Einbettung von G_1 in G_2 und G eine O-Einbettung von G_2 in G_1. Sei nun $FG = \mathrm{I}$ und $GF = \mathrm{I}$. Zunächst einmal gilt offensichtlich $G = F^{\mathsf{T}}$. Da es sich hier um O-Einbettungen handelt, haben wir $F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} = F$ und $G_{\lceil\overline{p_G}\rceil} = G$. Die Isomorphiebedingungen folgen ohne Probleme:

Markierungstreue: $FM_2 = M_1$

Nachfolgertreue: $FS_{2,i} = S_{1,i}F$

Bindungstreue: $FB_2 = FB_2F^{\mathsf{T}}F \subset FF^{\mathsf{T}}B_1F = B_1F \subset FB_2$

Variablentreue: $FW_2 = FW_2F^{\mathsf{T}}F \subset FF^{\mathsf{T}}W_1F = W_1F \subset FW_2$

Zu beachten ist, daß die Forderung nach $p_F = \mathrm{O}$, $p_G = \mathrm{O}$ nicht aus den übrigen folgt und daher auch nicht weggelassen werden kann.

Die Gegenrichtung ist noch offensichtlicher, nur die Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen ist nicht in den Isomorphismiebedingungen vertreten, folgt aber problemlos:

$$FW_2F^{\mathsf{T}} \sqcap B_1B_1^{\mathsf{T}} = W_1FF^{\mathsf{T}} \sqcap B_1B_1^{\mathsf{T}} = W_1 \sqcap B_1B_1^{\mathsf{T}} \subset W_1 \quad . \qquad \square$$

Der Vektor der Metavariablen einer Einbettung ist normalerweise nicht ein beliebiger Metavariablenvektor, sondern jeweils aus dem Kontext klar ersichtlich. Für eine entsprechende Zuordnung führen wir folgenden Begriff ein:

Definition 6.1.7 Ein **Variablenschema** $\mathcal{P} : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{N}$ zu einem Graphalphabet $\mathcal{L}$ ist ein Vektor von Metavariablenmarkierungen, also mit $\mathcal{P} \subset v_s \sqcup v_p$. $\square$

Ein Variablenschema $\mathcal{P}$ heißt *maximal einstellig*, wenn $E \sqcap \mathcal{P}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}$ eindeutig ist, also alle Metavariablen höchstens einen Nachfolger haben können. $\mathcal{P}$ heißt *nullstellig*, wenn $E \sqcap \mathcal{P}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} = \mathrm{O}$.

Definition 6.1.8 ($\mathcal{P}$-Einbettung) Sei $\mathcal{P}$ ein Variablenschema zu $\mathcal{L}$. Falls G_1 und G_2 $\mathcal{L}$-Graphen sind, F eine p-Einbettung G_1 in G_2 ist und $pM_1 \subset \mathcal{P}$ gilt, dann heißt F auch eine *$\mathcal{P}$-Einbettung.* $\square$

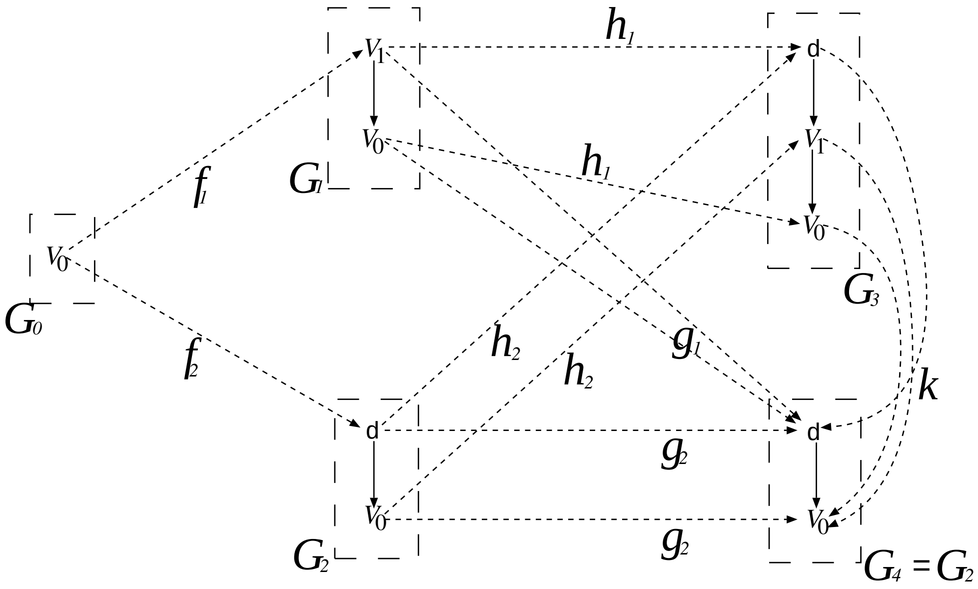
Die Komposition zweier $\mathcal{P}$-Einbettungen F und G ist offensichtlich wieder eine $\mathcal{P}$-Einbettung, da ja $pM_1 = (p_F \sqcup p_G F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil})M_1 = p_F M_1 \sqcup p_G F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil}M_1 \subset \mathcal{P} \sqcup p_G M_2 \subset \mathcal{P}$.

Außerdem ist eine $\mathcal{P}$-Einbettung immer auch eine $\mathcal{P}M_1^{\mathsf{T}}$-Einbettung, da auch $\mathcal{P}M_1^{\mathsf{T}}$ immer ein Variablenvektor ist und Metavariable weder binden noch gebunden werden können, so daß die Einbettungsbedingungen beim Übergang von $p \subset \mathcal{P}M_1^{\mathsf{T}}$ zu $\mathcal{P}M_1^{\mathsf{T}}$ erfüllt bleiben.

Die in der Literatur bisher betrachteten Kategorien von Termgraphen, wie z.B. [Stab, PPEM, CMR+, EHKPP, Plu93] sind jeweils für ein geeignetes Graphalphabet $\mathcal{L}$ und ein nullstelliges Variablenschema $\mathcal{P} = \overline{k}$ (keiner dieser Ansätze betrachtet andere Variable als Schemavariable) äquivalent zu der Kategorie aller Graphen mit $\mathcal{P}$-Einbettungen. Auch die den Ausführungen in [Ken] zugrundeliegende Kategorie totaler Morphismen fällt in diesen Rahmen.

In bezug auf die Existenz von Pushouts ist auch in dieser Kategorie — wie in allen bekannten Kategorien von Termgraphen — im allgemeinen ungewiß, ob ein Paar von Morphismen mit gemeinsamer Quelle überhaupt zu einem kommutierenden Diagramm ergänzt werden kann, da hier immer ein Unifikationsproblem zugrunde liegt.

Läßt man überdies Metavariable mit Nachfolgern zu, verwendet also ein nicht nullstelliges Variablenschema, kommen Probleme der Unifikation höherer Ordnung (siehe z.B. [Kni89]) dazu, nämlich daß die Eindeutigkeitsbedingung verletzt sein kann, wie im folgenden Bild illustriert wird:



Die Paare (g_1, g_2) und (h_1, h_2) sind beide allgemeinste Unifikatoren für (f_1, f_2) in dem Sinne, daß es keine nichttrivialen Faktorisierungen mehr gibt. Jedoch sind sie gegenseitig nicht faktorisierbar, da (es gilt ja $g_2 = \mathrm{I}$) zwar $g_2 h_2 = h_2$, aber $g_1 h_2 \neq h_1$, und andererseits $h_2 k = g_2$, aber $h_1 k \neq g_1$.

Es kann daher keinen Pushout zu f_1 und f_2 geben.

6.2 Bildabschluß

Wir ordnen den von den Einbettungsbedingungen nicht erfaßten Metavariablen als Bilder Intervalle bzw. Abschnitte zu. Um der einfacheren Begriffsbildung willen bedienen wir uns folgender

Konvention 6.2.1 (Intervallkontext und Abschnittskontext) Um nicht für alle Konzepte zwei verschiedene Begriffe definieren zu müssen, je nachdem ob die Bilder von Schemavariablen als Intervalle oder als Abschnitte aufgefaßt werden sollen, bedienen wir uns verschiedener *Kontexte*, nämlich des **Intervallkontextes** und des **Abschnittskontextes**. Gewisse Begriffe haben je nach Kontext verschiedene Bedeutung; wenn eine Aussage in beiden Kontexten gilt, so wird dies nicht extra hervorgehoben. □

Für die Definition des *Bildabschlusses* füllen wir einfach den konstanten Teil $F_{\lceil\bar{p}\rceil}$ einer p-Einbettung F auf, indem wir den Metavariablen aus p die inneren Knoten der Bilder ihrer jeweiligen Punktintervalle bzw. -abschnitte zuordnen:

Definition 6.2.2 Der **Bildabschluß** $F^{\lfloor p\rfloor}$ einer p-Einbettung F von G_1 in G_2 wird im Intervallkontext definiert als:

$$F^{\lfloor p\rfloor} := F_{\lceil\bar{p}\rceil} \sqcup \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1 \mid x \subset p \bullet x^{\mathsf{T}}\underline{[x]F}\}$$

und im Abschnittskontext als

$$F^{\lfloor p\rfloor} := F_{\lceil\bar{p}\rceil} \sqcup \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1 \mid x \subset p \bullet x^{\mathsf{T}}\underline{[x\rrbracket F}\}$$

Außerdem verwenden wir noch den *variablen Teil* des Bildabschlusses:

$$F^{\underline{\lfloor p\rfloor}} := F^{\lfloor p\rfloor} \sqcap p^{\mathsf{T}}\mathrm{L}$$ □

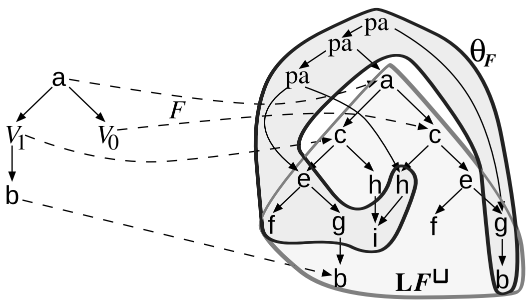
Offensichtlich gilt $F^{\lfloor p \rfloor} = F_{\overline{\lceil p \rceil}} \sqcup F^{\underline{\lfloor p \rfloor}}$ und $F_{\overline{\lceil p \rceil}} \sqcap F^{\underline{\lfloor p \rfloor}} = \mathrm{O}$. Zur Klarstellung des Kontextes werden wir auch Formulierungen wie „mit auf Intervallen (bzw. Abschnitten) basierendem Bildabschluß" verwenden.

So, wie man $\mathrm{L}F^{\lfloor p \rfloor}$ als *den* Bildabschluß von F auffassen kann, da dieser Vektor alle im Bildabschluß irgendeines Urbildknotens liegenden Knoten umfaßt, kann man sein Komplement, den Vektor $\overline{\mathrm{L}F^{\lfloor p \rfloor}}$, als *Kontext* auffassen. Da aus diesem Kontext noch Kanten in die Bilder von Metavariablen hinein existieren können, und die so aus $\overline{\mathrm{L}F^{\lfloor p \rfloor}}$ heraus erreichbaren Knoten in gewissem Sinne „sich der vollständigen Kontrolle durch F entziehen", definieren wir folgenden etwas modifizierten Begriff:

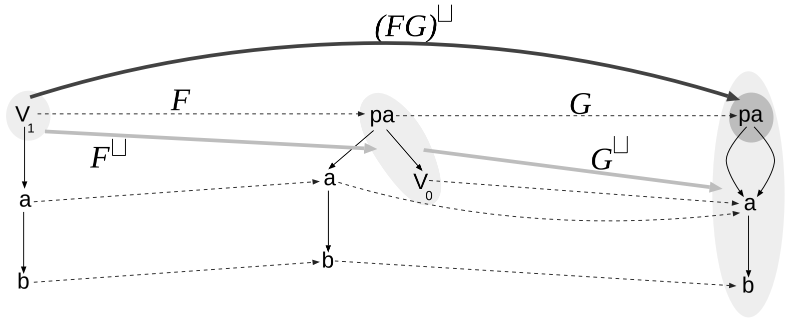
Definition 6.2.3 Der **erweiterte Kontext** $\theta_F : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_2$ einer p-Einbettung F von G_1 in G_2 ist folgendermaßen definiert:

$$\theta_F := \overline{\mathrm{L}F^{\lfloor p \rfloor}}(D_2 \sqcap \overline{F^{\mathsf{T}}\mathrm{L}F})^* \qquad \square$$

Im folgenden Beispiel sind zu einer Einbettung F ihr Bildabschluß $\mathrm{L}F^{\lfloor p \rfloor}$ und ihr erweiterter Kontext angegeben. In solchen Zeichnungen werden wir häufig auf die explizite Angabe der Metavariablenvektoren von Einbettungen verzichten (Metavariable sind dann meist mit V_n oder U_n markiert) und $F_{\sqcap}$ für $F_{\overline{\lceil p \rceil}}$ sowie $F^{\sqcup}$ für $F^{\lfloor p \rfloor}$ schreiben.

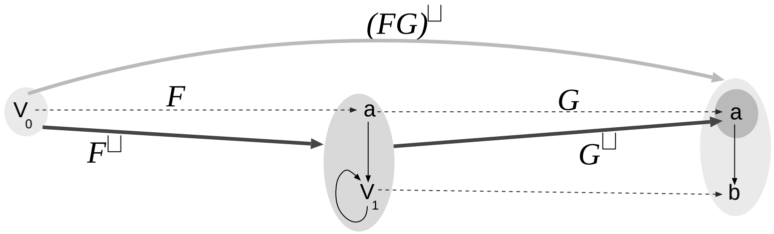


Ein wichtiges Problem ist die Frage nach Distributivität des Bildabschlusses über die Komposition. Im folgenden Bild ist ein Beispiel dargestellt, in dem die Inklusion $F^{\lfloor p_F \rfloor} G^{\lfloor p_G \rfloor} \subset (FG)^{\lfloor p \rfloor}$ nicht gilt (mit $p = p_F \sqcup p_G F^{\mathsf{T}}_{\overline{\lceil p \rceil}}$ wie in Lemma 6.1.4):



Dieser Effekt ist allerdings hinnehmbar — in speziellen Kontexten könnte Abhilfe geschaffen werden, was im allgemeinen aber nicht sehr erstrebenswert ist.

Viel wesentlicher ist, daß auch $(FG)^{\lfloor p \rfloor} \subset F^{\lfloor p_F \rfloor} G^{\lfloor p_G \rfloor}$ nicht immer gilt:



Als technische Hilfsbegriffe für spätere Beweise definieren wir noch zwei Relationen zwischen den konkreten Pfaden in Quelle und Ziel einer Einbettung:

Definition 6.2.4 (Urbildpfadpräfix) Sei F eine p-Einbettung von G_1 in G_2. m, n, n_0 und n_1 seien Variable für (abstrakte) Pfade, i, j für Kantenmarkierungen und α für Knoten in G_1.

Für konkrete Pfade $\zeta : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1 \times \mathcal{E}^*$ in G_1 und konkrete Pfade $\xi : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2 \times \mathcal{E}^*$ in G_2 führen wir zwei Prädikate ein, nämlich

ζ ist *Urbildpfadpräfix* (unter F) von ξ,	in Zeichen:	$\zeta \underset{F}{\vdash} \xi$	und
ζ ist *Urbildpfad* (unter F) von ξ,	in Zeichen:	$\zeta \underset{F}{\models} \xi$.	

Definiert sind sie als kleinste Prädikate, die folgendes erfüllen: Ein leerer konkreter Pfad ist Urbildpfadpräfix jedes im entsprechenden Bildpunkt beginnenden konkreten Pfades:

$$\{\!|\, \alpha, \underline{empty} \,|\!\} \underset{F}{\vdash} \{\!|\, \alpha F, n \,|\!\} \ ,$$

und er ist Urbildpfad eines solchen konkreten Pfades, falls dieser ganz innerhalb des Bildabschlusses des Urbildpunktes verläuft:

$$\{\!|\, \alpha F, n \,|\!\} \mathbb{Z}_2 \subset \alpha F^{\lfloor p \rfloor} \Rightarrow \{\!|\, \alpha, \underline{empty} \,|\!\} \underset{F}{\models} \{\!|\, \alpha F, n \,|\!\}$$

Ein Urbildpfad bzw. Urbildpfadpräfix kann „rückwärts“ um eine Kante verlängert werden, wenn das entsprechende Präfix $\{\!|\, \alpha F, n_0 \,|\!\}$ des Bildpfades ganz im Bildabschluß des neuen Urbildpfad-Ausgangspunktes α verläuft, um dann mit der nächsten Kante auf den Ausgangspunkt des alten Bildpfades zu stoßen:

$$\left.\begin{array}{l} \{\!|\, \alpha S_{1,i}, m \,|\!\} \begin{array}{c}\underset{F}{\vdash} \\ \underset{F}{\models}\end{array} \{\!|\, \alpha S_{1,i} F, n_1 \,|\!\} \\ \{\!|\, \alpha F, n_0 \,|\!\} \mathbb{Z}_2 \subset \alpha F^{\lfloor p \rfloor} \\ \alpha S_{1,i} F = \{\!|\, \alpha F, n_0 \underline{snoc}_j \,|\!\} Z_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \{\!|\, \alpha, i : m \,|\!\} \begin{array}{c}\underset{F}{\vdash} \\ \underset{F}{\models}\end{array} \{\!|\, \alpha F, n_0 \underline{conc}_{j:n_1} \,|\!\}$$

(Wir schreiben hierbei $i : m$ für $\{\!|\, i, m \,|\!\} \underline{cons}$, was nach dem Prinzip ternärer Relationen auch $i \underline{cons}_m$ geschrieben werden kann. Auch $\underline{snoc}$ und $\underline{conc}$ fassen wir so als ternäre Relationen auf.) □

$\underset{F}{\models}$ und $\underset{F}{\vdash}$ können auch als Relationen $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{E}^* \leftrightarrow \mathcal{V}_2 \times \mathcal{E}^*$ aufgefaßt und verwendet werden. Wenn $\{\!|\, \alpha, m \,|\!\}$ Urbildpfad von $\{\!|\, \alpha F, n \,|\!\}$ ist, dann gilt $\{\!|\, \alpha F, n \,|\!\} Z_2 \subset \{\!|\, \alpha, m \,|\!\} Z_1 F^{\lfloor p \rfloor}$, oder mit $\underset{F}{\models}$ als Relation „punktfrei“ formuliert: $\underset{F}{\models} Z_2 \subset Z_1 F^{\lfloor p \rfloor}$.

6.3 Kohärenz von Einbettungen

Naive Betrachtung könnte suggerieren, daß eine p-Einbettung sich in bezug auf Distributivität des Bildabschlusses eher wohlverhält, wenn Knoten aus p nur auf kohärente Intervalle abgebildet werden. Daß dem nicht ohne weiteres so ist, zeigten schon die obigen Gegenbeispiele, deren Einbettungen allesamt kohärent im Sinne der folgenden Definition sind:

Definition 6.3.1 Eine p-Einbettung von G_1 in G_2 heißt **kohärent**, wenn für jeden Punkt $x : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ mit $x \subset p$ das Bildintervall $[x]F$ (bzw. der Bildabschnitt $[x\rrbracket F$) kohärent ist.

F heißt **halbkohärent**, wenn für jeden Punkt $x : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ mit $x \subset p$ das Bildintervall $[x]F$ (bzw. der Bildabschnitt $[x\rrbracket F$) halbkohärent ist, also genau wenn $D_1 F \subset F D_2^*$. □

Die zentrale Eigenschaft kohärenter Einbettungen ist die folgende:

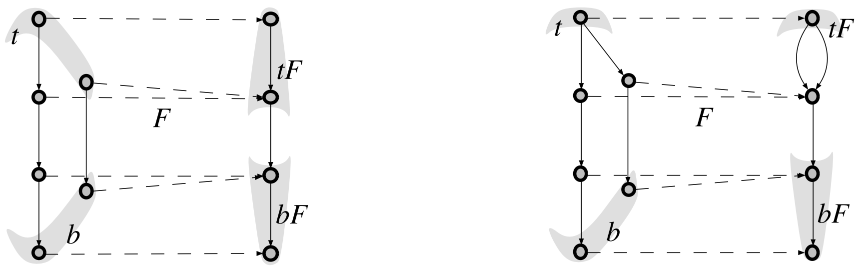
Lemma 6.3.2 (Kommutativität mit der Assoziierten bei Kohärenz)
Für jede kohärente p-Einbettung von G_1 in G_2 gilt: $D_1 F \subset F D_2^*$ und $D_1^* F \subset F D_2^*$. □

Beweis: Sei $x : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ ein beliebiger Knoten aus G_1. Falls $x \subset \overline{p}$, so gilt

$$xD_1 F \subset xF_{\lceil\overline{p}\rceil} F^{\top}_{\lceil\overline{p}\rceil} D_1 F \subset xF_{\lceil\overline{p}\rceil} D_2 F^{\top} F \subset xF_{\lceil\overline{p}\rceil} D_2 \subset xF_{\lceil\overline{p}\rceil} D_2^* \ .$$

Andernfalls gilt $x \subset p$, und es sei im Intervallkontext $\mathsf{a} := [x]$, im Abschnittskontext $\mathsf{a} := [\![x]\!]$. Daß a kohärent ist, heißt $\mathrm{L}\, b_{\mathsf{a}} \subset \mathrm{L}\, t_{\mathsf{a}} \sqcup \underline{\mathsf{a}} D_2$, also $xD_1 F \subset xF \sqcup \underline{\mathsf{a}} D_2$, und wir erhalten: $xD_1 F \subset xF \sqcup xFD_2^* D_2 = xFD_2^*$. Insgesamt haben wir damit die erste Behauptung gezeigt; die zweite ergibt sich daraus mit Lemma 2.2.6. □

Eine naheliegende Frage ist, ob die Komposition zweier kohärenter Einbettungen wieder kohärent ist. Hierzu untersuchen wir die Kohärenz von Bildintervallen kohärenter Intervalle. In beiden im folgenden Bild dargestellten Fällen ist diese nicht gegeben; Beschränkung der oberen Grenze auf einen Punkt bleibt hier also wirkungslos:



Die Beschränkung der unteren Grenze auf einen Punkt hingegen reicht zur Kohärenz des Bildintervalles hin — für Bildabschnitte müssen wir die Klärung dieser Frage bis Lemma 7.6.6 aufschieben):

Lemma 6.3.3 (Kohärenz von Bildintervallen im Intervallkontext)
Gegeben sei im Intervallkontext eine kohärente Einbettung F von G_1 in G_2. Wenn nun in dem kohärenten Intervall a in G_1 der Wertebereich der unteren Grenze, $\mathrm{L}\, b_{\mathsf{a}}$, ein Punkt ist, dann ist auch das Bildintervall $\mathsf{a}F$ kohärent.

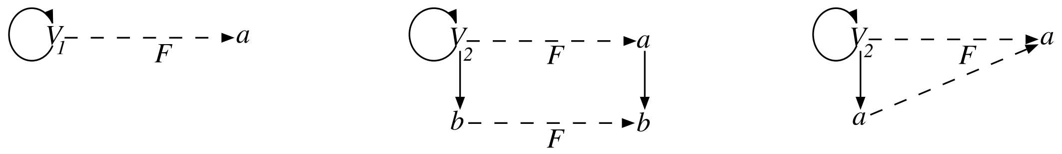
Beweis: Sei $c : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ mit $c \subset t_{\mathsf{a}}$ ein Punkt der oberen Grenze von a, und zwar so, daß $\mathrm{L}\, b_{\mathsf{a}} \subset cD_1^*$. Ein solches c existiert nach der Kohärenz von a. Nach der Kohärenz von F gilt nun $\mathrm{L}\, b_{\mathsf{a}} F \subset cD_1^* F \subset cFD_2^*$, also gibt es einen Pfad m von cF nach $\mathrm{L}\, b_{\mathsf{a}} F$, d.h. $\mathrm{L}\, b_{\mathsf{a}} F = cFZ_{2,m}$. Sei nun n das größte Präfix von m, auf dem (von cF aus) $\mathrm{L}\, b_{\mathsf{a}} F$ nicht liegt, so liegt $cFZ_{2,n}$ in $\underline{\mathsf{a}F}$ (da $\mathrm{L}\, b_{\mathsf{a}} F$ ja Punkt und die gesamte untere Grenze ist), und damit gilt $\mathrm{L}\, b_{\mathsf{a}} F \subset cFZ_{2,n_0} D_2 \subset \underline{\mathsf{a}F} D_2$, womit die Kohärenz von $\mathsf{a}F$ bewiesen ist. □

Für den Intervallkontext ergibt sich daraus direkt die Kohärenz der Komposition zweier kohärenter Einbettungen F und G, sofern Metavariable von F höchstens einen Nachfolger haben.

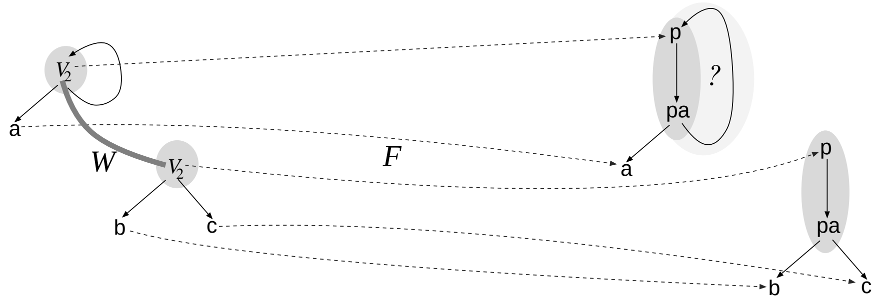
Satz 6.3.4 (Kohärenz der Komposition im Intervallkontext)
Seien im Intervallkontext drei Graphen G_1, G_2 und G_3, zwei Variablenvektoren $p_F : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_1$ und $p_G : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_2$ sowie eine kohärente p_F-Einbettung F von G_1 in G_2 und eine kohärente p_G-Einbettung G von G_2 in G_3 gegeben. Wenn nun $ME \sqcap p_F^{\top}\mathrm{L}$ eindeutig ist, d.h. wenn die Variablen in p_F jeweils höchstens einen Nachfolger haben, dann ist FG kohärent. □

6.4 Konsistenz

Das oben dargestellte Gegenbeispiel zu $(FG)^{\lfloor p \rfloor} \subset F^{\lfloor p_F \rfloor} G^{\lfloor p_G \rfloor}$ zeigt sein unerwünschtes Verhalten, da die schlingentragende Variable ein leeres Bild hat, ohne jedoch echte Nachfolger zu besitzen, die das Bild „*übernehmen*“ könnten. So ist in allen drei Beispielen des folgenden Bildes $pF^{\lfloor p \rfloor} = \mathrm{O}$; doch nur im dritten Bild gilt dennoch $\mathrm{L}F^{\lfloor p \rfloor} = \mathrm{L}$, da der Nachfolger „$a$“ der Metavariablen „$V_2$“ ihr Bild „übernimmt“.



Würde man für das Bildintervall von Variablen von einer modifizierten Definition des Punktintervalles ausgehen, so könnte das Bild von schlingentragenden Variablen auch nichtleer sein. Allerdings müßten dann (sobald wir im Rahmen der Homomorphismen zwischen den Bildern verschiedener Knoten einer Variablen die Existenz von Korrespondenzen fordern werden) alle Knoten dieser Variablen Schlingen tragen, sonst käme man mit dem hier vorgestellten „*kantenfreien*“ Formalismus in Situationen wie der folgenden in Schwierigkeiten, da die fragliche Kreiskante intuitiv offensichtlich nicht zum Bildintervall der entsprechenden Variablen gehören sollte, unsere Definition eine solche Differenzierung aber nicht erlaubt.



Das Problem beim Bildabschluß sind allerdings nicht nur schlingenbelastete Variable, sondern allgemeiner „Variablenblockaden“, d.h. Kreise oder unendliche Ketten, auf denen nur in p enthaltene Variable liegen, die dabei alle ein leeres Bild haben, also durch F auf den gleichen Knoten abgebildet werden. Etwas allgemeiner beschreiben wir zunächst einmal die entsprechende *bildstationäre Assoziierte* als folgende Relation: $D_{p,F} = p^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap D_1 \sqcap FF^{\mathsf{T}}$. Knoten, die im Initialteil (siehe Definition 2.3.2) dieser Relation liegen, sind harmlos; die „gefährlichen“ werden also durch folgenden Vektor charakterisiert: $\omega := \overline{J(D_{p,F})}$. Die folgende Bedingung unterbindet nun „Heraustrennung“ durch Variablenblockaden:

$$F \sqcap \omega^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \subset (D^*_{p,F} \sqcap \overline{\mathrm{L}\omega})F \ ,$$

d.h. das Bild einer Blockade ist auch Bild eines von ihr aus erreichbaren, aber gerade schon außerhalb liegenden Knotens. Eine äquivalente Formulierung ist:

$$\omega^{\mathsf{T}}\mathrm{L} = (\omega^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap D^*_{p,F} \sqcap \overline{\mathrm{L}\omega})\mathrm{L} \ ,$$

d.h. von jedem Punkt einer Blockade aus kann über eine Verzweigung kohärent entkommen werden. Mit Hilfe von Überlegungen zum Initialteil gelangt man dann zu folgender Form:

$$D^*_{p,F}\overline{D_{p,F}\mathrm{L}} = \mathrm{L} \ ,$$

d.h. die bildstationäre Assoziierte „terminiert angelisch“.

Da die oben dargestellte Heraustrennung durch Variablenblockaden ein sehr störender Effekt ist, werden wir sie in der weiteren Betrachtung durch Verwendung dieser Bedingung als Forderung nach *Konsistenz* von vornherein unterbinden.

Definition 6.4.1 (Konsistenz von Einbettungen) [←124]

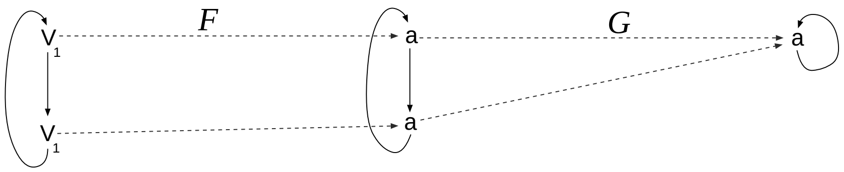
Seien G_1 und G_2 zwei Graphen, sei p ein Variablenvektor zu G_1, und sei F eine Einbettung von G_1 in G_2. Wie oben sei die *bildstationäre Assoziierte* definiert als $D_{p,F} = p^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap D_1 \sqcap FF^{\mathsf{T}}$. Dann heißt F *konsistent*, wenn $D^*_{p,F}\overline{D_{p,F}\mathrm{L}} = \mathrm{L}$. □

Um zu einem gegebenen Knoten herauszufinden, welche Nachfahren das eigene Bild nun in ihr Bildintervall übernehmen, definiert man sich eine geeignete Relation direkt aus der Konsistenzbedingung heraus:

Definition 6.4.2 Der **Blockadenausgang** $E_{p,F} : \mathcal{V}_1 \leftrightarrow \mathcal{V}_1$ einer p-Einbettung von G_1 in G_2 ist wie folgt definiert:

$$E_{p,F} = D^*_{p,F} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, D^\top_{p,F}} \qquad \square$$

Konsistenz einer p-Einbettung F bedeutet dann, daß $E_{p,F}$ total ist.
Die Komposition zweier konsistenter Einbettungen ist im allgemeinen nicht wieder konsistent, so zum Beispiel in folgendem Bild.



Dabei wird davon ausgegangen, daß $p_G \neq \mathrm{L}$, da G sonst nicht konsistent wäre. Ließe man allerdings die Kanten in G_2 (und dann nach Belieben auch in G_3) wegfallen, so wäre G bei beliebigem p_G konsistent; F jedoch wäre nicht mehr kohärent.

Potentielle Blockaden in von einem beliebigen Graphen G_1 ausgehenden p-Einpassungen werden *a priori* unterbunden, wenn $D_1 \sqcap p^\top\mathrm{L}$ progressiv-endlich ist. Da dies eine Bedingung nur an den Graphen G_1 ist, können wir durch Einschränkung der möglichen Ausgangsgraphen bereits sicherstellen, daß betrachtete Einbettungen konsistent sind. Daher definieren wir:

Definition 6.4.3 Ein Graph G heißt **p-zulässig** (für einen Metavariablenvektor p_G in G_2), wenn $D \sqcap p^\top\mathrm{L}$ progressiv-endlich ist. Entsprechend heißt ein Graph *$\mathcal{P}$-zulässig* (für ein Variablenschema $\mathcal{P}$), wenn er $\mathcal{P}M^\top$-zulässig ist. $\square$

Damit ist jede von einem $\mathcal{P}$-zulässigen Graphen G ausgehende $\mathcal{P}$-Einbettung konsistent. (Ferner sind endliche DAGs $\mathcal{P}$-zulässig für beliebiges $\mathcal{P}$.) Insbesondere ist auf $\mathcal{P}$-zulässigen Graphen auch die Komposition konsistenter Einbettungen wieder konsistent.

In einem p-zulässigen Graphen G betrachten wir nun für einen in p enthaltenen Variablenvektor q diejenigen kohärenten p-Einbettungen F, für die genau die Schemavariablen aus q leer abgebildet werden, für die also gilt:

$$q = \bigsqcup\{r : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V} \mid rF^{\lfloor p \rfloor} = \mathrm{O} \bullet r\} \qquad (= p \sqcap \mathrm{L}(F^\top \sqcap F^\top D^\top)\,) \ .$$

(Hierdurch wird erzwungen, daß die verschiedenen Knoten einer Variablen nur simultan leer abgebildet werden können.) Es stellt sich heraus, daß für jedes solche F die Blockadenausgangsrelation $E_{p,F}$ identisch $D^*_{\lceil q \rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, D^\top_{\lceil q \rceil}}$ ergibt, denn es gilt:

$$D_{p,F} = p^\top\mathrm{L} \sqcap D \sqcap FF^\top = D \sqcap p^\top\mathrm{L} \sqcap (F \sqcap DF)\mathrm{L} = D \sqcap q^\top\mathrm{L} = D_{\lceil q \rceil}$$

Bei der zweiten Gleichheit folgt hierbei „$\subset$" aus einer Modalregel; für „$\supset$" benötigt man die Kohärenz von F. Daher definieren wir:

Definition 6.4.4 [←159] Die **q-Ignoration** in einem p-zulässigen Graphen G für einen in p enthaltenen Variablenvektor q ist definiert als:

$$\mathcal{Z}_{G,q} := D^*_{\lceil q \rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, D^\top_{\lceil q \rceil}} \qquad \square$$

Falls also $q = p \sqcap \mathrm{L}(F^\top \sqcap F^\top D^\top)$, dann gilt $E_{p,F} = \mathcal{Z}_{G,q}$ und $F \subset \mathcal{Z}_{G,q} F^{\lfloor p \rfloor}$. Falls $q \subset p \sqcap \mathrm{L}(F^\top \sqcap F^\top D^\top)$, F also wenigstens die Schemavariable aus q leer abbildet, gilt immer noch: $F = \mathcal{Z}_{G,q} F$.

Die entscheidende Eigenschaft des Blockadenausgangs ist $F \sqcap E_{p,F}\mathrm{L} \subset E_{p,F}F^{\lfloor p \rfloor}$, also insbesondere:

$$F \text{ konsistent} \quad \Rightarrow \quad F \subset E_{p,F}F^{\lfloor p \rfloor} \quad \left(\quad \Rightarrow \quad F \subset D_1^* F^{\lfloor p \rfloor} \quad \right)$$

und sogar

$$F \text{ konsistent} \quad \Rightarrow \quad F = E_{p,F}(F \sqcap F^{\lfloor p \rfloor}) \;.$$

Damit erhalten wir ein wichtiges Erreichbarkeitsresultat (allerdings nur im Intervallkontext):

Lemma 6.4.5 (Konsistenz und Erreichbarkeit) [←73] Sei F eine konsistente p-Einbettung von G_1 in G_2. Dann gilt im Intervallkontext: $FD_2^* \subset D_1^* F^{\lfloor p \rfloor}$.

Beweis: Da im Intervallkontext $F^{\lfloor p \rfloor}D_2 \subset D_1 F \sqcup F^{\lfloor p \rfloor}$ gilt, erhalten wir:

$$\begin{array}{rcll}
FD_2 & \subset & D_1^* F^{\lfloor p \rfloor} D_2 & F \text{ konsistent} \\
 & = & D_1^*(F_{\lceil \overline{p} \rceil} D_2 \sqcup F^{\underline{\lfloor p \rfloor}} D_2) & \text{Definition } F^{\lfloor p \rfloor} \\
 & \subset & D_1^*(D_1 F_{\lceil \overline{p} \rceil} \sqcup D_1 F \sqcup F^{\underline{\lfloor p \rfloor}}) & \text{Intervalleigenschaften} \\
 & \subset & D_1^*(D_1 D_1^* F^{\lfloor p \rfloor} \sqcup F^{\underline{\lfloor p \rfloor}}) & F \text{ konsistent, Def. } F^{\lfloor p \rfloor} \\
 & \subset & D_1^* F^{\lfloor p \rfloor} &
\end{array}$$

Hieraus folgt zusammen mit $F \subset D_1^* F^{\lfloor p \rfloor}$ sofort die Behauptung. □

Da $F^{\lfloor p \rfloor} \subset FD_2^*$, gilt für konsistente Einbettungen im Intervallkontext auch $\mathrm{L}F^{\lfloor p \rfloor} \subset \mathrm{L}FD_2^* \subset \mathrm{L}D_1^* F^{\lfloor p \rfloor} = \mathrm{L}F^{\lfloor p \rfloor}$, und damit insbesondere: $\mathrm{L}F^{\lfloor p \rfloor}D_2 \subset \mathrm{L}FD_2^+ \subset \mathrm{L}F^{\lfloor p \rfloor}$, also:

Satz 6.4.6 [←73] Für jede konsistente p-Einbettung F gilt im Intervallkontext $\mathrm{L}F^{\lfloor p \rfloor} = \mathrm{L}FD_2^*$, und der Vektor $\mathrm{L}F^{\lfloor p \rfloor}$ ist offen. □

Ausgangspunkt für die Einführung der Konsistenz war das Problem der Distributivität des Bildabschlusses über die Komposition. Als Vorbereitung betrachten wir zunächst das Bild eines einzelnen Intervalles bzw. Abschnittes unter einer konsistenten Abbildung:

Lemma 6.4.7 (Intervalle und konsistente Einbettungen) [←71, 93, 124]
Sei F eine konsistente p-Einbettung von G_1 in G_2. Dann gilt für jedes Intervall $\mathfrak{a}$ im Intervallkontext die Inklusion $\underline{\mathfrak{a}F} \subset \underline{\mathfrak{a}}F^{\lfloor p \rfloor}$. Entsprechendes gilt auch für jeden Abschnitt $\mathfrak{a}$, wenn man den auf Abschnitten basierenden Bildabschluß verwendet.

Beweis: Sei $\mathfrak{a} = [t, b]$. Wir zeigen durch Induktion über $j \in \mathbb{N}$, daß für jeden Punkt $\tau : \mathbb{1} \to \mathcal{T}$ gilt: $(\tau tF \sqcap \overline{\mathrm{L}bF})(D_2 \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}})^j \subset \tau\underline{\mathfrak{a}}F^{\lfloor p \rfloor}$.

Für $j = 0$ nehmen wir einen beliebigen Punkt $x : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ mit $x \subset \tau tF \sqcap \overline{\mathrm{L}bF}$, also auch $x \subset (\tau t \sqcap \overline{\mathrm{L}b})F$. Sei nun $a \subset (\tau t \sqcap \overline{\mathrm{L}b}) \sqcap xF^{\mathsf{T}}$ ein Zwischenpunkt, dann gilt $x \subset aF \subset aE_{p,F}F^{\lfloor p \rfloor}$, wobei die Pfade von a zu $aE_{p,F}$ sämtlich innerhalb von $\underline{\mathfrak{a}}$ verlaufen, da ja sonst $x \subset \mathrm{L}bF$. Also gilt $x \subset \tau\underline{\mathfrak{a}}F^{\lfloor p \rfloor}$.

Sei nun $x \subset (\tau tF \sqcap \overline{\mathrm{L}bF})(D_2 \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}})^{j+1}$, dann gibt es ein $r \subset (\tau tF \sqcap \overline{\mathrm{L}bF})(D_2 \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}})^j$, so daß $x \subset r(D_2 \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}})$. Nach Induktionsannahme gibt es ein $a \subset \tau\underline{\mathfrak{a}}$ mit $r \subset aF^{\lfloor p \rfloor}$.

Im Falle $x \subset aF^{\lfloor p \rfloor}$ ist nichts weiter zu beweisen.

Andernfalls gibt es, falls $\mathfrak{a}$ ein Intervall ist, sicher ein $i : \mathbb{1} \to \mathcal{E}$ mit $x \subset aS_{1,i}F$.

Falls $\mathfrak{a}$ ein Abschnitt ist, muß man noch die Möglichkeit untersuchen, daß x der Selbstkapselungsgrenze des Bildes von a entstammt: $x \subset \mathrm{L}[\widehat{a]\!]}F$. Auch hier unterscheiden wir wieder zwei Fälle:

i) x liegt auf jedem Pfad, der von τtF aus aF erreicht. Dann ist $x \subset (\tau tF \sqcap \overline{\mathrm{L}bF})(D_2 \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}})^k$ mit $k \leq j$, also $x \subset \tau\underline{\mathfrak{a}}F^{\lfloor p \rfloor}$.

ii) Andernfalls muß mindestens ein Knoten t_1 aus τtF, von dem aus aF erreichbar ist, selbst von x aus erreichbar sein. Damit wäre aber $t_1 \subset xC_2$, was ein Widerspruch zu $x \subset \tau\underline{\mathfrak{a}F} \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}F}$ wäre, da letzteres ja als Abschnitt selbstkapselungsfrei ist.

Wir können also nun mit dem oben gewählten i weiterarbeiten: Da im Widerspruch zu den Annahmen aus $aS_{1,i} \subset \mathrm{L}b$ folgen würde, daß $x \subset \mathrm{L}bF$, gilt $aS_{1,i} \subset \overline{\mathrm{L}b}$ und damit auch $aS_{1,i} \subset \tau\underline{\mathfrak{a}}$. Schließlich erhält man $x \subset aS_{1,i}E_{p,F}F^{\lfloor p \rfloor}$, und damit ebenso wie bei $j = 0$ das erwartete $x \subset \tau\underline{\mathfrak{a}}F^{\lfloor p \rfloor}$. □

Satz 6.4.8 (Subdistributivität des Bildabschlusses) [←72]
Gegeben seien drei Graphen G_1, G_2 und G_3, eine p_F-Einbettung F von G_1 nach G_2 und eine konsistente p_G-Einbettung G von G_2 nach G_3. Dann gilt (mit $p = p_F \sqcup p_G F^{\mathsf{T}}$):

$$(FG)^{\lfloor p \rfloor} \subset F^{\lfloor p_F \rfloor} G^{\lfloor p_G \rfloor}$$

Beweis: Durch Abschätzung:

$$\begin{aligned}
(FG)^{\lfloor p \rfloor} &= \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1 \mid x \subset p \bullet x^{\mathsf{T}}\underline{[x]FG}\} \sqcup (FG)_{\lceil \overline{p} \rceil} \\
&\subset \quad \langle \text{Lemma 6.4.7} \rangle \\
&\quad\ \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1 \mid x \subset p \bullet x^{\mathsf{T}}\underline{[x]F}\, G^{\lfloor p_G \rfloor}\} \sqcup F_{\lceil \overline{p_F} \rceil}\, G_{\lceil \overline{p_G} \rceil} \\
&= (p^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap F^{\lfloor p_F \rfloor})\, G^{\lfloor p_G \rfloor} \sqcup (F_{\lceil \overline{p_F} \rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}p_G})\, G^{\lfloor p_G \rfloor} \\
&= ((p_F^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap F^{\lfloor p_F \rfloor}) \sqcup (F p_G^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \overline{p_F^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap F^{\lfloor p_F \rfloor}) \sqcup (\overline{p_F^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap \overline{F p_G^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap F))\, G^{\lfloor p_G \rfloor} \\
&= \quad \left\langle \overline{p_F^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap F^{\lfloor p_F \rfloor} = \overline{p_F^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap F \right\rangle \\
&\quad\ ((p_F^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap F^{\lfloor p_F \rfloor}) \sqcup (\overline{p_F^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap F))\, G^{\lfloor p_G \rfloor} \\
&= F^{\lfloor p_F \rfloor}\, G^{\lfloor p_G \rfloor}
\end{aligned}$$

□

Für den variablen Teil des Bildabschlusses der Komposition ergibt sich aus $(FG)_{\lceil \overline{p} \rceil} = F_{\lceil \overline{p_F} \rceil}\, G_{\lceil \overline{p_G} \rceil}$ noch:

$$(FG)^{\underline{\lfloor p \rfloor}} \subset F^{\underline{\lfloor p_F \rfloor}} G^{\underline{\lfloor p_G \rfloor}} \sqcup F^{\underline{\lfloor p_F \rfloor}} G_{\lceil \overline{p_G} \rceil} \sqcup F_{\lceil \overline{p_F} \rceil}\, G^{\underline{\lfloor p_G \rfloor}} \quad .$$

6.5 Gerüst von Einbettungen und Zyklizität

Analog zur Definition des Bildabschlusses können wir auch die Gerüstbegriffe von Intervallen bzw. Abschnitten und auch den Begriff der Selbstkapselungsgrenze auf Einbettungen übertragen:

Definition 6.5.1 Das **Gerüst** einer p-Einbettung F von G_1 nach G_2 ist definiert als:

$$F^{<p>} = F_{\lceil \overline{p} \rceil} \sqcup \bigsqcup\{n : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1 \mid n \subset p \bullet n^{\mathsf{T}}\underline{[n]\!]F}\}$$

Analog definieren wir das *Kapselgerüst von F* als:

$$F^{\blacktriangleleft p \blacktriangleright} = F_{\lceil \overline{p} \rceil} \sqcup \bigsqcup\{n : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1 \mid n \subset p \bullet n^{\mathsf{T}}\underline{[n]\!]F}\}$$

(Im Intervallkontext sind natürlich statt der Punktabschnitte $[n]\!]$ hier jeweils die Punktintervalle $[n]$ zu setzen.) Wir führen wieder platzsparendere Notationen für die Einschränkungen auf den variablen Anteil ein:

$$F^{\underline{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}} := F^{\blacktriangleleft p \blacktriangleright} \sqcap p^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \quad , \text{ und } \qquad F^{\underline{<p>}} := F^{<p>} \sqcap p^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \quad .$$

Schließlich ist die *Selbstkapselungsgrenze* von F definiert als

$$F^{\underline{]p[}} := \bigsqcup\{n : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1 \mid n \subset p \bullet n^{\mathsf{T}}\widehat{[n]\!]}\}$$

□

Mit Hilfe des Gerüstes läßt sich ein geeigneter Begriff von Nichtzyklizität für Einbettungen definieren, und zwar in dem Sinne, daß eine nichtzyklische Einbettung zwischen ihren Bildknoten keine Kreise einführt, die im Urbild nicht schon vorhanden wären.

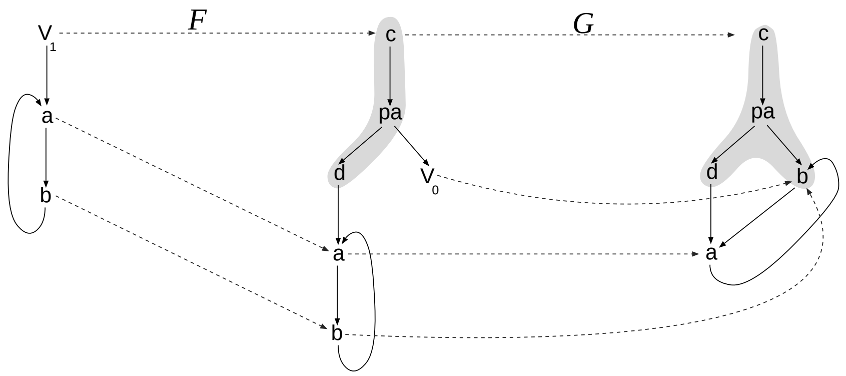
Definition 6.5.2 Eine p-Einbettung F von G_1 nach G_2 heißt **nichtzyklisch**, falls

$$F^{<p>}(F^{\lfloor p \rfloor})^{\mathsf{T}} \sqcap D_1^+ \subset \mathbb{I} \ . \qquad \square$$

Um schon vorhandene Kreise nicht auszuschließen, darf nicht „$\subset \mathbb{O}$“ gefordert werden. Offensichtlich ist eine kohärente Einbettung F schon nichtzyklisch, wenn G_2 nur kreisfrei ist.

Eine Identifizierung ist nichtzyklisch genau dann, wenn die zugehörige Projektion als Einbettung aufgefaßt nichtzyklisch ist.

Die Komposition zweier nichtzyklischer Einbettungen ist allerdings nicht immer nichtzyklisch, wie schon das folgende Bild gleichzeitig mit einem Gegenbeispiel zu $(FG)^{<p>} \subset F^{<p_F>}G^{<p_G>}$zeigt:



Letztere Inklusion ergibt eine hinreichende Bedingung für die Nichtzyklizität der Komposition:

Lemma 6.5.3 (Gerüstdistributivität und Nichtzyklizität) [←73] Seien F und G zwei nichtzyklische kohärente und konsistente Einbettungen mit $(FG)^{<p>} \subset F^{<p_F>}G^{<p_G>}$. Dann ist auch FG nichtzyklisch.

Beweis: Mit Hilfe von Satz 6.4.8 erhalten wir:

$$\begin{array}{lll}
(FG)^{<p>}(FG^{\lfloor p \rfloor})^{\mathsf{T}} \sqcap D_1^+ & & \\
\quad \subset \ F^{<p_F>}G^{<p_G>}(G^{\lfloor p_G \rfloor})^{\mathsf{T}}(F^{\lfloor p_F \rfloor})^{\mathsf{T}} \sqcap D_1^+ & & \\
\quad \subset \ (F^{<p_F>}G^{<p_G>}(G^{\lfloor p_G \rfloor})^{\mathsf{T}} \sqcap D_1^+ F^{\lfloor p_F \rfloor})(F^{\lfloor p_F \rfloor})^{\mathsf{T}} \sqcap D_1^+ & \text{Modalregel} & \\
\quad \subset \ F^{<p_F>}(G^{<p_G>}(G^{\lfloor p_G \rfloor})^{\mathsf{T}} \sqcap (F^{<p_F>})^{\mathsf{T}} D_1^+ F^{\lfloor p_F \rfloor})(F^{\lfloor p_F \rfloor})^{\mathsf{T}} \sqcap D_1^+ & \text{Modalregel} & \\
\quad \subset \ F^{<p_F>}(G^{<p_G>}(G^{\lfloor p_G \rfloor})^{\mathsf{T}} \sqcap D_2^+)(F^{\lfloor p_F \rfloor})^{\mathsf{T}} \sqcap D_1^+ & F \text{ kohärent} & \\
\quad \subset \ F^{<p_F>}(F^{\lfloor p_F \rfloor})^{\mathsf{T}} \sqcap D_1^+ & G \text{ nichtzyk.} & \\
\quad \subset \ \mathbb{I} & F \text{ nichtzyk.} & \square
\end{array}$$

Immerhin können wir eine recht starke Bedingung angeben, die Gerüstdistributivität impliziert:

Definition 6.5.4 [←99] Eine p-Einbettung F von G_1 in G_2 heißt p_G*-definitiv* (für einen Metavariablenvektor p_G in G_2), wenn $F\underline{^{\lfloor p \rfloor}} \sqcap \mathbb{L} p_G = \mathbb{O}$, bzw. $\mathcal{P}$*-definitiv* (für ein Variablenschema $\mathcal{P}$), wenn $F\underline{^{\lfloor p \rfloor}} M_2 \sqcap \mathbb{L}\mathcal{P} = \mathbb{O}$. $\square$

Dieser Begriff ist dem der „ground substitution“ verwandt — innerhalb der Bilder der Metavariablen liegt keine Metavariable mehr, die von einer nachgeschalteten Einbettung instantiiert werden könnte.

Ohne Probleme erhalten wir:

Lemma 6.5.5 (Komposition definitiver Einbettungen)
Sei $\mathcal{P}$ ein Variablenschema, das die Markierungen von p_F und p_G enthält. Gegeben seien eine $\mathcal{P}$-definitive p_F-Einbettung F von G_1 in G_2 sowie eine $\mathcal{P}$-definitive p_G-Einbettung G von G_2 in G_3. Dann ist FG ebenfalls $\mathcal{P}$-definitiv. □

Lemma 6.5.6 (Gerüstdistributivität definitiver Einbettungen)
Für definitive Einbettungen gilt: $(FG)^{<p>} \subset F^{<p_F>} G^{<p_G>}$.

Beweis: $(FG)^{<p>} \subset F_{\lceil \overline{p_F} \rceil} G^{<p_G>} \sqcup F^{<p_F>} G_{\lceil \overline{p_G} \rceil} \subset F^{<p_F>} G^{<p_G>}$. □

Daraus erhalten wir mit Lemma 6.5.3 sofort:

Satz 6.5.7 (Komposition definitiver nichtzyklischer Einbettungen)
Sei $\mathcal{P}$ ein Variablenschema, das die Markierungen von p_F und p_G enthält. Gegeben seien eine p_F-Einbettung F von G_1 in G_2 sowie eine p_G-Einbettung G von G_2 in G_3, wobei F und G beide $\mathcal{P}$-definitiv, nichtzyklisch, kohärent und konsistent seien. Dann ist FG ebenfalls $\mathcal{P}$-definitiv und nichtzyklisch. □

6.6 Überdeckungen

Zum Abschluß der Betrachtung von Einbettungen beschäftigen wir uns noch mit solchen, deren Bildabschluß den ganzen Zielgraphen umfaßt. Für späteren Gebrauch definieren wir neben einem Begriff für diese Eigenschaft auch noch einen für die Injektivität des konstanten Anteils einer Einbettung:

Definition 6.6.1 [←139] Sei F eine p-Einbettung von G_1 in G_2. F heißt

semiinjektiv,	falls $F_{\lceil \overline{p} \rceil}$ injektiv ist,	d.h.:	$F_{\lceil \overline{p} \rceil} F^{\top}_{\lceil \overline{p} \rceil}$	$\subset$	I
überdeckend,	falls $F^{\lfloor p \rfloor}$ surjektiv ist,	d.h.:	$\mathrm{L} F^{\lfloor p \rfloor}$	$=$	L

□

Mit $(FG)_{\lceil \overline{p} \rceil} = F_{\lceil \overline{p_F} \rceil} G_{\lceil \overline{p_G} \rceil}$ überträgt sich Semiinjektivität auf die Komposition zweier Einbettungen. Für überdeckende Einbettungen benötigen wir Konsistenz, aber zusätzlich auch noch Halbkohärenz und die Einschränkung auf den Intervallkontext:

Lemma 6.6.2 (Komposition überdeckender Einbettungen) [←74]
Im Intervallkontext ist die Komposition FG zweier halbkohärenter, konsistenter und überdeckender Einbettungen F (von G_1 in G_2) und G (von G_2 in G_3) wieder überdeckend.

Beweis: Mit Lemma 6.4.5 und Satz 6.4.6 gilt im Intervallkontext:

$$\mathrm{L}(FG)^{\lfloor p \rfloor} = \mathrm{L} FGD_3^* = \mathrm{L} FD_2^* G^{\lfloor p_G \rfloor} = \mathrm{L} F^{\lfloor p_F \rfloor} G^{\lfloor p_G \rfloor} = \mathrm{L} G^{\lfloor p_G \rfloor} = \mathrm{L}$$ □

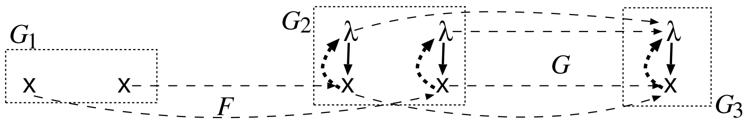
Für überdeckende Einbettungen verhalten sich auch einige zusätzliche Eigenschaften kompositional, die bei Einbettungen im allgemeinen nicht kompositional sind. Die sich daraus ergebende spezielle Teilkategorie werden wir für die algebraische Termgraphersetzung später noch benötigen.

Definition 6.6.3 [←77] Eine p-Einbettung F von G_1 in G_2 heißt **bindungsüberdeckend**, falls $F_{\lceil \overline{p} \rceil} B_2 \subset B_1 F_{\lceil \overline{p} \rceil}$. □

Aus der Bindungsüberdeckung folgt: $\mathrm{L} B_2^{\mathsf T} F_{\lceil p \rceil}^{\mathsf T} \subset \mathrm{L} F_{\lceil p \rceil}^{\mathsf T} B_1^{\mathsf T} \subset \mathrm{L} B_1^{\mathsf T}$, und hieraus gewinnen wir mit Schröder:

Lemma 6.6.4 (Bilder freier Variablen) [←74, 152] Für eine bindungsüberdeckende Einbettung F von G_1 in G_2 gilt: $\overline{\mathrm{L} B_1^{\mathsf T}} F_{\lceil p \rceil} \subset \overline{\mathrm{L} B_2^{\mathsf T}}$, d.h., die (konstanten) Bilder freier Variablen in G_1 sind freie Variable in G_2. □

Analog zur Situation bei Identifizierungen und entsprechend der Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen läßt sich auch für Einbettungen eine Erhaltung freier Variablen definieren, die sich aber im allgemeinen nicht auf die Komposition zweier Einbettungen überträgt:



Definition 6.6.5 [←77] Eine p-Einbettung F von G_1 in G_2 **erhält freie Variable**, wenn $F_{\lceil p \rceil} W_2 F_{\lceil p \rceil}^{\mathsf T} \sqcap \overline{B_1 \mathrm{L}} \subset W_1$. □

Bezüglich einer solchen Einbettung F kann ein in G_1 zu einer freien Variablen gehöriger Knoten von $F_{\lceil p \rceil}$ nur auf Knoten abgebildet werden, deren andere Urbilder (bzgl. $F_{\lceil p \rceil}$) in der gleichen Variablen liegen.

Definition 6.6.6 Eine p-Einbettung F von G_1 in G_2 heißt **(p-)Überdeckung**, wenn sie bindungsüberdeckend ist, freie Variable erhält und mit auf Intervallen beruhendem Bildabschluß überdeckend ist. □

Wenn wir zusätzlich noch Konsistenz und Halbkohärenz fordern, erhalten wir Komponierbarkeit:

Lemma 6.6.7 (Komposition von Überdeckungen) Seien drei Graphen G_1, G_2 und G_3, zwei Variablenvektoren $p_F : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_1$ und $p_G : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_2$ sowie eine konsistente halbkohärente p_F-Überdeckung F von G_1 in G_2 und eine konsistente halbkohärente p_G-Überdeckung G von G_2 in G_3 gegeben. Dann ist auch FG eine p-Überdeckung mit $p = p_F \sqcup p_G F_{\lceil p_F \rceil}^{\mathsf T}$.

Beweis: Aus Lemma 6.6.2 folgt, daß FG überdeckend ist. Weiter gilt:

- Bindungsüberdeckung:

$$(FG)_{\lceil p \rceil} B_3 = F_{\lceil p_F \rceil} G_{\lceil p_G \rceil} B_3 \subset F_{\lceil p_F \rceil} B_2 G_{\lceil p_G \rceil} \subset B_1 F_{\lceil p_F \rceil} G_{\lceil p_G \rceil} = B_1 (FG)_{\lceil p \rceil}$$

- Erhaltung freier Variablen: Mit Lemma 6.6.4 erhalten wir:

$$\begin{aligned} (FG)_{\lceil p \rceil} W_3 (FG)_{\lceil p \rceil}^{\mathsf T} \sqcap \overline{B_1 \mathrm{L}} &\subset F_{\lceil p_F \rceil} (G_{\lceil p_G \rceil} W_3 G_{\lceil p_G \rceil}^{\mathsf T} \sqcap \overline{B_2 \mathrm{L}}) F_{\lceil p_F \rceil}^{\mathsf T} \sqcap \overline{B_1 \mathrm{L}} \\ &\subset F_{\lceil p_F \rceil} W_2 F_{\lceil p_F \rceil}^{\mathsf T} \sqcap \overline{B_1 \mathrm{L}} \subset W_1 \end{aligned}$$ □

Der folgende Begriff, den wir später bei der Anwendung von Überdeckungen benötigen werden, macht im wesentlichen nur bei kreisfreiem Ausgangsgraphen Sinn:

Definition 6.6.8 [←139] Eine p-Einbettung F von G_1 in G_2 heißt **basiskonsistent**, wenn $\overline{\mathrm{L} D_1} F D_2^* = \mathrm{L}$ und $\overline{\mathrm{L} D_1} F C_2^{\mathsf T} = \mathrm{O}$, d.h., wenn die Bilder der Quellen von G_1 in G_2 ungekapselt sind und eine Basis von G_2 enthalten. □

6.7 Einbettungskategorien

Wir fassen jetzt die verschiedenen Komponierbarkeitsresultate dieses Kapitels zusammen. Sei $\mathcal{P}$ ein Variablenschema, also $\mathcal{P} \subset v_s \sqcup v_p$. Da die Identitäten alle in diesem Kapitel vorgestellten Einbettungseigenschaften erfüllen (I ist $\mathcal{P}$-definitiv, da I eine O-Einbettung ist und mit $\mathrm{O}M \subset \mathcal{P}$ auch eine $\mathcal{P}$-Einbettung), erhalten wir u.a. folgende Einbettungskategorien:

i) Alle Graphen mit $\mathcal{P}$-Einbettungen

ii) Für einstelliges $\mathcal{P}$ alle Graphen mit kohärenten $\mathcal{P}$-Einbettungen

iii) Alle $\mathcal{P}$-zulässigen Graphen mit konsistenten $\mathcal{P}$-Einbettungen

iv) Alle Graphen mit $\mathcal{P}$-definitiven $\mathcal{P}$-Einbettungen

v) Für einstelliges $\mathcal{P}$ alle $\mathcal{P}$-zulässigen Graphen mit kohärenten, $\mathcal{P}$-definitiven und nichtzyklischen $\mathcal{P}$-Einbettungen

vi) Alle $\mathcal{P}$-zulässigen Graphen mit halbkohärenten $\mathcal{P}$-Überdeckungen

vii) Für einstelliges $\mathcal{P}$ alle $\mathcal{P}$-zulässigen Graphen mit kohärenten $\mathcal{P}$-Überdeckungen

Die Kategorie aller zulässigen Graphen mit konsistenten Einbettungen (iii) ist seit Einführung der Konsistenz ohnehin schon implizit die Grundlage unserer Überlegungen; die der nichtzyklischen Einbettungen (v) werden wir in den nächsten Kapiteln als Grundlage für Kategorien von Einpassungen und Homomorphismen brauchen. Überdeckungen (vi) schließlich werden bei der algebraischen Termgraphersetzung benötigt werden.

Kapitel 7

Einpassungen

7.1 Definition von Einpassungen

In diesem Abschnitt definieren wir spezielle Anforderungen an Einbettungen, deren Gesamtheit von *Einpassungen* erfüllt sein muß. Manche dieser Bedingungen sind leicht zu verstehen, wenn man die Parallelen zu den Verboten des „Einfangens von Variablen“ in λ-Kalkül und Combinatory Reduction Systems heranzieht. Bei solchen, deren Notwendigkeit erst daraus erwächst, daß wir Variablenbindung und -identität als primitive Konzepte betrachten, und nicht als abgeleitete, sind die Parallelen schon weniger offensichtlich — die Pendants im λ-Kalkül oder in CRS sind meist in der Definition der Anwendung von Substitutionen bzw. Belegungen verborgen. Gänzlich ungewohnt sind die Bedingungen, die im Wurzel-DAG trivialerweise erfüllt sind, sich aber in den evtl. zyklischen und unzusammenhängenden Graphen, die wir nicht ausschließen wollen bzw. können, als extrem wichtig erweisen.

In diesem und im nächsten Abschnitt stehe „F“ stets für eine jeweils lokal beliebige p-Einbettung von G_1 in G_2, wobei p ein *Schemavariablenvektor* sei.

Als erstes verschärfen wir die schon bekannten Bedingungen der Bindungs- und Variablentreue:

Definition 7.1.1 F heißt **streng bindungstreu**, falls $F^{\top}_{\lceil\overline{p}\rceil} B_1 = B_2 F^{\top}_{\lceil\overline{p}\rceil}$. □

Von dieser Bedingung gilt „$\subset$“ bereits für die Einbettung. Würde man „$\supset$“ nicht fordern, so wären Situationen denkbar, wie z.B. im λ-Kalkül folgende Instantiierung: $(\lambda\ x\,.A)[A\backslash z\ x] \to \lambda\ x\,.z\ x$, d.h. also eine Bindung von Variablen, die innerhalb der Substitution noch frei sind.

Definition 7.1.2 F heißt **streng variablentreu**, falls $F^{\top}_{\lceil\overline{p}\rceil} W_1 = W_2 F^{\top}_{\lceil\overline{p}\rceil}$. □

Auch hier gilt „$\subset$“ bereits aus der Einbettung. Für in G_1 gebundene Variable bringt „$\supset$“ gegenüber „$\supset$“ der strengen Bindungstreue nichts neues; doch freie Variable werden nun auf einmal ebenso behandelt wie gebundene. Dies ist daraus zu verstehen, daß es sich bei Einbettungen nicht nur um Instantiierung von Schemavariablen handelt, wie es der Situation bei Substitutionen im λ-Kalkül entspräche, sondern ggf. auch um Einbettung in einen größeren Kontext. In der Sprache des λ-Kalküls entspricht hierbei der außerhalb $\mathrm{L}\,F^{\lfloor p\rfloor}$ liegende Teil von G_2 einem Kontext, nicht aber $\mathrm{L}\,F_{\lceil\overline{p}\rceil}$, das Bild von G_1 ohne die Schemavariablen. In einem Kontext jedoch können Variable, die in dem in das Loch eingesetzten Term (entspricht $\mathrm{L}\,F^{\lfloor p\rfloor}$, also dem Bild von G_1) frei vorkommen, gebunden werden.

Wenn nun Großbuchstaben für Schemavariable stehen, so ist nach „$\supset$“ der Variablentreue also

$$((\lambda\ z\,.x\ z\ )\ A)[A\backslash x] \quad\to\quad (\lambda\ z\,.x\ z\ )\ x$$

verboten, aber

$$((\lambda\ z\,.B\ z\ )\ A)[B\backslash x, A\backslash x] \quad\to\quad (\lambda\ z\,.x\ z\ )\ x$$

erlaubt. Die Motivation wird bei Bindung der bisher freien Variablen deutlicher; analog zum obigen ist nach „$\supset$“ der Bindungstreue auch schon

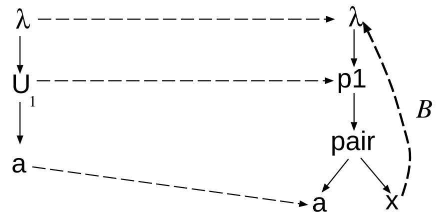
$$(\lambda\ x\,.(\lambda\ z\,.x\ z\ )\ A)[A\backslash x] \quad\to\quad \lambda\ x\,.(\lambda\ z\,.x\ z\ )\ x$$

verboten, aber

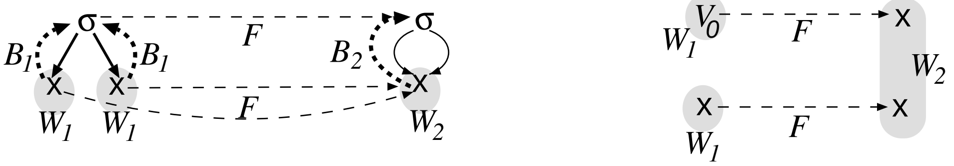
$$(\lambda\ y\,.(\lambda\ z\,.B\ z\ )\ A)[B\backslash x, A\backslash x] \quad\rightarrow\quad \lambda\ y\,.(\lambda\ z\,.x\ z\ )\ x$$

erlaubt.

Da diese Teile der Bindungs- und Variablentreue Aussagen über die Bilder von Schemavariablen beinhalten, darf man sie bei Einbettungen noch nicht fordern. Im folgenden Bild ist eine Einbettung zu sehen, wie sie später im Rahmen der Graphersetzung vorkommen wird, wo sie dann durchaus gegen die strenge Bindungstreue verstoßen darf:



Auch wenn es dem ersten Anschein nach naheliegen mag, sind die Bedingungen zur strengen Variablentreue und zur Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen *nicht* voneinander abhängig. Folgendes Bild zeigt links, daß die Erhaltung der Verschiedenheit nicht aus der strengen Variablentreue folgt; für die Gegenrichtung ist rechts ein Gegenbeipiel abgebildet, das natürlich nur auf freien Variablen beruhen kann.



Ebensowenig steht die strenge Bindungstreue in irgendeiner Implikationsbeziehung zur Bindungsüberdeckung (Definition 6.6.3), die außerhalb von Überdeckungen kaum einen sinnvollen Anwendungsbereich hat.

Analog zur Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen müssen auch die freien Variablen, die als „global gebunden" betrachtet werden, ihre Verschiedenheit bewahren, und so werden wir die bereits im letzten Kapitel definierte Erhaltung freier Variablen (Definition 6.6.5) fordern.

Wenn freie Variable derart als „global gebunden" betrachtet werden, erwächst die Forderung nach *Kapselungseinheitlichkeit*, da dieser einheitliche Bindungskontext durch strukturerhaltende Abbildungen nicht auseinandergerissen werden darf. Im Sinne der Übertragung der Erreichbarkeit gebundener Variablen von ihrem Bindungsknoten aus sind alle Knoten von den „globalen Bindungsknoten" aus „global erreichbar", so daß sie dann auch alle von jedem Bindungsknoten des Bildes einer freien Variablen aus erreichbar sein müssen, da diese Bindungsknoten sozusagen die Bilder der unsichtbaren „globalen Bindungsknoten" im Urbild sind. (Wadsworth betrachtet alle freien Variablen als von dem Symbol „$*$" gebunden [Wad71, Seite 150].)

Definition 7.1.3 F heißt **kapselungseinheitlich**, falls $\overline{\mathrm{L}_{\mathcal{V}_1}\,C_1}\,F\,C_2^{\top} \subset F(D_2^{\top})^{+}$. □

Falls ein ungekapselter Knoten in G_1 unter kapselungseinheitlichem F ein in G_2 von einem anderen Knoten gekapseltes Bild hat, müssen also die Bilder aller Knoten in G_1 von letzterem aus (über einen nichtleeren Pfad) erreichbar sein.

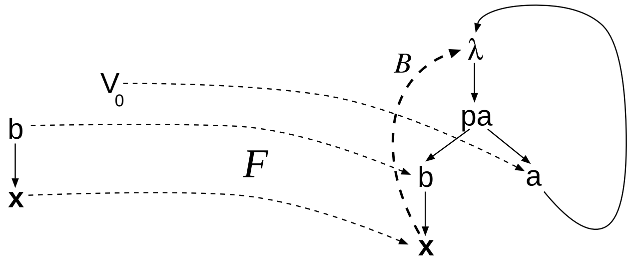
Damit ist es naheliegend, zu fordern, daß die betrachteten Graphen kapselungsfrei basiert sind (siehe Definition 3.5.2).

Aus Überlegungen ähnlich denen, die zur Formulierung der Kapselungseinheitlichkeit geführt haben, ergibt sich, daß der Bindungsknoten des Bildes einer freien Variablen selbst nicht im Bild eines Urbildknotens liegen sollte. Bei kreisfreien Graphen folgt dies aus der Kapselungseinheitlichkeit (siehe Lemma 7.7.3), und bei geschlossenen Graphen ist es trivial; sonst muß man eine eigene Bedingung fordern:

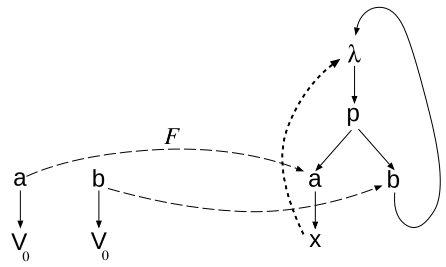
Definition 7.1.4 F heißt **bindungsbeherrschend**, wenn $F_{\lceil p \rceil} B_2 \subset B_1 F_{\lceil p \rceil} \sqcup \overline{\mathrm{L}\, F^{\lfloor p \rfloor}}$. □

Wenn für bindungsbeherrschendes F ein Variablenknoten durch $F_{\lceil p \rceil}$ auf eine gebundene Variable abgebildet wird, dann ist der entsprechende Bindungsknoten also entweder Bild des Bindungsknotens der ursprünglichen Variablen oder aber nicht im Bildabschluß von F (der ursprüngliche Variablenknoten muß dann wegen der Bindungstreue einer freien Variablen zugehören).

Im folgenden Bild ist F eine kapselungseinheitliche Einbettung, ohne jedoch bindungsbeherrschend zu sein.



Dies ist jedoch immer noch nicht ausreichend; das folgende Bild zeigt eine kapselungseinheitliche und bindungsbeherrschende Einbettung, unter der die beiden Quellknoten von G_1 auf eine der Idee der Kapselungseinheitlichkeit widersprechende Art und Weise unter einen Bindungsknoten in G_2 abgebildet werden:



Daher definieren wir folgende Bedingung:

Definition 7.1.5 F heißt **kapselungskonsistent**, falls zu je zwei ungekapselten Urbildknoten unter deren Bildknoten eine Bildvariable nie einmal frei, das andere Mal zwar kapselungsfrei erreichbar (siehe Definition 3.5.7), aber nur gebunden vorkommt:

$$(\overline{C_1^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, C_1}) \sqcap F(\overline{\text{€}_2^{\mathsf{T}}} \sqcap \Delta_2)\text{€}_2 F^{\mathsf{T}} \;=\; \mathrm{O} \qquad (\;\Leftrightarrow\quad F(\overline{\text{€}_2^{\mathsf{T}}} \sqcap \Delta_2)\text{€}_2 F^{\mathsf{T}} \;\subset\; C_1^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcup \mathrm{L}\, C_1) \quad □$$

Man hätte hier auch $\ldots \sqcap (\overline{\text{€}_2}^{\mathsf{T}} \sqcap \Delta_2)\, W_2 \text{€}_2$ oder $\ldots \sqcap \Delta_2 B_2^{\mathsf{T}} \text{€}_2$ schreiben können; die resultierenden Bedingungen sind alle äquivalent. Kapselungskonsistenz erfüllt im wesentlichen den gleichen Zweck wie die Beschränkung auf „*spine-acyclic*“ Redexe in [AK94], ist aber allgemeiner und feinkörniger. In kreisfreien Graphen ist Kapselungskonsistenz eine Folge der Kapselungseinheitlichkeit (siehe Lemma 7.7.2).

In der Gegenwart von Kreisen benötigen wir, wie schon bei den Identifizierungen, wieder eine Form des Kapselrespektes:

Definition 7.1.6 Eine p-Einbettung F von G_1 in G_2 heißt **kapselrepektierend**, wenn

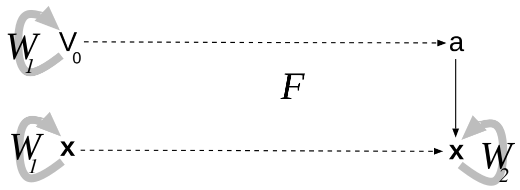
$$F_{\lceil p \rceil} F_{\lceil p \rceil}^{\mathsf{T}} \subset \overline{C_1} \qquad (\Leftrightarrow\; F_{\lceil p \rceil} F_{\lceil p \rceil}^{\mathsf{T}} \sqcap C_1 = \mathrm{O} \;\Leftrightarrow\; C_1 F_{\lceil p \rceil} \subset \overline{F_{\lceil p \rceil}} \;\Leftrightarrow\; C_1 F_{\lceil p \rceil} \subset \overline{F}\;) \qquad □$$

Weiter darf kein Knoten einer im Inneren des Bildes einer Schemavariablen frei vorkommenden Variablen jemals Bild einer konstant abgebildeten Variablen sein:

Definition 7.1.7 F heißt **variablenbeherrschend**, wenn $(F^{\underline{\lfloor p \rfloor}} \sqcap F \cancel{C}_2^{\top})\, W_2 \subset \overline{\mathrm{L} F_{\lceil \overline{p} \rceil}}$. □

Dies, eingeschränkt auf gebundene Variable, entspricht im Kontext der Termsubstitution der dort üblichen Bedingung, daß Variable, die in substitutierten Termen frei vorkommen, nach der Substitution nicht gebunden sein dürfen. In unserem Kontext heißt dies aber gerade, daß diese Variablenknoten nicht mit durch $F_{\lceil \overline{p} \rceil}$ abgebildeten in einer Variablen sein dürfen. Variablenbeherrschung ist damit die Bedingung, die am direktesten der Anwendbarkeitsbedingung der η-Reduktion im λ-Kalkül entspricht, geht aber noch darüber hinaus, da auch die „globale Bindung" freier Variablen berücksichtigt wird.

Ein einfaches Gegenbeispiel ist im folgenden Bild zu sehen, in dem wir ausnahmsweise für individuelle (d.h. einknotige) Variable die Variablenidentität eingezeichnet haben:



Der Schlüssel zum Verständnis der Variablenbeherrschung liegt darin, daß freie Variable als „global gebunden" aufzufassen sind, so daß ihre Bilder auch nicht frei innerhalb der Bilder echt substitutierter Schemavariablen vorkommen dürfen — dies entspräche nämlich einer Bindung durch die Substitution, und damit einem „Einfangen von Variablen".

Schließlich benötigen wir noch eine Bedingung, die entsprechend der Situation in CRS verhindert, daß Variable, die unterhalb des Bildes einer Schemavariablen frei vorkommen, innerhalb dieses Bildes gebunden werden — die typische Situation des „Einfangens von Variablen", die im Falle der Kontextsubstitution in der Theorie des λ-Kalküls erwünscht ist, hier aber verboten werden muß. Die bisher gegebenen Bedingungen allein reichen hierzu noch nicht aus, also fordern wir:

Definition 7.1.8 F heißt **konform**, wenn Schemavariable auf Graphausschnitte abgebildet werden, d.h. wenn $F^{\underline{\lfloor p \rfloor}} C_2 \subset F^{\underline{\lfloor p \rfloor}}$, bzw. wenn für jeden Knoten $x : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ mit $x \subset p$ gilt: $xF^{\lfloor p \rfloor}$ ist ein Graphausschnitt. □

Dies bedeutet natürlich, daß für jeden Knoten $x \subset p$ im Intervallkontext $[x]F$ ein Graphausschnitt sein muß, da dann $\underline{[x]F} = xF^{\lfloor p \rfloor}$, und im Abschnittskontext analog $[x]\!]F$.

Damit haben wir alle Bedingungen aufgeführt, die wir zusätzlich zu den Einbettungsbedingungen fordern müssen, um „Einfangen von Variablen" zu verhindern, und wir definieren:

Definition 7.1.9 F ist eine p-**Einpassung** von G_1 nach G_2, wenn F eine Abbildung von $\mathcal{V}_1$ nach $\mathcal{V}_2$ ist, p ein Schemavariablenvektor ist ($p \subset v_s M_1^{\top}$), G_1 kapselungsfrei basiert und p-zulässig ist, und F

- markierungstreu,
- (Eigenschaften zu den Nachfolgerfunktionen)
  - nachfolgertreu,
  - konsistent (ergibt sich aus der Zulässigkeit von G_1),
  - kohärent,
- (Eigenschaften zur Bindung)
  - streng bindungstreu,
  - konform,
  - kapselungseinheitlich,
  - bindungsbeherrschend,
  - kapselungskonsistent,

  - kapselrespektierend,
- (Eigenschaften zur Variablenidentität)
  - streng variablentreu,
  - gebundene Variable erhaltend,
  - freie Variable erhaltend und
  - variablenbeherrschend ist. □

Daß die Identitätsrelationen auf den Knotenmengen identische O-Einpassungen sind, ist offensichtlich.

Der Beweis, daß die Komposition zweier Einpassungen unter bestimmten Voraussetzungen wieder eine Einpassung ist, ist Gegenstand des übernächsten Abschnittes.

7.2 Zum Kapselgerüst von Einpassungen

Aus der Definition von Konformität und Kapselgerüst ergibt sich auch für das Kapselgerüst von Einpassungen eine auf Gerüst und Kapselung gestützte Darstellung:

Lemma 7.2.1 (Kapselgerüst unter Einpassungen) [←80, 84] Für jede p-Einpassung F von G_1 in G_2 gilt: $F^{\underline{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}} = F^{\underline{<p>}} C_2^*$. □

Induktion über die Zahl der Kapselungen (siehe Lemma 7.2.1) erlaubt für Einpassungen eine Verschärfung der Nichtzyklizitätsbedingung durch Einsetzen des Kapselgerüstes:

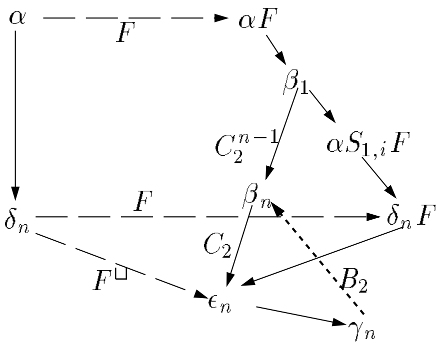
Lemma 7.2.2 (Zyklizität von Einpassungen) [←84] Für jede p-Einpassung von G_1 nach G_2 gilt:

$$F^{<p>}(F^{\lfloor p \rfloor})^{\mathsf{T}} \sqcap D_1^+ \subset \mathrm{I} \qquad \Leftrightarrow \qquad F^{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}(F^{\lfloor p \rfloor})^{\mathsf{T}} \sqcap D_1^+ \subset \mathrm{I} \ .$$

Beweis: „$\Leftarrow$“ ist wegen $F^{<p>} \subset F^{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}$ trivial. „$\Rightarrow$“: Sei $A_j := F^{<p>} C_2^j (F^{\lfloor p \rfloor})^{\mathsf{T}} \sqcap D_1^+$. Die Behauptung ist nun gemäß Lemma 7.2.1 äquivalent zu

$$\forall\, j : \mathbb{N} \bullet A_0 \subset \mathrm{I} \Rightarrow A_j \subset \mathrm{I} \ .$$

Dies zeigen wir durch vollständige Induktion über j. Der Induktionsanfang ist eine Tautologie; für den Induktionsschritt nehmen wir für ein beliebiges $n > 0$ die Aussage $A_0 \subset \mathrm{I} \Rightarrow A_{n-1} \subset \mathrm{I}$ als Induktionshypothese an.



Seien $\alpha, \delta_n : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ mit $\alpha^{\mathsf{T}}\delta_n \subset A_n \sqcap \bar{\mathrm{I}}$. Seien Zwischenpunkte wie im Bild rechts gewählt — also insbesondere $\beta_1 \subset \alpha F^{<p>}$, $\beta_n \subset \beta_1 C_2^{n-1}$, $\epsilon_n \subset \beta_n C_2$, $\gamma_n \subset \beta_n B_2^{\mathsf{T}} \sqcap \epsilon_n \not{C}_2$.

Läge γ_n frei unter $\alpha S_{1,i} F$ für ein $i \subset \alpha ME$, so wäre $\alpha S_{1,i} F$ von β_n gekapselt: $\alpha S_{1,i} F \subset \beta_n C_2$, was einen Widerspruch zur Konformität von F ergäbe.

Da γ_n frei unter ϵ_n liegt, muß nun β_n für jedes $i : \mathbb{1} \to \mathcal{E}$ auf jedem Pfad von $\alpha S_{1,i} F$ nach ϵ_n liegen, da sonst ein Verstoß gegen die Konformität von F vorläge: $\alpha S_{1,i} F$ wäre von β_n gekapselt, liegt aber sicher außerhalb $\alpha F^{\lfloor p \rfloor}$. Damit liegt β_n aber auch im Bild eines Kotens δ_{n-1} auf jedem — insbesondere auch nicht über α führenden — Pfad von einem $\alpha S_{1,i}$ nach δ_n.

Daraus folgt aber $\alpha^{\mathsf{T}}\delta_{n-1} \subset A_{n-1} \sqcap \bar{\mathrm{I}}$ und gemäß Induktionshypothese ist damit F zyklisch, was im Widerspruch zu den Voraussetzungen steht. □

F ist also nichtzyklisch genau dann, wenn $F^{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}(F^{\lfloor p \rfloor})^{\top} \sqcap D_1^{+} \subset \mathrm{I}$, und dies ist durch Aufspalten des Kapselgerüstes von F in konstanten und variablen Anteil äquivalent zu der Konjunktion der beiden Bedingungen

$$F_{\lceil \overline{p} \rceil}(F^{\lfloor p \rfloor})^{\top} \sqcap D_1^{+} \subset \mathrm{I} \qquad \text{und} \qquad F^{\underline{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}}(F^{\lfloor p \rfloor})^{\top} \sqcap D_1^{+} \subset \mathrm{I} \ .$$

Eine Verschärfung der letzten Bedingung werden wir im Zusammenhang mit der algebraischen Graphersetzung noch benötigen:

Definition 7.2.3 F heißt **gerüstüberschneidungsfrei**, wenn $F^{\underline{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}}(F^{\lfloor p \rfloor})^{\top} \subset \mathrm{I}$. □

Das heißt, Knoten, die im Kapselgerüst des Bildes einer Schemavariablen liegen, dürfen nicht im Bildabschluß irgendeines anderen Knotens liegen. Über Schröder ist diese Bedingung äquivalent zu $F^{\underline{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}} \subset \overline{\overline{\mathrm{I}}F^{\lfloor p \rfloor}}$.

Übersetzt in die Terminologie der Graphreduktion entspricht Gerüstüberschneidungsfreiheit von F der *R-Zulässigkeit* des durch F festgelegten Redex — das Kapselgerüst des Bildes einer Schemavariablen entspricht den *nicht abstrahierbaren* Teilen dieses Bildes (siehe [Wad71, Seite 152]).

Eine weitere Eigenschaft, die im Kontext der Graphreduktion allerdings aufgrund der Dominierung der Variablenbindung immer erfüllt ist, ist die folgende, bei der Außenverweise auf Kapselgerüste untersagt werden:

Definition 7.2.4 F heißt **gerüsteinstiegsfrei**, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

$$\mathrm{L}F^{\underline{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}}D_2^{\top} \subset \mathrm{L}F^{\lfloor p \rfloor} \ , \qquad \overline{\mathrm{L}F^{\lfloor p \rfloor}}D_2 \subset \overline{\mathrm{L}F^{\underline{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}}} \ , \qquad \overline{\mathrm{L}F^{\lfloor p \rfloor}}D_2 \sqcap \mathrm{L}F^{\underline{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}} = \mathrm{O}$$ □

Eine von der linken Regelseite der β-Reduktion ausgehende Einpassung ist immer gerüsteinstiegsfrei, da die einzige Schemavariable, deren Kapselgerüst nichtleer sein kann (also die unäre Schemavariable, die den Rumpf der λ-Abstraktion bildet), gekapselt ist. Allgemein sind in CRS alle Schemavariablen in der linken Regelseite gekapselt, so daß die entsprechenden Einpassungen immer gerüsteinstiegsfrei sind.

Lemma 7.2.5 Wenn F eine gerüstüberschneidungsfreie und gerüsteinstiegsfreie p-Einpassung ist, dann gilt: $F^{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}D_2^{\top} \sqcap \overline{F^{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}} \subset FD_2^{\top}$.

Beweis: Seien $\alpha_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ und $\beta_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ Punkte mit $\alpha_1^{\top}\beta_2 \subset F^{\underline{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}}S_2^{\top} \sqcap \overline{F^{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}}\pi^{\top}$ (für den konstanten Anteil von F ist die Aussage trivial). Falls $\beta_2\pi \subset \alpha_1 F^{\lfloor p \rfloor}$, ergibt sich ein Widerspruch zur Definition des Kapselgerüstes. Falls $\beta_2 S_2$ im Bildabschluß eines Punktes γ_1 liegt, $\beta_2 S_2 \subset \gamma_1 F^{\lfloor p \rfloor}$, so folgt daraus mit der Gerüstüberschneidungsfreiheit von F die Gleichheit von γ_1 und α_1.

Falls $\beta_2\pi$ im Bildabschluß eines Punktes $\delta_1 \subset \overline{\alpha_1}$ liegt, $\beta_2\pi \subset \delta_1 F^{\lfloor p \rfloor}$, so unterscheiden wir:

i) $\delta_1 \subset \overline{p}$: unter Rückgriff auf den Blockadenausgang erhalten wir:

$$\begin{aligned} \beta_2 S_2 \quad &\subset \quad \{\!|\, \delta_1 F_{\lceil \overline{p} \rceil}, \beta_2\rho \,|\!\} S_2 \subset \{\!|\, \delta_1, \beta_2\rho \,|\!\} S_1 F \subset \{\!|\, \delta_1, \beta_2\rho \,|\!\} S_1 E_{p,F}(F \sqcap F^{\lfloor p \rfloor}) \\ &\subset \quad \{\!|\, \delta_1, \beta_2\rho \,|\!\} S_1 E_{p,F}\alpha_1^{\top}\alpha_1(F \sqcap F^{\lfloor p \rfloor}) \subset \alpha_1 F \end{aligned}$$

ii) $\delta_1 \subset p$: Wenn auch $\beta_2 S_2 \subset \delta_1 F^{\lfloor p \rfloor}$, dann ergäbe sich mit $\delta_1 \subset \overline{\alpha_1}$ ein Widerspruch zu Gerüstüberschneidungsfreiheit von F. Also liegt $\beta_2 S_2$ entweder auf der unteren Grenze oder auf der Selbstkapselungsgrenze des Bildabschnittes von δ_1: $\beta_2 S_2 \subset \delta_1 D_1 F \sqcup \delta_1 F^{\underline{]p[}}$. Im ersten Fall überträgt sich das im Falle $\delta_1 \subset \overline{p}$ angewandte Argument; Lage auf der Selbstkapselungsgrenze brächte mit der Konformität $\delta_1 F$ als gekapselt mit in den Bildabschluß von α_1 und mit der Gerüstüberschneidungsfreiheit folgt im Widerspruch zur Annahme $\delta_1 = \alpha_1$.

Damit gilt $\beta_2\pi \subset \overline{\mathrm{L}\, F^{\lfloor p \rfloor}}$, und mit der Gerüsteinstiegsfreiheit erhalten wir: $\beta_2 S_2 \subset \beta_2 \pi D_2 \subset \overline{\mathrm{L}\, F^{\lfloor p \rfloor}} D_2 \subset \overline{\mathrm{L}\, F^{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}}$ im Widerspruch zu den Annahmen. □

7.3 Eigenschaften und Pfadlemmata

Die Projektion zu einer Kongruenz ist zwar eine Einbettung, aber i.a. keine Einpassung. Hierfür benötigen wir Identifizierungen:

Lemma 7.3.1 (Projektion als Einpassung) Die Projektion χ_R zu einer Identifizierung R auf einem Graphen G_1 ist eine O-Einpassung von G_1 in $G_2 = G_1/_R$.

Beweis: Die Einbettungseigenschaften wissen wir bereits aus Lemma 6.1.5. Mit $p = \mathrm{O}$ und mit Hilfe der Gleichungen in Lemma 4.3.2 weisen wir die übrigen Eigenschaften nach (sei $\chi = \chi_R$):

- Nachfolgereigenschaften:
  - Die Überprüfung der Konsistenz und Kohärenz entfällt, da hier $p = \mathrm{O}$.
- Bindungseigenschaften:
  - Strenge Bindungstreue: $\chi^{\mathsf{T}} B_1 = B_2 \chi^{\mathsf{T}}$.
  - Die Überprüfung der Konformität entfällt, da hier $p = \mathrm{O}$.
  - Kapselungseinheitlichkeit: $\overline{\mathrm{L}\, C_1} \chi\, C_2^{\mathsf{T}} \subset \overline{\mathrm{L}\, C_1} R C_1^{\mathsf{T}} \chi \subset \overline{\mathrm{L}\, C_1} C_1^{\mathsf{T}} R \chi = \mathrm{O} \subset \chi (D_2^{\mathsf{T}})^+$ unter der Verwendung von Lemma 4.1.10.
  - Bindungsbeherrschung: $\chi_{\lceil \overline{p} \rceil} B_2 = \chi B_2 \subset B_1 \chi = B_1 \chi_{\lceil \overline{p} \rceil}$.
  - Kapselrespekt: $\chi \chi^{\mathsf{T}} = R \subset \overline{C_1}$
  - Kapselungskonsistenz:

$$
\begin{array}{rll}
\multicolumn{2}{l}{(\overline{C_1^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, C_1}) \sqcap \chi (\overline{\text{€}_2^{\mathsf{T}}} \sqcap \Delta_2) \text{€}_2 \chi^{\mathsf{T}}} & \\
= & (\overline{C_1^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, C_1}) \sqcap (\overline{\chi\, \text{€}_2^{\mathsf{T}}} \sqcap \chi \Delta_2) \chi^{\mathsf{T}} \text{€}_1 & \text{Lemma 4.3.13} \\
= & (\overline{C_1^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, C_1}) \sqcap (\overline{\text{€}_1^{\mathsf{T}} \chi} \sqcap \Delta_1 \chi) \chi^{\mathsf{T}} \text{€}_1 & \text{Lemma 4.3.13, 4.3.15} \\
\subset & (\overline{C_1^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, C_1}) \sqcap (\overline{\text{€}_1^{\mathsf{T}}} \sqcap \Delta_1) \chi \chi^{\mathsf{T}} \text{€}_1 & \text{Lemma 2.2.2} \\
= & (\overline{C_1^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, C_1}) \sqcap (\overline{\text{€}_1^{\mathsf{T}}} \sqcap D_1^*) R (\text{€}_1 \sqcap W_1 \mathrm{L}) & \Delta_1 \subset D_1^* \\
\subset & (\overline{C_1^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, C_1}) \sqcap (\overline{\text{€}_1^{\mathsf{T}}} \sqcap D_1^*) (R \text{€}_1 \sqcap W_1 \mathrm{L}) & \text{€}_1 \subset W_1 \mathrm{L}, \text{ Vartr. } R \\
\subset & \overline{\mathrm{L}\, C_1} \sqcap \mathrm{L}\, B_1^{\mathsf{T}} R \text{€}_1 & \text{Lemma 3.5.15} \\
= & \overline{\mathrm{L}\, C_1} \sqcap \mathrm{L}\, R B_1^{\mathsf{T}} \text{€}_1 & \\
= & \overline{\mathrm{L}\, C_1} \sqcap \mathrm{L}\, C_1 & \\
= & \mathrm{O} &
\end{array}
$$

- Variableneigenschaften:
  - Strenge Variablentreue: $W_1 \chi = \chi W_2$
  - Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen:

$$\chi W_2 \chi^{\mathsf{T}} \sqcap B_1 B_1^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{p^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, p} = W_1 \chi \chi^{\mathsf{T}} \sqcap B_1 B_1^{\mathsf{T}} = W_1 R \sqcap B_1 B_1^{\mathsf{T}} \subset W_1$$

  - Erhaltung der Verschiedenheit freier Variablen:

$$\chi W_2 \chi^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{B_1 \mathrm{L}} \sqcap \overline{p^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, p} = W_1 \chi \chi^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{B_1 \mathrm{L}} = W_1 R \sqcap \overline{B_1 \mathrm{L}} \subset W_1$$

  - Variablenbeherrschung: Wegen $p = \mathrm{O}$ trivial. □

Umgekehrt gilt natürlich nicht, daß jede O-Einpassung als Projektion aufgefaßt werden kann, da die Surjektivität fehlt.

Lemma 7.3.2 (Bindungserhaltung) [←85, 98] Für jede p-Einpassung F von G_1 in G_2 gilt:

$$F_{\lceil\overline{p}\rceil} B_2 \sqcap \mathrm{L}\, F_{\lceil\overline{p}\rceil} \subset B_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil}$$

Beweis: Mit der Bindungsbeherrschung gilt: $F_{\lceil\overline{p}\rceil} B_2 \sqcap \mathrm{L}\, F_{\lceil\overline{p}\rceil} \subset F_{\lceil\overline{p}\rceil} B_2 \sqcap \mathrm{L}\, F^{\lfloor p \rfloor} \subset B_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil}$. □

Die folgende Eigenschaft ist etwas einfacher als die Kapselungseinheitlichkeit und folgt auch aus dieser: Wird eine freie Variable durch $F_{\lceil\overline{p}\rceil}$ auf eine gebundene abgebildet, so ist das gesamte Bild von G_1 von dem entsprechenden bindenden Knoten aus erreichbar:

Lemma 7.3.3 Sei F eine p-Einpassung von G_1 in G_2. Dann gilt:

$$\overline{\mathrm{L}\, B_1^{\top}} F_{\lceil\overline{p}\rceil} B_2 \subset F (D_2^{\top})^{+} \,.$$

Beweis: Wir stützen uns auf Bindungstreue und -beherrschung, Kohärenz und Kapselungseinheitlichkeit von F. Wegen letzterer genügt es, $\overline{\mathrm{L}\, B_1^{\top}} F_{\lceil\overline{p}\rceil} B_2 \subset \overline{\mathrm{L}\, C_1} F\, C_2^{\top}$ zu zeigen. Angenommen, für einen Punkt $\beta_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ gilt $\beta_2 \subset \overline{\mathrm{L}\, B_1^{\top}} F_{\lceil\overline{p}\rceil} B_2$. Dann gibt es einen Punkt $\alpha_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ mit $\alpha_1 \subset \overline{\mathrm{L}\, B_1^{\top}}$ sowie $\beta_2 \subset \alpha_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil} B_2$. Wir betrachten nun einen ungekapselten Knoten $\gamma_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$, von dem aus α_1 erreichbar ist. Wegen der Kohärenz und Bindungsbeherrschung von F gibt es einen Pfad von $\gamma_1 F$ nach $\alpha_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil}$, der nicht über β_2 führt. Damit ist $\gamma_1 F$ von β_2 gekapselt und das Gewünschte bewiesen: $\beta_2 \subset \gamma_1 F\, C_2^{\top} \subset \overline{\mathrm{L}\, C_1} F\, C_2^{\top}$.

($\overline{\mathrm{L}\, B_1^{\top}} \sqcap \mathrm{L}\, v_b M_1^{\top} \subset \overline{\mathrm{L}\, C_1}$ gilt nur, wenn es nur nullstellige Objektvariable gibt!) □

Lemma 7.3.4 [←83, 149] Sei eine p-Einpassung F von G_1 in G_2 gegeben. Dann gilt

$$(F^{\underline{\lfloor p \rfloor}} \sqcap F \not{\mathcal{C}}_2^{\top}) B_2 \subset \overline{\mathrm{L}\, F_{\lceil\overline{p}\rceil}}$$

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus strenger Bindungstreue und Variablenbeherrschung:

$$(F^{\underline{\lfloor p \rfloor}} \sqcap F \not{\mathcal{C}}_2^{\top}) B_2 F_{\lceil\overline{p}\rceil}^{\top} \subset (F^{\underline{\lfloor p \rfloor}} \sqcap F \not{\mathcal{C}}_2^{\top})\, W_2 F_{\lceil\overline{p}\rceil}^{\top} B_1 \subset \overline{\mathrm{L}\, F_{\lceil\overline{p}\rceil}} F_{\lceil\overline{p}\rceil}^{\top} B_1 = \mathrm{O}$$ □

Wichtig ist, daß für beliebige Einpassungen eine Objektvariable, die frei im Bild einer Metavariablen am Ende eines Pfades liegt, auch frei unter dem Bild des Pfadanfanges liegt:

Lemma 7.3.5 [←89, 98, 166]

Für jede p-Einpassung F von G_1 in G_2 gilt $D_1^{*}(F^{\underline{\lfloor p \rfloor}} \sqcap F \not{\mathcal{C}}_2^{\top}) \subset F \not{\mathcal{C}}_2^{\top}$.

Beweis: Komponentenweise formuliert bedeutet dies: Seien γ_1, δ_1 zwei Knoten aus G_1, wobei γ_1 von δ_1 aus erreichbar sei: $\gamma_1 \subset \delta_1 D_1^{*}$. Sei γ_2 ein Knoten aus G_2, der frei im Bild von γ_1 liegt, also: $\gamma_2 \subset \gamma_1(F^{\underline{\lfloor p \rfloor}} \sqcap F \not{\mathcal{C}}_2^{\top})$. Die Behauptung ist, daß γ_2 auch unter $\delta_1 F$ frei vorkommt, also $\gamma_2 \subset \delta_1 F \not{\mathcal{C}}_2^{\top}$.

Sei γ_2 eine gebundene Variable, also $\gamma_2 \subset \mathrm{L}\, B_2^{\top}$; sonst ist die Behauptung trivial. Käme $\gamma_2 B_2$ im Widerspruch zur Behauptung auf jedem Pfad von $\delta_1 F$ nach $\gamma_1 F$ vor, so auch im Gerüst eines Knotens auf jedem Pfad von δ_1 nach γ_1. Sei ϵ_1 ein unterster solcher Knoten zu einem bestimmten Pfad von δ_1 nach γ_1.

Wäre $\epsilon_1 \subset \overline{p}$, so ließe sich aus Lemma 7.3.4 ein Widerspruch herleiten. Also gilt $\epsilon_1 \subset p$.

Daher gibt es eine Kantenmarkierung $i \subset \epsilon_1 M_1 E$ und einen Pfad von $\gamma_2 B_2$ nach $\epsilon_1 S_{1,i} F$, der ohne noch einmal über $\gamma_2 B_2$ zu führen nach γ_2 fortgesetzt werden kann. Damit gilt aber $\epsilon_1 S_{1,i} F \subset \gamma_2 B_2 C_2 \sqcap \overline{\epsilon_1 F^{\lfloor p \rfloor}} \subset \epsilon_1 F^{\lfloor p \rfloor} C_2 \sqcap \overline{\epsilon_1 F^{\lfloor p \rfloor}}$, was ein Widerspruch zur Konformität von F ist. □

Wenn man genauer betrachtet, wo denn die Voraussetzung $\gamma_2 \subset \gamma_1 F^{\underline{\lfloor p \rfloor}}$ in diesem Beweis verwendet wird, so sieht man, daß damit nur nichtvariable ϵ_1 ausgeschlossen wurden. Eine leichte Adaption des Beweises bringt uns daher folgende Aussagen:

Korollar 7.3.6 (Bindung lokal freier Variablen im Urbild) [←89, 101, 149]
Eine Variable, die frei unter dem Bild des Endpunktes eines Pfades liegt, kann nicht innerhalb des Gerüstes irgendeiner auf diesem Pfade liegenden Schemavariablen gebunden sein:

$$Z_1 F \mathord{-}\!\!\in_2^{\mathsf{T}} \sqcap \mathbb{Z}_1 F^{\underline{\leq p>}} B_2^{\mathsf{T}} = \mathsf{O}$$

Falls eine solche Variable nicht frei unter dem Beginn des Bildpfades liegt, muß sie von dem Bild eines konstanten Knotens auf dem Pfad gebunden sein:

$$Z_1 F \mathord{-}\!\!\in_2^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} F \mathord{-}\!\!\in_2^{\mathsf{T}}} \subset \mathbb{Z}_1 F_{\lceil \overline{p} \rceil} B_2^{\mathsf{T}}$$

Anders ausgedrückt: Eine solche nicht von einem Bild eines auf dem Pfad liegenden konstanten Knoten gebundene Variable liegt auch frei unter dem Bild des Pfadanfanges:

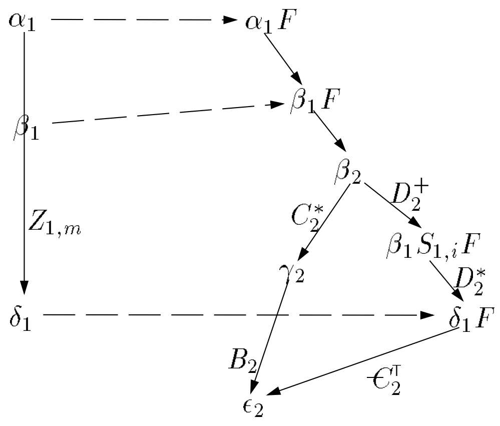
$$Z_1 F \mathord{-}\!\!\in_2^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathbb{Z}_1 F_{\lceil \overline{p} \rceil} B_2^{\mathsf{T}}} \subset \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} F \mathord{-}\!\!\in_2^{\mathsf{T}}$$ □

Diese Aussage läßt sich für nichtzyklische Einpassungen auch auf das Kapselgerüst verschärfen:

Lemma 7.3.7 (Bindung aus dem Kapselgerüst)
Sei eine nichtzyklische p-Einpassung F von G_1 in G_2 gegeben. Dann gilt:

$$Z_1 F \mathord{-}\!\!\in_2^{\mathsf{T}} \subset \overline{\mathbb{Z}_1 F^{\underline{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}} B_2^{\mathsf{T}}} \; .$$

Beweis: Seien $\{\!\!|\alpha_1, m|\!\!\} : \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{V}_1 \times \mathcal{E}^*$ und $\epsilon_2 : \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{V}_2$ zwei Punkte mit $\{\!\!|\alpha_1, m|\!\!\}^{\mathsf{T}} \epsilon_2 \subset Z_1 F \mathord{-}\!\!\in_2^{\mathsf{T}} \sqcap \mathbb{Z}_1 F^{\underline{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}} B_2^{\mathsf{T}}$, also ein Gegenbeispiel zur Behauptung.



Seien Zwischenpunkte wie im Bild rechts gewählt — für die Zwischenpunkte $\beta_1 \subset \{\!\!|\alpha_1, m|\!\!\} \mathbb{Z}_1$, $\beta_2 \subset \beta_1 F^{<p>}$, $\gamma_2 \subset \beta_2 C_2^*$, $\epsilon_2 \subset \gamma_2 B_2^{\mathsf{T}}$, zu $\epsilon_2 \subset \beta_1 F^{\underline{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}}$ stützen wir uns dabei auf Lemma 7.2.1. Da $\epsilon_2 \subset \delta_1 F \mathord{-}\!\!\in_2^{\mathsf{T}}$, muß es einen Pfad von γ_2 nach $\delta_1 F$ geben, und es gilt $\delta_1 F \subset \gamma_2 C_2 \subset \beta_1 F^{\underline{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}}$.

Falls $\beta_1 \subset \delta_1 E_{p,F}$, also δ_1 innerhalb eines von β_1 übernommenen Variablenblockes liegt, dann gilt $\beta_1 F = \delta_1 F$ und damit

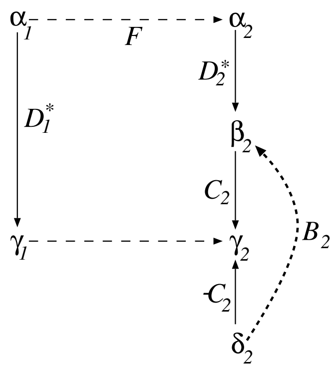
$$\begin{aligned} \gamma_2 &\subset \beta_1 F^{\lfloor p \rfloor} \sqcap \delta_1 F \mathord{-}\!\!\in_2^{\mathsf{T}} B_2 \\ &\subset \beta_1 F^{\lfloor p \rfloor} \sqcap \beta_1 F C_2^{\mathsf{T}} \\ &\subset \beta_1 F^{\lfloor p \rfloor} \sqcap \beta_1 F^{\underline{\rfloor p \lfloor}} \\ &\subset \beta_1 F^{\lfloor p \rfloor} \sqcap \overline{\beta_1 F^{\lfloor p \rfloor}} \subset \mathsf{O} \; , \end{aligned}$$

was einen Widerspruch dazu ergibt, daß γ_2 ein Punkt ist.

Andernfalls erhalten wir mit $F \subset D_1^* F^{\lfloor p \rfloor}$ und Lemma 7.2.2 einen Widerspruch zur Nichtzyklizität von F. □

7.4 Einpassungen und Kapselung

Eine Schlüsseleigenschaft zur Ausnutzung des Kapselrespektes von Einpassungen ist, daß unter bestimmten Umständen von Kapselungen im Bild auf Kapselungen im Urbild zurückgeschlossen werden kann.



Lemma 7.4.1 (Rückkapselung) [←87, 91, 93, 100] Gegeben seien eine p-Einpassung F von G_1 in G_2 und Punkte $\alpha_1, \gamma_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ mit $\alpha_2 = \alpha_1 F$, $\gamma_2 = \gamma_1 F$, $\gamma_1 \subset \alpha_1 D_1^*$, $\gamma_2 \subset \beta_2 C_2 \sqcap \delta_2 {-\!C}_2$ und β_2 liegt auf jedem Pfad von α_2 nach γ_2 (dies ist schwächer als gleich $\alpha_2 \subset \overline{\delta_2 {-\!C}_2}$ zu fordern). Dann gibt es einen auf jedem Pfad von α_1 nach γ_1 liegenden Knoten $\epsilon_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ mit $\gamma_1 \subset \epsilon_1 C_1$ und $\epsilon_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil} \subset \beta_2(C_2 \sqcup \mathrm{I})$.

Die punktfreie Formulierung hiervon ist:

$$Z_1 F C_2^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{(Z_1 F Z_2^{\mathsf{T}} \sqcap \pi F \pi^{\mathsf{T}})\overline{\mathbb{Z}_2}} \subset (Z_1 C_1^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{(Z_1 Z_1^{\mathsf{T}} \sqcap \pi\pi^{\mathsf{T}})\overline{\mathbb{Z}_1}}) F_{\lceil\overline{p}\rceil} (C_2^{\mathsf{T}} \sqcup \mathrm{I})$$

Falls $\alpha_2 \subset \overline{\delta_2 {-\!C}_2}$, dann gibt es einen Urbildpunkt $\beta_1 \subset \beta_2 F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}$, der auf jedem Pfad von α_1 nach γ_1 liegt und für den $\gamma_1 \subset \beta_1 C_1^+$ gilt. Genauer gilt:

i) Auf jedem Pfad von α_1 nach γ_1 liegt ein Knoten β_1 mit $\beta_2 = \beta_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil}$:

$$Z_1 F C_2^{\mathsf{T}} \sqcap \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} F D_2^* \subset \mathbb{Z}_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil}$$

ii) Wenn es einen Urbildpfad $\{\!\!\{ \gamma_1, m_1 \}\!\!\}$ zu einem Pfad $\{\!\!\{ \gamma_2, m_2 \}\!\!\} \subset \delta_2 Z_2^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\delta_2 B_2 \mathbb{Z}_2^{\mathsf{T}}}$ gibt (dies gilt im Intervallkontext immer), dann gilt $\{\!\!\{ \gamma_1, m_1 \}\!\!\} Z_1 \subset \beta_1 B_1^{\mathsf{T}} \sqcap \gamma_1 {-\!C}_1^{\mathsf{T}}$, also insbesondere $\delta_2 \subset \gamma_1 {-\!C}_1^{\mathsf{T}} F_{\lceil\overline{p}\rceil}$. Für die ursprüngliche Behauptung wähle man in diesem Falle $\epsilon_1 := \beta_1$.

iii) Sonst (also nur im Abschnittskontext möglich) gibt es einen Knoten $\epsilon_2 \subset \beta_2 C_2 \sqcap \gamma_2 C_2^{\mathsf{T}}$, der auf jedem Pfad von β_2 nach γ_2 liegt, und so daß auf jedem Pfad von β_1 nach γ_1 ein Knoten ϵ_1 liegt mit $\epsilon_1 \subset \epsilon_2 F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil} \sqcap \gamma_1 C_1^{\mathsf{T}}$.

iv) Es gibt im Fall iii) sogar einen auf jedem Pfad von β_1 nach γ_1 liegenden Knoten ϵ_1 mit $\epsilon_1 \subset \epsilon_2 F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil} \sqcap \gamma_1 C_1^{\mathsf{T}}$.

Aus i) bis iv) folgt die oben aufgestellte zentrale Behauptung.

v) Wenn $\alpha_2 \subset \overline{\delta_2 {-\!C}_2}$, dann liegt β_2 auf jedem Pfad von α_2 nach ϵ_2 und und es gilt $\gamma_1 \subset \beta_1 C_1^+$.

Beweis:

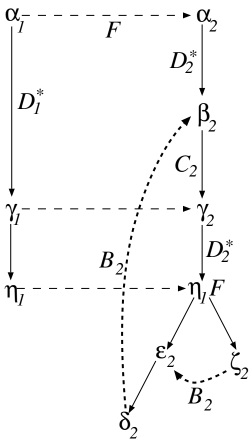
i) β_2 liegt auf jedem Pfad von α_2 nach γ_2, daher gibt es auf jedem Pfad von α_1 nach γ_1 einen Punkt $\beta_1 \neq \gamma_1$ mit $\beta_2 \subset \beta_1 F^{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}$. O.B.d.A. sei β_1 der unterste solche Knoten. Wenn $\beta_1 \subset p$, dann gibt es eine Kantenmarkierung $i \subset \beta_1 M_1 E$ mit $\beta_1 S_{1,i} F \subset \beta_2 C_2 \sqcap \overline{\beta_1 F^{\lfloor p \rfloor}}$ und wir erhalten einen Widerspruch zur Konformität von F. Damit muß also $\beta_1 \subset \overline{p}$ gelten, und daher $\beta_2 = \beta_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil}$.

ii) Sei ein Pfad $\{\!\!\{ \gamma_2, m_2 \}\!\!\} \subset \delta_2 Z_2^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\delta_2 B_2 \mathbb{Z}_2^{\mathsf{T}}}$ gegeben und sei $\{\!\!\{ \gamma_1, m_1 \}\!\!\}$ ein Urbildpfad dazu. Sei nun $\delta_1 := \{\!\!\{ \gamma_1, m_1 \}\!\!\} Z_1$. Falls $\delta_1 \subset p$, dann läge mit $\delta_2 \subset \beta_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil} B_2^{\mathsf{T}} \subset \beta_1 B_1^{\mathsf{T}} F_{\lceil\overline{p}\rceil}$ und $\delta_2 \subset \delta_1 (F^{\underline{\lfloor p \rfloor}} \sqcap F {-\!C}_2^{\mathsf{T}})$ ein Widerspruch gegen die Variablenbeherrschung von F vor. Also gilt $\delta_1 \subset \overline{p}$ und damit $\delta_2 = \delta_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil}$ und $\gamma_1 \subset \delta_1 {-\!C}_1$. Mit Lemma 7.3.2 gilt $\beta_1 \subset \delta_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil} B_2 F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil} \subset \delta_1 B_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil} F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}$, und aus der Wahl von β_1 folgt, daß im Falle $\beta_1 \neq \delta_1 B_1$ auch $\beta_1 \subset \delta_1 {-\!C}_1$ gelten muß. Dann erhalten wir aber mit

$$\beta_1 \subset \delta_1 B_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil} F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil} \sqcap \delta_1 {-\!C}_1 \subset \delta_1 B_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil} F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil} \sqcap \delta_1 B_1 C_1 = \delta_1 B_1 (F_{\lceil\overline{p}\rceil} F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil} \sqcap C_1)$$

einen Widerspruch zum Kapselrespekt von F. Also gilt $\beta_1 = \delta_1 B_1$.

iii) In diesem Fall gibt es zu keinem Pfad von γ_2 nach δ_2 einen Urbildpfad.



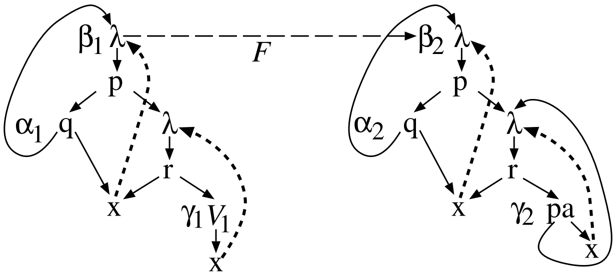
Wir müssen daher von dem rechts dargestellten Fall ausgehen, daß es zu jedem — insbesondere auch jedem kreisfreien — Pfad von γ_2 nach δ_2 einen Punkt $\eta_1 \subset p$ gibt, so daß ein Punkt $\epsilon_2 \subset \eta_1 F^{\underline{]p[}}$ auf der Selbstkapselungsgrenze des Bildes von η_1 liegt, so daß $\delta_2 \subset \epsilon_2 D_2^*$. Da dann auch $\epsilon_2 \subset \delta_2 \rlap{-}C_2$, gilt $\epsilon_2 \subset \beta_2 C_2$. Wegen der Kreisfreiheit der Kapselungsrelation (Lemma 3.5.3) muß nun ϵ_2 auf jedem Pfad von β_2 nach γ_2 liegen (aufgrund der vorausgesetzten Kreisfreiheit des Pfades von γ_2 nach δ_2 nicht erst zwischen γ_2 und $\eta_1 F$) und damit auch auf jedem Pfad zwischen α_2 und γ_2; ϵ_2 kann dabei aufgrund der Wahl des Pfades nicht gleich γ_2 sein.

Mit ϵ_2 anstelle von β_2 und ζ_2 anstelle von δ_2 sind wir nun wieder in unsererer Ausgangssituation angelangt. Die dadurch induzierte Iteration der Argumentation muß aber abbrechen, da ein endlicher Pfad von β_2 nach γ_2 vorausgesetzt wurde und dieser Pfad durch jede Anwendung von diesem Fall (iii) um wenigstens einen Knoten verkürzt wird. Die Belegung von ϵ_2 in der letzten Anwendung dieses Falles (iii) erfüllt die Behauptung.

iv) Zwischen diesen Knoten ϵ_1 muß es nach Lemma 3.5.5 eine totale Ordnung geben. Da zu einem festen Pfad unter dem nach iii) bestimmten Knoten ϵ_1 nur endlich viele weitere Knoten liegen, zu denen ϵ_1 in dieser Ordnungsreleation stehen kann, gibt es auch einen untersten solchen Knoten, der dann auch γ_1 kapselt und auf jedem Pfad von β_1 nach γ_1 liegt.

v) Wenn $\alpha_2 \subset \overline{\delta_2 \rlap{-}C_2}$, dann liegt β_2 auf jedem Pfad von α_2 nach ϵ_2, da $\epsilon_2 \subset \delta_2 \rlap{-}C_2$. Falls $\epsilon_2 \neq \beta_2$, ist damit aber wieder die mit i), ii)und iii) bewiesene erste Behauptung anwendbar, und der Pfad von α_1 nach ϵ_1 wird durch einen neuen Kapsler weiter verkürzt, der, falls wieder ungleich β_1, immer weitere Verkürzungen erlaubt, was schließlich auf diesem endlichen Pfad nicht mehr möglich ist, so daß der letzte Kapsler β_1 selbst sein muß. □

Das folgende Bild enthält ein einfaches Beispiel im Abschnittskontext:



Für $\alpha_2 = \beta_2$ erhalten wir aus der Rückkapselung:

Korollar 7.4.2 [←90, 91] Sei eine p-Einpassung F von G_1 in G_2 gegeben. Dann gilt

$$FC_2F^{\mathsf{T}} \sqcap D_1^* \subset C_1^+ \ , \quad (F \sqcap C_1^{\mathsf{T}} F_{\lceil\overline{p}\rceil} C_2) C_2^{\mathsf{T}} \subset C_1^{\mathsf{T}} F_{\lceil\overline{p}\rceil} (D_2^*)^{\mathsf{T}} \quad \text{und} \quad F C_2^{\mathsf{T}} \sqcap C_1^{\mathsf{T}} \mathrm{L} \subset C_1^{\mathsf{T}} F_{\lceil\overline{p}\rceil} (D_2^*)^{\mathsf{T}} \ .$$

Im Intervallkontext gilt sogar $FC_2F^{\mathsf{T}} \sqcap D_1^* \subset C_1$. □

Auf diese Rückschlußmöglichkeit gestützt läßt sich die Erhaltung frei vorkommender Variablen beweisen und damit auch die Erhaltung der Kapselung:

Lemma 7.4.3 (Erhaltung von Variablenfreiheit und Kapselung) [←88, 92, 124]
Es gilt $F_{\lceil\overline{p}\rceil}^{\mathsf{T}} \rlap{-}C_1 \subset \rlap{-}C_2 F^{\mathsf{T}}$ und $F_{\lceil\overline{p}\rceil}^{\mathsf{T}} C_1 \subset C_2 F^{\mathsf{T}}$ und $C_1 F \subset F_{\lceil\overline{p}\rceil} C_2$.

Beweis: Seien Punkte $\alpha_1, \gamma_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ und $\gamma_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ mit $\gamma_2 = \gamma_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil}$ und $\alpha_1 \subset \gamma_1 \rlap{-}C_1$ gegeben, also beliebige γ_2, α_1 mit $\gamma_2^{\mathsf{T}} \alpha_1 \subset F_{\lceil\overline{p}\rceil}^{\mathsf{T}} \rlap{-}C_1$ und γ_1 als Zwischenpunkt.

Sei nun $\alpha_2 := \alpha_1 F$. Aus der Kohärenz von F folgt $\gamma_2 \subset \alpha_2 D_2^*$. Angenommen, im Widerspruch zur zu beweisenden Behauptung gälte $\alpha_2 \subset \overline{\gamma_2 \not{C}_2}$, so läge $\beta_2 := \gamma_2 B_2$ auf jedem Pfad von α_2 nach γ_2. Gemäß Lemma 7.4.1 i) und ii) läge auf jedem Pfad von α_1 nach γ_1 der Bindungsknoten $\gamma_1 B$ von γ_1, was einen Widerspruch zur Annahme $\alpha_1 \subset \gamma_1 \not{C}_1$ ergibt.

Also gilt $\alpha_2 \subset \overline{\gamma_1 \not{C}_2}$, was $F^{\mathsf{T}}_{\lceil \overline{p} \rceil} \not{C}_1 \subset \not{C}_2 F^{\mathsf{T}}$ beweist. Die zweite Behauptung folgt daraus ohne Probleme: $F^{\mathsf{T}}_{\lceil \overline{p} \rceil} C_1 = F^{\mathsf{T}}_{\lceil \overline{p} \rceil} B_1^{\mathsf{T}} \not{C}_1 \subset B_2^{\mathsf{T}} F^{\mathsf{T}}_{\lceil \overline{p} \rceil} \not{C}_1 \subset B_2^{\mathsf{T}} \not{C}_2 F^{\mathsf{T}} \subset C_2 F^{\mathsf{T}}$. Schließlich erhalten wir noch

$$C_1 F \subset F_{\lceil \overline{p} \rceil} F^{\mathsf{T}}_{\lceil \overline{p} \rceil} C_1 F \subset F_{\lceil \overline{p} \rceil} C_2 F^{\mathsf{T}}_{\lceil \overline{p} \rceil} F \subset F_{\lceil \overline{p} \rceil} C_2$$

und $C_1 \subset C_1 F F^{\mathsf{T}} \subset F_{\lceil \overline{p} \rceil} C_2 F^{\mathsf{T}}$. □

Ein Gegenbeispiel im nicht kapselrespektierenden Fall zu diesen Aussagen wäre die Projektion χ in der Abildung auf Seite 49, die bis auf Kapselrespekt auch eine Einpassung ist.

7.5 Eigenschaften im Abschnittskontext

Auch wenn der Abschnittskontext speziell für Graphen mit Kreisen eingeführt wurde, so ist das Wesentliche am Abschnittskontext doch die Tatsache, daß man hier von selbstkapselungsfreien Bildern der Schemavariablen ausgehen kann — gestützt auf diese Tatsache beweisen wir in diesem Abschnitt einige weitergehende Einpasungseigenschaften.

Obschon der Abschnittskontext komplizierter scheint als der Intervallkontext, so ist er doch als der Normalfall anzusehen; der Intervallkontext dient nur der behutsamen und intuitiv leichter zugänglichen Heranführung. Bei Beschränkung auf kreisfreie Graphen fallen beide Kontexte zusammen, wobei die im Abschnittskontext bewiesenen Aussagen meist die wichtigeren sind.

Lemma 7.5.1 (Konsistenz von Bildabschnitten)
Sei F eine p-Einpassung von G_1 in G_2; dann gilt im Abschnittskontext:

$$F^{\underline{\rfloor p \lfloor}} \subset (F(D_2^*)^{\mathsf{T}} \sqcap D_1^* F^{\lfloor p \rfloor} B_2)(C_2^{\mathsf{T}})^*$$

Mit Hilfe von Punkten läßt sich dies folgendermaßen umformulieren: Sei $\alpha_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ mit $\alpha_1 \subset p$ eine Schemavariable, und sei $\mathfrak{a} := [\alpha_1]\!] F$ ihr Bild unter F, und sei $g_1 := \widehat{\mathfrak{a}} = \alpha_1 F^{\underline{\rfloor p \lfloor}}$ die Selbstkapselungsgrenze von $\mathfrak{a}$. Im Abschnittskontext gilt dann für jeden Punkt $\gamma_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ aus g_1

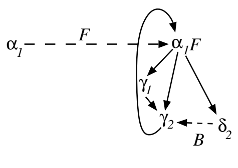
$$(\gamma_1 C_2^* \sqcap \alpha_1 F(D_2^{\mathsf{T}})^+) B_2^{\mathsf{T}} \sqcap \alpha_1 D_1^* F^{\lfloor p \rfloor} \neq \mathrm{O} \quad ,$$

d.h. im von α_1 aus erreichbaren Bildabschluß liegt eine Variable, die von γ_1 selbst oder einem über C_2^* von γ_1 aus erreichbaren Knoten gebunden ist, und der Bindungsknoten liegt dabei noch über $\alpha_1 F$.

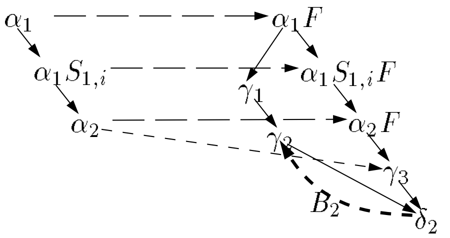
Wie schon in Lemma 5.3.8 können wir wieder C_2^* durch C_2 ersetzen, und der fragliche Bindungsknoten liegt sogar auf jedem Pfad von γ_1 nach $\alpha_1 F$.

Beweis: Falls kein Knoten aus $\gamma_1 B_2^{\mathsf{T}}$ in $\underline{\mathfrak{a}}$ liegt, wähle man nach Lemma 5.3.8 einen Knoten

$$\delta_2 \subset (\gamma_1 C_2 \sqcap \mathrm{L}\gamma) B_2^{\mathsf{T}} \sqcap \underline{[\alpha_1 F, \gamma]},$$



und sei $\gamma_2 := \delta_2 B_2$. Falls nun $\delta_2 \sqcap \alpha_1 D_1^* F^{\lfloor p \rfloor} = \mathrm{O}$, so muß es einen Knoten $\alpha_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ geben (sei $g_2 := [\widehat{\alpha_2]\!]} F$ seine Selbstkapselungsgrenze), so daß auf jedem Pfad von wenigstens einem Knoten $\alpha_1 S_{1,i} F$ der unteren Grenze nach δ_2 ein Punkt $\gamma_3 \subset g_2$ liegt.



Wir legen uns nun auf ein bestimmtes i und einen beliebigen, kreisfreien solchen Pfad fest. Damit wissen wir, daß γ_3 nicht zwischen $\alpha_1 S_{1,i} F$ und $\alpha_2 F$ auf diesem Pfad liegt.

Wenn γ_3 auf jedem Pfad von $\alpha_1 F$ nach $\alpha_1 S_{1,i} F$ läge, dann würde es die untere Intervallgrenze kapseln, was einen Widerspruch zur Konformität von F darstellt.

Wir haben also $\alpha_1 F \subset \delta_3 \not{C}_2$ und $\gamma_3 \subset \gamma_2 C_2$. Gäbe es einen Pfad von γ_2 nach $\alpha_1 F$, der nicht über γ_3 führte, so gälte $\gamma_2 \subset \gamma_3 C_2$, was einen Widerspruch zur Kreisfreiheit der Kapselung (Lemma 3.5.3) ergibt.

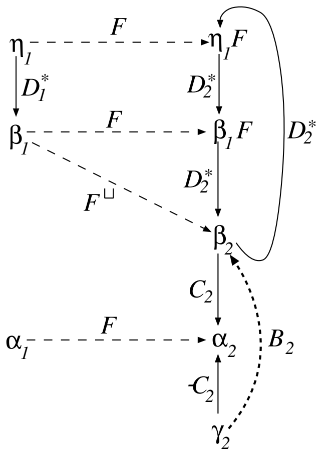
Also liegt γ_3 auf jedem Pfad von γ_2 und damit auch von γ_1 nach $\alpha_1 F$, und wird somit auch von γ_1 gekapselt.

Falls zu einem von γ_3 gebundenen Knoten δ_3 wieder $\delta_3 \sqcap \alpha_1 D_1^* F^{\lfloor p \rfloor} = \mathrm{O}$ gilt, so wiederholt sich das Argument, so daß wir — ähnlich wie im Beweis von Lemma 5.3.8 — zu einer *reductio ad infinitum* bezüglich des Pfades von γ_1 nach $\alpha_1 F$ gelangen. □

Eine „Hygienebedingung“, die man sonst wohl hätte fordern müssen, läßt sich erfreulicherweise aus Kapselrespekt, Kapselungskonsistenz und Erhaltung der Kapselung herleiten und unterstreicht gleichzeitig die Angemessenheit des Abschnittsbegriffes; im Inervallkontext ist die Aussage des folgenden Lemmas nur auf DAGs allgemeingültig:

Lemma 7.5.2 (Kapselungseinheitlichkeit im Abschnittskontext) [←89, 149, 162]
Im Abschnittskontext gilt $\overline{\mathrm{L}\, C_1} F C_2^{\mathsf{T}} \subset \overline{\mathrm{L} F^{\lfloor p \rfloor}}$, d.h. Knoten, die den Bildknoten eines ungekapselten Knotens kapseln, liegen nicht im Bildabschluß von F.

Beweis: Seien $\alpha_1, \beta_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ zwei Punkte mit $\alpha_1 \subset \overline{\mathrm{L}\, C_1} \sqcap \beta_1 F^{\lfloor p \rfloor} C_2 F^{\mathsf{T}}$.



Sei weiter $\beta_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ ein Knoten aus G_2 mit $\beta_2 \subset \alpha_1 F C_2^{\mathsf{T}} \sqcap \beta_1 F^{\lfloor p \rfloor}$. Damit ist α_1 ein ungekapselter Knoten aus G_1, dessen Bild in G_2 von einem Knoten β_2 gekapselt ist, der seinerseits wieder im Bildabschluß eines Knotens β_1 aus G_1 liegt; es sei noch $\alpha_2 := \alpha_1 F$ und sei $\gamma_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ so gewählt, daß $\gamma_2 \subset \beta_2 B_2^{\mathsf{T}} \sqcap \alpha_2 \not{C}_2^{\mathsf{T}}$.

Sei $\eta_1 := \beta_1 (C_1^{\mathsf{T}})^* \sqcap \overline{\mathrm{L}\, C_1}$ der „unterste ungekapselte Knoten über β_1“ – η_1 ist nach Korollar 3.5.6 und der kapselungsfreien Basierung von G_1 eindeutig bestimmt, und es gilt $\eta_1 \subset \overline{p}$.

Betrachten wir zunächst den Fall $\beta_1 \subset p$.

Falls $\eta_1 = \beta_1$, so unterscheiden wir zwei Fälle:

i) γ_2 liegt frei unter $\beta_1 F$, also $\gamma_2 \subset \beta_1 F \not{C}_2^{\mathsf{T}}$: Hier läge $\beta_2 = \gamma_2 B_2$ in der Selbstkapselungsgrenze des Bildes von β_1, und damit im Abschnittskontext außerhalb dieses Bildes: $\beta_2 \subset \overline{\beta_1 F^{\lfloor p \rfloor}}$ im Widerspruch zu den Annahmen.

ii) γ_2 liegt gebunden unter $\beta_1 F = \eta_1 F$, also $\gamma_2 \subset \overline{\beta_1 F \not{C}_2^{\mathsf{T}}}$: Wenn kein Widerspruch zur Kapselungskonsistenz vorliegt, dann gibt es auf jedem Pfad von $\beta_1 F$ nach γ_2 einen Knoten, der $\eta_1 F = \beta_1 F$ kapselt, und der damit in der Selbstkapselungsgrenze des Bildes von β_1 läge, womit γ_2 im Widerspruch zu den Annahmen nicht im Bild von β_1 liegen könnte.

Also gilt $\eta_1 \neq \beta_1$. Gemäß der Wahl von η_1 erhalten wir mit Lemma 7.4.3 zusammen mit Lemma 2.2.6:

$$\beta_1 F \subset \eta_1 C_1^+ F \subset \eta_1 F_{\lceil \overline{p} \rceil} C_2^+$$

Wenn kein Widerspruch zur Kapselungskonsistenz vorliegt, dann gibt es auf jedem Pfad von $\eta_1 F$ nach γ_2 einen Knoten δ_2, der $\eta_1 F$ kapselt: $\eta_1 F \subset \delta_2 C_2$. Falls δ_2 zwischen $\eta_1 F$ und $\beta_1 F$ liegt, so ergibt sich ein Widerspruch gegen die Kreisfreiheit der Kapselung, Lemma 3.5.3. Falls δ_2 zwischen $\beta_1 F$ und γ_2 liegt, so gibt es zunächst mit $\beta_1 \subset \eta_1 C_1^+$ und $\beta_1 B_1 = \mathrm{O}$ (β_1 ist ja als Schemavariable nicht bindbar) eine Kantenmarkierung $i \subset \beta_1 M_1 E$ mit $\beta_1 S_{1,i} \subset \eta_1 C_1^+$, und damit

$$\beta_1 S_{1,i} F \subset \eta_1 C_1^+ F \subset \eta_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil} C_2^+ \subset \delta_2 C_2 C_2^+ \subset \beta_1 F^{\lfloor p \rfloor} \ ,$$

was ein Widerspruch zur Definition des Bildabschlusses ist.

Damit bleibt nur noch $\beta_1 \subset \overline{p}$. Aus $\eta_1 = \beta_1$ folgt hier sofort ein Widerspruch zur Kapselungskonsistenz. Sei im Falle $\eta_1 \neq \beta_1$ der Knoten γ_1 ein Urbildknoten von γ_2 mit $\gamma_1 \subset \gamma_2 F_{\lceil\overline{p}\rceil}^{\top} \sqcap \beta_1 B_1^{\top}$, der gemäß der Bindungstreue existieren muß. Dann gilt mit Lemma 3.5.8

$$\gamma_2 \subset \gamma_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil} \subset \eta_1 C_1^+ F_{\lceil\overline{p}\rceil} \subset \eta_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil} C_2^+ \subset \eta_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil} \Delta_2 \ ,$$

was einen Widerspruch zur Kapselungskonsistenz ergibt. □

Zusammen mit Korollar 7.3.6 erhalten wir sofort:

Korollar 7.5.3 (Selbstkapselungsgrenzen nur konstant überdeckt) [←90, 124, 144] Sei im Abschnittskontext eine p-Einpassung F von G_1 in G_2 gegeben. Eine Selbstkapselungsgrenze des Bildes einer Schemavariablen α, die nicht Bild einer Konstanten auf jedem Pfad in G_1 von einem ungekapselten Knoten nach α ist, liegt außerhalb des Bildabschlusses von F:

$$\overline{\mathrm{L}\, C_1} \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}^{\top} (Z_1 F^{\underline{\rfloor p \lfloor}} \sqcap \overline{\mathbb{Z}_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil}}) \subset \overline{\mathrm{L}\, F^{\lfloor p \rfloor}}$$

□

Weiter gilt:

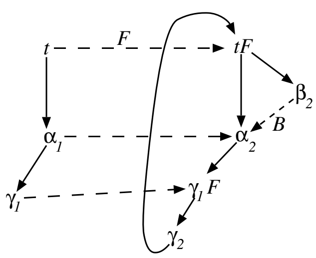
Lemma 7.5.4 (Variablenbeherrschung bei kreisfreien Graphen) [←126]
Im Abschnittskontext sei F eine p-Einpassung von G_1 in G_2. Dann können die in den Bildern der Schemavariablen frei vorkommenden Variablen nicht innerhalb des Bildabschlusses von F gebunden sein:

$$(F^{\underline{\lfloor p \rfloor}} \sqcap F \,\text{-}\!\!\in_2^{\top}) \, W_2 \subset \overline{\mathrm{L}\, F^{\lfloor p \rfloor} B_2^{\top}}$$

Beweis: Mit Lemma 7.3.5 und 7.5.2 offensichtlich. □

Lemma 7.5.5 (Urbild der Selbstkapselungsgrenze) [←90, 93, 97, 124] Ein Knoten, der innerhalb eines Abschnittes und Graphausschnittes $\mathfrak{a} = [t, b]\!]$ mit einem Punkt als oberer Grenze t liegt, kann durch den konstanten Teil einer nichtzyklischen Einpassung F nicht auf einen Knoten, der tF kapselt, abgebildet werden: $\underline{\mathfrak{a}} F_{\lceil\overline{p}\rceil} \subset \overline{t_{\mathfrak{a}} F\, C_2^{\top}}$.

Beweis: Sei $\alpha_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ ein (konstanter) Knoten, der in $\underline{\mathfrak{a}}$ liegt, zu dem aber sein Bild $\alpha_2 := \alpha_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil}$ den Knoten tF kapselt: $tF \subset \alpha_2 C_2$. Wegen der Irreflexivität der Kapselung ist $\alpha_1 \neq t$. Sei $\beta_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ eine von α_2 gebundene, unter tF frei vorkommende Variable. Diese existiert gemäß der Definition der Kapselung.



Als erstes beweisen wir, daß es in G_1 einen Pfad von α_1 nach t gibt. Falls es nämlich keinen gäbe, dann könnte tF auch nicht im Bild irgend eines von α_1 aus erreichbaren Knotens liegen, da F dann zyklisch wäre, und es müßte also auf jedem Pfad von α_2 nach tF ein Knoten γ_2 der Selbstkapselungsgrenze des Bildes eines von α_1 aus erreichbaren Knotens γ_1 liegen. Damit erhielten wir $\alpha_2 \subset \gamma_2 C_2$, da wir einen kreisfreien Pfad von α_2 nach tF voraussetzen können. Da wegen der Kreisfreiheit der Kapselung α_2 auf jedem Pfad von γ_2

nach tF liegt, erhalten wir aber schon einen Widerspruch zu der Kreisfreiheit des gewählten Pfades.

Damit ist gezeigt, daß es in G_1 einen Pfad von α_1 nach t geben muß. Aus Korollar 7.4.2 folgt damit $t \subset \alpha_1 C_1^{+}$. Es gibt daher ein $n \in \mathbb{N}$ mit $t \subset \alpha_1 C_1^{n+1}$. Da $\mathfrak{a}$ ein Graphausschnitt ist und $\alpha_1 \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$, gilt $\alpha_1 C_1^n \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$, aber ein Punkt aus $\alpha_1 C_1^n$ kapselt t und liegt damit in der Selbstkapselungsgrenze von $\mathfrak{a}$, was einen Widerspruch ergibt, da dieser Punkt damit außerhalb von $\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$ läge. □

Lemma 7.5.6 (Bindung im Bildabschnitt) [←128]
Sei $\mathfrak{a} = [t, b]\!]$ ein Abschnitt in G_1 mit einem Punkt $t : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ als oberer Grenze, und F eine nichtzyklische p-Einpassung von G_1 in G_2. Dann gilt:

$$\underline{\mathfrak{a}F} B_2 \sqcap \underline{\mathfrak{a}} F_{\lceil \overline{p} \rceil} \subset \underline{\mathfrak{a}F}$$

Beweis: Seien $\alpha_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ mit $\alpha_1 \subset \underline{\mathfrak{a}}$ und $\beta_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ mit $\beta_2 \subset \underline{\mathfrak{a}F}$ so gewählt, daß $\alpha_2 := \beta_2 B_2 = \alpha_1 F_{\lceil \overline{p} \rceil}$. Wäre $tF \subset \beta_2 \not{C}_2$, so auch $tF \subset \alpha_2 C_2$ und wir erhielten einen Widerspruch zu Lemma 7.5.5. Also liegt α_2 auf jedem Pfad von tF nach β_2, so daß aus $\beta_2 \subset \underline{\mathfrak{a}F}$ auch $\alpha_2 \subset \underline{\mathfrak{a}F}$ folgt. □

Nach Korollar 7.5.3 nehmen diejenigen Selbstkapselungsgrenzen von Bildabschnitten, die selbst Bilder von konstanten Knoten sind, eine gewisse Sonderstellung ein. Ihr Bild und was von ihm erreichbar ist (bis zu nicht überdeckten Selbstkapselungsgrenzen) liegt zwar meist großenteils außerhalb des Bildabschlusses der fraglichen Schemavariablen, wird aber weder von Nachfolgern übernommen, noch liegt es im Kontext, seine Anwesenheit ist aber durchaus relevant, da sonst Kanten ins Leere gingen. Wichtig wird dies bei der Termgraphersetzung, und daher führen wir einen entsprechenden Begriff ein:

Definition 7.5.7 [←144] Der **„falsche Bildabschluß“** $F^{\lceil p \rceil} : \mathcal{V}_1 \leftrightarrow \mathcal{V}_2$ einer p-Einpassung F von G_1 in G_2 ist definiert als (auch im Abschnittskontext mit Intervallen!):

$$F^{\lceil p \rceil} = \bigsqcup \{ x : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1 \mid x \subset p \bullet \underline{[x^{\top} x F^{\underline{]p[}} \sqcap \mathrm{L} F_{\lceil \overline{p} \rceil}, \mathrm{L} x F^{\underline{]p[}} \sqcap \overline{\mathrm{L} F_{\lceil \overline{p} \rceil}}]} \} \qquad \square$$

Es gilt $F^{\lceil p \rceil} \subset \mathrm{L} F^{\lfloor p \rfloor}$.

7.6 Komposition

Auch unter Verwendung der in den letzten Abschnitten bereitgestellten Hilfssätze bleibt der nun anzutretende Nachweis der Einpassungseigenschaften der Komposition zweier Einpassungen in vielen Fällen extrem aufwendig.

Lemma 7.6.1 (Strenge Bindungs- und Variablentreue unter Komposition) [←99]
Seien drei Graphen G_1, G_2 und G_3, zwei Variablenvektoren $p_F : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_1$ und $p_G : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_2$ sowie eine p_F-Einbettung F von G_1 in G_2 und eine p_G-Einbettung G von G_2 in G_3 gegeben. Dann übertragen sich strenge Bindungs- und Variablentreue jeweils auf FG, falls sowohl F als auch G die betreffende Eigenschaft besitzen.

Beweis: Unter den jeweiligen Voraussetzungen gilt:

- strenge Bindungstreue:

$$(FG)^{\top}_{\lceil \overline{p} \rceil} B_1 = G^{\top}_{\lceil \overline{p_G} \rceil} F^{\top}_{\lceil \overline{p_F} \rceil} B_1 = G^{\top}_{\lceil \overline{p_G} \rceil} B_2 F^{\top}_{\lceil \overline{p_F} \rceil} = B_3 G^{\top}_{\lceil \overline{p_G} \rceil} F^{\top}_{\lceil \overline{p_F} \rceil} = B_3 (FG)^{\top}_{\lceil \overline{p} \rceil}$$

- strenge Variablentreue:

$$W_1 (FG)_{\lceil \overline{p} \rceil} = W_1 F_{\lceil \overline{p_F} \rceil} G_{\lceil \overline{p_G} \rceil} = F_{\lceil \overline{p_F} \rceil} W_2 G_{\lceil \overline{p_G} \rceil} = F_{\lceil \overline{p_F} \rceil} G_{\lceil \overline{p_G} \rceil} W_3 = (FG)_{\lceil \overline{p} \rceil} W_3 \qquad \square$$

Lemma 7.6.2 (Kapselungseinheitlichkeit unter Komposition) [←99]
Wenn F eine p_F-Einpassung von G_1 in G_2 ist und G eine p_G-Einpassung von G_2 in G_3, erfüllt FG die Bedingung der Kapselungseinheitlichkeit.

Beweis:

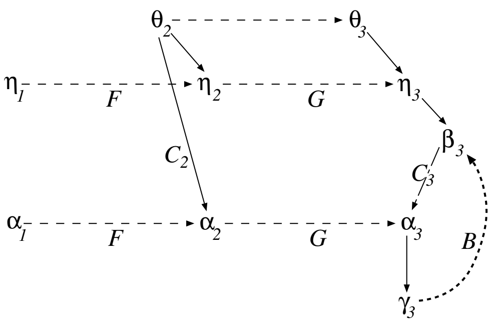
$$
\begin{array}{ll@{\qquad}l}
\multicolumn{2}{l}{\overline{\mathrm{L}_{\mathcal{V}_1} C_1} F G C_3^{\top}} & \\
= & \overline{\mathrm{L}_{\mathcal{V}_1} C_1} F((C_2^{\top}\mathrm{L} \sqcap G C_3^{\top}) \sqcup (\overline{C_2^{\top}\mathrm{L}} \sqcap G C_3^{\top})) & \\
\subset & \overline{\mathrm{L}_{\mathcal{V}_1} C_1} F C_2^{\top} G_{\lceil \overline{p_G} \rceil} (D_3^{\top})^* \sqcup \mathrm{L}_{\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2} \overline{\mathrm{L}_{\mathcal{V}_2} C_2} G C_3^{\top} & \text{Korollar 7.4.2} \\
\subset & F(D_2^{\top})^+ G_{\lceil \overline{p_G} \rceil} (D_3^{\top})^* \sqcup F \mathrm{L}_{\mathcal{V}_2} \overline{\mathrm{L}_{\mathcal{V}_2} C_2} G C_3^{\top} & F \text{ kapselungseinheitlich, total} \\
\subset & F(D_2^{\top})^* G (D_3^{\top})^+ \sqcup F \overline{\mathrm{L}_{\mathcal{V}_2} C_2} G C_3^{\top} & G \text{ nachfolgertreu} \\
\subset & FG(D_3^{\top})^* (D_3^{\top})^+ \sqcup FG(D_3^{\top})^+ & G \text{ kohärent, kapselungseinheitlich} \\
= & FG(D_3^{\top})^+ &
\end{array}
$$

□

Lemma 7.6.3 (Kapselungskonsistenz unter Komposition) [←99]
Wenn im Abschnittskontext F eine nichtzyklische p_F-Einpassung von G_1 in G_2 ist und G eine nichtzyklische p_G-Einpassung von G_2 in G_3, ist auch FG kapselungskonsistent.

Beweis: Seien $\alpha_1, \underline{\eta_1} : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ im Widerspruch zur Behauptung zwei Punkte mit $\eta_1^{\top}\alpha_1 \subset (\overline{C_1^{\top}\mathrm{L}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, C_1}) \sqcap FG(\overline{{-\!\!\!\in}_3^{\top}} \sqcap \Delta_3) {-\!\!\!\in}_3 G^{\top} F^{\top}$; seien $\alpha_2 := \alpha_1 F$, $\overline{\eta_2} := \eta_1 F$, $\alpha_3 := \alpha_2 G$, $\eta_3 := \eta_2 G$; sei $\gamma_3 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_3$ ein Zwischenpunkt vor ${-\!\!\!\in}_3$, also $\gamma_3 \subset \eta_3(\overline{{-\!\!\!\in}_3^{\top}} \sqcap \Delta_3) \sqcap \alpha_3 {-\!\!\!\in}_3^{\top}$ und sei schließlich $\beta_3 := \gamma_3 B_3$.

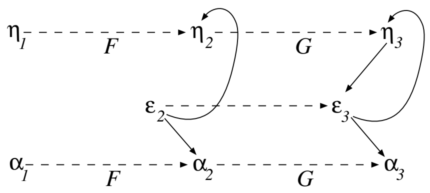
Wären α_2 und η_2 beide ungekapselt, so verstieße G gegen die Bedingung der Kapselungskonsistenz.



Nehmen wir zunächst an, α_2 sei gekapselt: $\alpha_2 \subset \theta_2 C_2$. Mit der Kapselungseinheitlichkeit ist η_2 von θ_2 aus erreichbar, und mit der Kohärenz von G auch η_3 von $\theta_3 := \theta_2 G_{\lceil \overline{p_G} \rceil}$.

Falls β_3 auf jedem Pfad von θ_3 nach α_3 liegt, ist Lemma 7.4.1 anwendbar und wir erhalten einen Punkt $\epsilon_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ mit $\alpha_2 \subset \epsilon_2 C_2$ und $\epsilon_3 := \epsilon_2 G_{\lceil \overline{p_G} \rceil}$ liegt auf jedem Pfad von η_3 nach α_3.

Andernfalls sei $\epsilon_2 := \theta_2$, und aufgrund der Kreisfreiheit der Kapselung (Lemma 3.5.3) erhalten wir die gleiche Situation.



Von hier aus fahren wir nun fort:

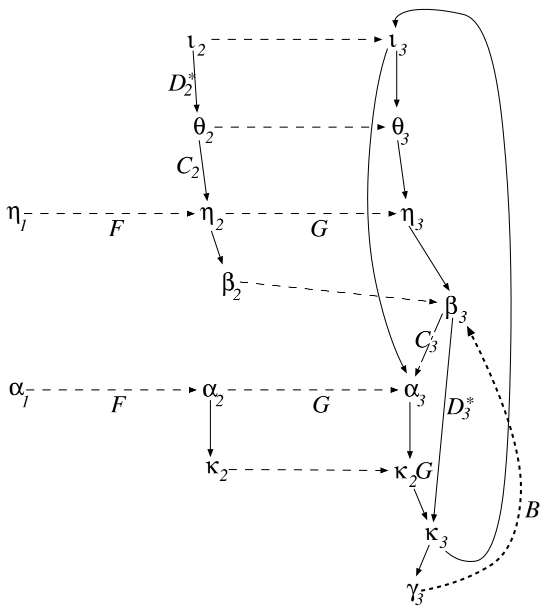
Mit der Kapselungseinheitlichkeit von F ist η_2 von ϵ_2 aus erreichbar, und mit der Kohärenz von G auch η_3 von ϵ_3 aus. Wenn ϵ_2 von η_2 aus kapselungsfrei erreichbar wäre, verstieße F gegen die Kapselungskonsistenz, wenn damit $\alpha_2 \subset \eta_2\Delta_2$. Dies wäre der Fall, denn läge ein η_2 kapselnder Knoten auf jedem Pfad von ϵ_2 nach α_2, so lieferte sein Bild unter G einen Widerspruch zu $\gamma_3 \subset \eta_3\Delta_3$. Käme ϵ_3 im Bild eines von η_2 aus erreichbaren Knotens vor, wäre G zyklisch.

Also muß es auf jedem kapselungsfreien Pfad von η_3 nach ϵ_3 einen Knoten $\iota_3 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_3$ geben, der in der Selbstkapselungsgrenze eines von η_2 aus erreichbaren Knotens $\iota_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ liegt. Wenn wir einen kreisfreien Pfad auswählen, so wird η_3 von ι_3 gekapselt: $\eta_3 \subset \iota_3 C_3$. Damit erhalten wir aber einen Widerspruch zur Annahme $\gamma_3 \subset \eta_3\Delta_3$.

α_2 kann damit nicht gekapselt sein. Also ist α_2 ungekapselt und η_2 gekapselt, sagen wir von θ_2. θ_2 wiederum sei von einem ungekapselten Knoten ι_2 aus erreichbar.

Mit der Kapselungseinheitlichkeit ist $\iota_3 := \iota_2 G$ von β_3 aus erreichbar. Mit der Kapselungskonsistenz gilt $\iota_3 \subset \beta_3 C_3$.

Aus der Nichtzyklizität von G folgt, daß β_3 nicht im Bild einer von η_2 aus erreichbaren Schemavariablen liegt. Nach der Vorraussetzung, daß $\beta_3 \subset \eta_3 \Delta_3$, kann β_3 auch nicht durch eine Selbstkapselungsgrenze aus dem Bild von $[\eta_2, \mathrm{O}]$ abgeschnitten sein. Also gibt es einen Punkt $\beta_2 \subset \eta_2 D_2^*$ mit $\beta_3 = \beta_2 G_{\lceil p_G \rceil}$ und damit auch einen Punkt $\gamma_2 \subset \beta_2 B_2^{\top}$ mit $\gamma_3 = \gamma_2 G_{\lceil p_G \rceil}$.

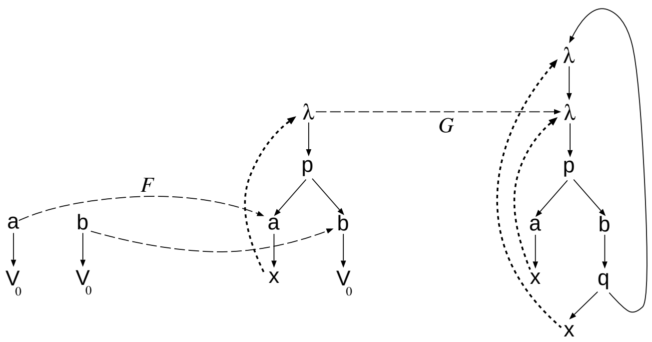


Wegen der Variablenbeherrschung und der Nichtzyklizität von G und wegen der Erhaltung freier Variablen durch G gibt es keinen von α_2 aus erreichbaren Punkt, in dessen Bild γ_3 läge. Daher gibt es auf jedem Pfad von α_3 nach γ_3 einen Punkt κ_3, der in der Selbstkapselungsgrenze eines von α_2 aus erreichbaren Punktes κ_2 liegt.

Da ι_2 ungekapselt ist, kann nach analogem Argument κ_3 nicht im Bild irgendeines von β_3 aus erreichbaren Knotens liegen und wir erhalten auf jedem — insbesondere auch auf jedem kreisfreien — Pfad von β_3 nach ι_3 eine Selbstkapselungsgrenze μ_3. Damit folgt $\mu_3 \subset \beta_3 C_3$, und wegen der Kreisfreiheit der Kapselung muß μ_3 auf jedem Pfad von β_3 nach $\mu_2 G$ liegen, was ein Widerspruch zur Kreisfreiheit des eben gewählten Pfades ist.

Zwei solche Punkte α_1 und η_1 können damit nicht existieren. □

Das folgende Bild zeigt ein Beispiel, in dem die Kapselungskonsistenz für FG nicht erfüllt wäre, hätten wir in dieser Bedingung D_2^* statt Δ_2 eingesetzt (im Intervallkontext verstieße G gegen die Variablenbeherrschung):



Lemma 7.6.4 (Kapselrespekt unter Komposition) [←99]
Wenn F eine p_F-Einpassung von G_1 in G_2 ist und G eine p_G-Einpassung von G_2 in G_3, ist auch FG kapselrespektierend.

Beweis: Mit Lemma 7.4.3 ergibt sich:

$$C_1(FG)_{\lceil p \rceil} = C_1 F_{\lceil p_F \rceil} G_{\lceil p_G \rceil} \subset F_{\lceil p_F \rceil} C_2 G_{\lceil p_G \rceil} \subset F_{\lceil p_F \rceil} \overline{G_{\lceil p_G \rceil}} = \overline{F_{\lceil p_F \rceil} G_{\lceil p_G \rceil}} = \overline{(FG)_{\lceil p \rceil}}$$ □

Die Konformität der Komposition zweier Einpassungen entspricht der Erhaltung von Graphausschnitten durch die zweite. Diese zeigen wir im folgenden Lemma:

Lemma 7.6.5 (Graphausschnitte unter Einpassungen) [←99]
Es seien im Abschnittskontext zwei Graphen G_1 und G_2, ein Variablenvektor $p : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_1$ zu G_1 und eine nichtzyklische p-Einpassung F von G_1 in G_2 gegeben. Wenn nun $\mathfrak{a} := [t, b]$ ein

kohärenter Graphausschnitt in G_1 ist, wobei $\mathrm{L}t$ ein Punkt ist, dann ist $\mathsf{b} := \mathsf{a}F = [tF, bF]$ ein Graphausschnitt in G_2.

Beweis: Unter den Voraussetzungen nehmen wir an, daß b kein Graphausschnitt in G_2 ist, d.h. es gibt einen Punkt $\alpha_2 \subset \overline{\mathrm{L}\underline{\mathsf{b}}} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathsf{b}}C_2$. Nun gibt es auch Punkte $\gamma_2 \subset \mathrm{L}\underline{\mathsf{b}} \sqcap \alpha_2 C_2^{\mathsf{T}}$ und $\delta_2 \subset \gamma_2 B_2^{\mathsf{T}} \sqcap \alpha_2 \not{C}_2^{\mathsf{T}}$.

Da $\alpha_2 \subset \overline{\mathrm{L}\underline{\mathsf{b}}}$, aber $\gamma_2 \subset \mathrm{L}\underline{\mathsf{b}} \sqcap \alpha_2 C_2^{\mathsf{T}}$, liegt auf jedem insbesondere kreisfreien Pfad von γ_2 nach α_2 ein Knoten aus $\mathrm{L}bF \sqcup \mathrm{L}\widehat{\mathsf{b}}$.

Wenn auf einem solchen kreisfreien Pfad zu einem Knoten $\beta_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ der unteren Grenze von a, also mit $\beta_1 \subset \mathrm{L}b$, sein Bild $\beta_1 F$ liegt, dann gibt es einen Pfad von $\beta_1 F$ nach α_2, der nicht über γ_2 führt, so daß wir insbesondere auch $\beta_1 F \subset \gamma_2 C_2$ erhalten.

Wäre δ_2 frei unter $\mathrm{L}tF$, so läge γ_2 in der Selbstkapselungsgrenze von b und damit außerhalb von $\underline{\mathsf{b}}$, was ein Widerspruch zur Annahme wäre.

Also gilt $\delta_2 \subset \overline{\mathrm{L}tF \not{C}_2^{\mathsf{T}}}$ und γ_2 liegt auf jedem Pfad von $\mathrm{L}tF$ nach $\beta_1 F$; mit Lemma 7.4.1 erhalten wir auf jedem Pfad von $\mathrm{L}t$ nach β_1 einen Knoten ϵ_1 mit $\mathrm{L}b \subset \epsilon_1 C_1$. Da wegen der Kohärenz von F mindestens einer dieser Knoten ϵ_1 in $\underline{\mathsf{a}}$ liegen muß, erhalten wir einen Widerspruch dazu, daß a ein Graphausschnitt ist, da β_1 sicher nicht in $\underline{\mathsf{a}}$ liegt.

Wenn andererseits auf einem solchen kreisfreien Pfad von γ_2 nach α_2 kein Knoten aus $\mathrm{L}bF$ liegt, dann muß dort ein Knoten η_2 der Selbstkapselungsgrenze von b liegen. Da der gewählte Pfad kreisfrei ist, gilt $\eta_2 \subset \gamma_2 C_2$. Nach Lemma 6.4.7 gilt $\gamma_2 \subset \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}F} \subset \underline{\mathsf{a}}F^{\lfloor p \rfloor}$, also gibt es einen Knoten $\gamma_1 \subset \underline{\mathsf{a}} \sqcap \gamma_2 (F^{\lfloor p \rfloor})^{\mathsf{T}}$.

Wenn $\gamma_1 \subset p$, dann folgt mit der Konformität von F, daß die obere Grenze im Bild von γ_1 liegt:

$$\mathrm{L}tF \subset \eta_2 C_2 \subset \gamma_2 C_2 C_2 \subset \gamma_1 F^{\lfloor p \rfloor} C_2 C_2 \subset \gamma_1 F^{\lfloor p \rfloor} \quad .$$

Falls γ_1 im Blockadenausgang von $\mathrm{L}t$ läge, $\gamma_1 \subset E_{p,F}$, läge η_2 in der Selbstkapselungsgrenze des Bildes von γ_1 und könnte damit nicht im Bild liegen.

Für γ_1 außerhalb des Blockadenausgangs erhalten wir aber einen Widerspruch zur Nichtzyklizität von F, so daß $\gamma_1 \subset p$ nicht in Frage kommt.

Bleibt also nur noch $\gamma_1 \subset \overline{p}$. Dann gilt

$$\delta_2 \subset \gamma_2 B_2^{\mathsf{T}} = \gamma_1 F_{\lceil \overline{p} \rceil} B_2^{\mathsf{T}} \subset \gamma_1 B_2^{\mathsf{T}} F_{\lceil \overline{p} \rceil} \subset \underline{\mathsf{a}} B_2^{\mathsf{T}} F_{\lceil \overline{p} \rceil} \subset \underline{\mathsf{a}} F_{\lceil \overline{p} \rceil} \quad .$$

Damit muß es in $\underline{\mathsf{a}}$ einen Urbildknoten $\eta_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ von η_2 geben, also $\eta_1 \subset \underline{\mathsf{a}} \sqcap \eta_2 (F^{\lfloor p \rfloor})^{\mathsf{T}}$. Falls $\eta_1 \subset \overline{p}$ erhalten wir einen Widerspruch zu Lemma 7.5.5.

Als letter Fall kommt also nur noch $\eta_1 \subset p$ in Frage, und wir müssen wieder danach unterscheiden, ob η_1 im Blockadenausgang von $\mathrm{L}t$ liegt oder nicht. Falls ja, erhalten wir η_2 als Selbstkapselungsgrenze des Bildes von η_1 im Widerspruch zu $\eta_1 \subset \eta_2 (F^{\lfloor p \rfloor})^{\mathsf{T}}$. Falls nein, erhalten wir wieder einen Widerspruch zur Nichtzyklizität von F. □

Die gleiche Aussage läßt sich auch im Intervallkontext beweisen, was aber recht langwierig ist und keinen weiteren Nutzen bringt, so daß wir diesen Beweis auslassen.

Lemma 7.6.6 (Kohärenz von Bildabschnitten) [←67, 99]

Gegeben sei im Abschnittskontext eine nichtzyklische Einpassung F von G_1 in G_2. Wenn nun in dem kohärenten Abschnitt und Graphausschnitt $\mathsf{a} = [t, b]\!]$ in G_1 die Wertebereiche der beiden Grenzen $\mathrm{L}t$ und $\mathrm{L}b$ jeweils Punkte sind, dann ist auch $\mathsf{a}F$ kohärent.

Beweis: Angenommen, auf jedem Pfad von tF nach bF liegt ein Knoten der Selbstkapselungsgrenze von $\mathsf{a}F$, dann gibt es auch auf jedem im Inneren von a verlaufenden Pfad von t nach b einen Knoten $\alpha_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$, in dessen Bildgerüst ein Knoten $\alpha_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ der Selbstkapselungsgrenze von $\mathsf{a}F$ liegt.

$\alpha_1 \subset \overline{p}$ ist aufgrund von Lemma 7.5.5 unmöglich. Es bleibt also noch der Fall $\alpha_1 \subset p$ zu betrachten. Aus der Konformität von F erhalten wir $tF \subset \alpha_2 C_2 \subset \alpha_1 F^{\lfloor p \rfloor} C_2 \subset \alpha_1 F^{\lfloor p \rfloor}$. Falls $\alpha_1 \neq t$, wäre F zyklisch; andernfalls aber läge ein Knoten der Selbstkapselungsgrenze von $\alpha_1 F^{\lfloor p \rfloor}$ in $\alpha_1 F^{\lfloor p \rfloor}$, was einen Widerspruch zur Annahme des Abschnittskontextes darstellt. □

Lemma 7.6.7 (Kohärenz bei CRS-Patterns) [↩99] Wenn F eine Einpassung von einem CRS-Pattern G_1 in einen CRS-Pattern G_2 ist, und G eine Einpassung von G_2 in einen beliebigen Graphen G_3, dann ist, wenn F, G und FG nichtzyklisch sind, FG auch kohärent.

Beweis: Sei $\alpha_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ ein Schemavariablenknoten in G_1, und seien $\beta_1, \ldots, \beta_n : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ die α_1 kapselnden Knoten, so daß $\beta_1 \subset \beta_2 C_1$, $\beta_2 \subset \beta_3 C_1$, u.s.w. Eine solche Anordnung dieser Binder existiert gemäß Lemma 3.5.5. Weiter sei für $i \in \{1, \ldots, n\}$ der Knoten $\gamma_i : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ der von β_i gebundene Nachfolger von α_1, also $\gamma_i = \beta_i B_1^{\mathsf{T}} \sqcap \alpha_1 D_1$; gemäß der Definition von CRS-Patterns ist damit γ_i eindeutig bestimmt.

Gemäß Voraussetzung ist $[\alpha_1]\!]F$ kohärent. Sei $\mathfrak{a} := [\alpha_1]\!]F$, $\mathfrak{b} := [\alpha_1]\!]FG$.

Falls $\mathfrak{b}$ nicht kohärent ist, muß es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ geben, so daß $\gamma_i \subset \overline{\underline{\mathfrak{a}}D_3}$.

Falls auf jedem Pfad von $\alpha_3 := \alpha_1 FG$ nach $\gamma_i FG$ je ein $\gamma_j FG$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $j \neq i$ liegt, so liegt auch auf jedem Pfad von $\alpha_2 := \alpha_1 F$ nach $\gamma_i F$ ein Knoten $\delta_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ mit $\gamma_j FG \subset \delta_2 G^{\lfloor p_G \rfloor}$. Wäre $\delta_2 \subset \overline{p_G}$, so folgt aus der Nichtzyklizität von G zusammen mit der Dominierung der Variablenbindung, daß nur $\delta_2 = \gamma_j F$ gelten kann, was im Endeffekt im Widerspruch zur Kohärenz von $\mathfrak{a}$ steht.

Damit im Falle $\delta_2 \subset p_G$ kein Verstoß gegen die Variablenbeherrschung vorliegt, muß auch $\beta_j FG \subset \delta_2 G^{\lfloor p_G \rfloor}$ gelten, was aber einen Widerspruch zur Nichtzyklizität von G ergibt.

Damit kann nicht auf jedem Pfad von α_3 nach $\gamma_i FG$ je ein $\gamma_j FG$ liegen, und zumindest auf einem Pfad mit Urbildpfad muß dann ein Knoten $\delta_3 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_3$ der Selbstkapselungsgrenze von $\mathfrak{b}$ liegen. Sei o.B.d.A. δ_3 auf diesem Pfad der unterste Knoten der Selbstkapselungsgrenze von $\mathfrak{b}$, und sei δ_2 ein entsprechender Urbildknoten, also mit $\delta_3 \subset \delta_2 G^{\lfloor p_G \rfloor}$. Falls $\beta_i FG \subset \delta_3 C_3$, erhalten wir mit der Konformität von FG einen Widerspruch zur Nichtzyklizität von FG.

Also gilt $\delta_3 \subset \beta_i FGC_3$; damit liegt δ_3 auf jedem Pfad von $\beta_i FG$ nach α_3 und wir erhalten auch auf jedem Pfad von $\beta_i F$ nach α_2 je einen Urbildknoten $\epsilon_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ mit $\delta_3 \subset \epsilon_2 G^{<p_G>}$.

Falls $\delta_2 \neq \epsilon_2$, erhalten wir einen Widerspruch zur Nichtzyklizität von G; falls $\delta_2 = \epsilon_2$, einen zu der von F. □

Lemma 7.6.8 (Bindungsbeherrschung unter Komposition) [↩99]
Sei F eine p_F-Einpassung von G_1 in G_2 sowie G eine nichtzyklische p_F-Einpassung von G_2 in G_3. Dann ist FG als p-Einbettung mit $p = p_F \sqcup F^{\mathsf{T}} p_G$ bindungsbeherrschend.

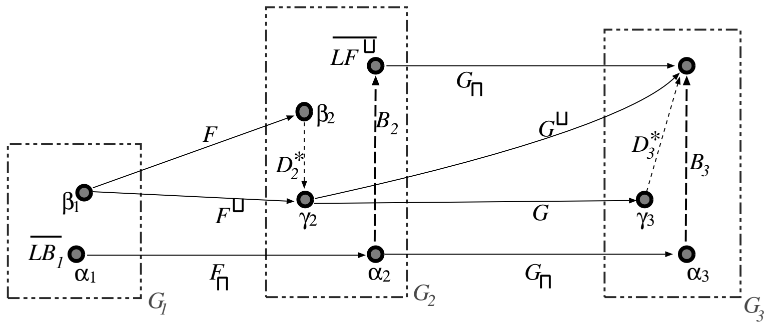
Beweis: Wir stützen uns außer auf die Bindungsbeherrschung, Bindungs- und Variablentreue von F und G noch auf die Kapselungseinheitlichkeit und Kohärenz von F sowie die Nichtzyklizität von G und darauf, daß G_1 kapselungsfrei basiert ist.

Zunächst gilt:

$$
\begin{array}{rcl}
(FG)_{\lceil \overline{p} \rceil} B_3 & = & F_{\lceil \overline{p_F} \rceil} G_{\lceil \overline{p_G} \rceil} B_3 \\
& \subset & \quad \langle \text{Bindungsbeherrschung } G \rangle \\
& & F_{\lceil \overline{p_F} \rceil} \overline{\mathrm{L}\, G^{\lfloor p_G \rfloor}} \sqcup F_{\lceil \overline{p_F} \rceil} B_2 G_{\lceil \overline{p_G} \rceil} \\
& \subset & \quad \langle \text{Bindungsbeherrschung } F \rangle \\
& & \overline{\mathrm{L}\, F^{\lfloor p_F \rfloor} G^{\lfloor p_G \rfloor}} \sqcup B_1 F_{\lceil \overline{p_F} \rceil} G_{\lceil \overline{p_G} \rceil} \sqcup (\overline{\mathrm{L}\, F^{\lfloor p_F \rfloor}} \sqcap F_{\lceil \overline{p_F} \rceil} B_2) G_{\lceil \overline{p_G} \rceil} \\
& \subset & \quad \langle \text{Bindungstreue } F \rangle \\
& & \overline{\mathrm{L}\,(FG)^{\lfloor p \rfloor}} \sqcup B_1 (FG)_{\lceil \overline{p} \rceil} \sqcup (\overline{B_1 \mathrm{L}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, F^{\lfloor p_F \rfloor}} \sqcap F_{\lceil \overline{p_F} \rceil} B_2) G_{\lceil \overline{p_G} \rceil}
\end{array}
$$
□

Für den letzten Term dieser Disjunktion betrachten wir nun folgende Situation: Sei $\alpha_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ ein Knoten aus G_1 mit $\alpha_1 F_{\lceil \overline{p_F} \rceil} B_2 \neq \mathrm{O}$, aber $\alpha_1 B_1 = \mathrm{O}$ (dann gilt $\alpha_1 F_{\lceil \overline{p_F} \rceil} G_{\lceil \overline{p_G} \rceil} B_3 =$

$\alpha_1 F_{\overline{\lceil p_F \rceil}} B_2 G_{\overline{\lceil p_G \rceil}}$). Wir nehmen nun an, daß es ein $\beta_1 : \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{V}_1$ gibt, so daß $\alpha_1 F_{\overline{\lceil p_F \rceil}} G_{\overline{\lceil p_G \rceil}} B_3 \subset \beta_1 F^{\lfloor p_F \rfloor} G^{\lfloor p_G \rfloor}$. Genauer sei ein $\gamma_2 : \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{V}_2$ gegeben, so daß $\gamma_2 \subset \beta_1 F^{\lfloor p_F \rfloor}$ und $\alpha_1 F_{\overline{\lceil p_F \rceil}} G_{\overline{\lceil p_G \rceil}} B_3 \subset \gamma_2 G^{\lfloor p_G \rfloor}$. Wir definieren noch Namen für folgende Punkte: $\alpha_2 := \alpha_1 F_{\overline{\lceil p_F \rceil}}$, $\alpha_3 := \alpha_2 G_{\overline{\lceil p_G \rceil}}$, $\beta_2 := \beta_1 F$ und $\gamma_3 := \gamma_2 G$.

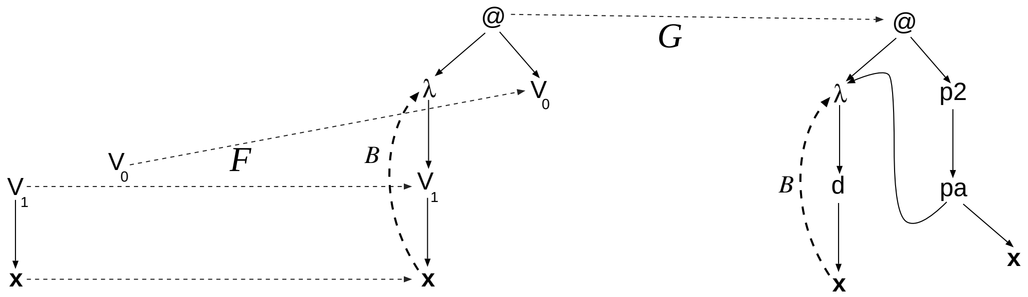


Betrachten wir zunächst den Vektor $v = \alpha_1 (D_1^*)^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, C_1}$ der ungekapselten Knoten in G_1, von denen aus α_1 erreichbar ist. Dann gilt $\alpha_2 B_2 \subset x C_2^{\mathsf{T}}$ für jeden Knoten $x : \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{V}_2$ aus v, da ja $\alpha_2 B_2 \subset \overline{\mathrm{L}\, F^{\lfloor p_F \rfloor}}$. Wegen der Kapselungseinheitlichkeit von F ist nun β_2 — und damit auch γ_2 — über einen nichtleeren Pfad von $\alpha_2 B_2$ aus erreichbar.

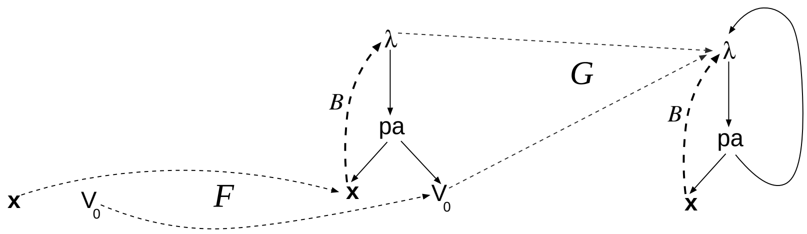
$\alpha_3 B_3$ liegt im Gerüst des Bildes von $\alpha_2 B_2$ und γ_2 ist von letzterem aus erreichbar, so daß mit $\alpha_3 B_3 \subset \gamma_2 G^{\lfloor p_G \rfloor}$ die Einpassung G zyklisch sein müßte.

Durch diesen Widerspruch ist die Behauptung bewiesen. □

Im folgenden Bild sind F und G beide bindungsbeherrschend, doch für FG scheitert dies an der mangelnden Kapselungseinheitlichkeit von F:



Noch ein Beispiel, in dem F kapselungseinheitlich, aber G zyklisch ist:



Lemma 7.6.9 (Erhaltung freier Variablen unter Komposition) [←99]

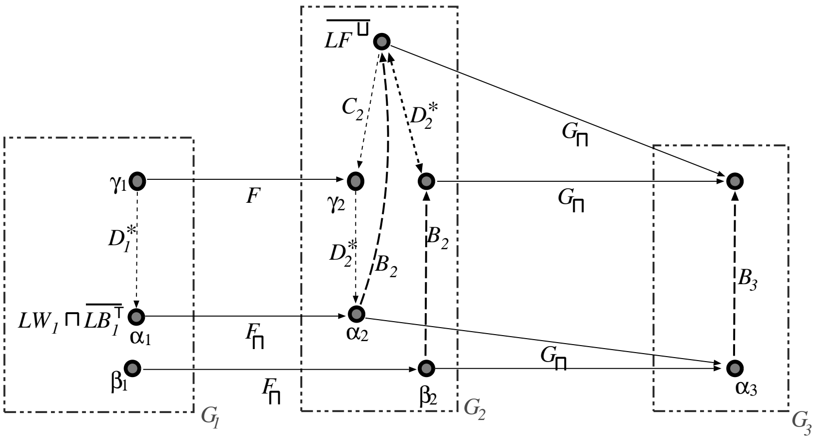
Sei F eine p_F-Einpassung von G_1 in G_2 sowie G eine nichtzyklische p_F-Einpassung von G_2 in G_3. Dann erhält FG als p-Einbettung mit $p = p_F \sqcup F^{\mathsf{T}} p_G$ die Verschiedenheit freier Variablen.

Beweis: Wir stützen uns außer auf die Erhaltung freier Variablen und Bindungs- und Variablentreue von F und G noch auf die Kapselungseinheitlichkeit, Bindungsbeherrschung und Kohärenz von F sowie die Nichtzyklizität und Erhaltung gebundener Variablen von G und darauf, daß G_1 kapselungsfrei basiert ist.

Zunächst erhalten wir:

$$
\begin{array}{rl}
\multicolumn{2}{l}{(FG)_{\lceil\overline{p}\rceil}\, W_3 (FG)^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil} \sqcap \overline{B_1 \mathrm{L}}} \\
= & (F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \sqcap \overline{B_1\mathrm{L}})((G_{\lceil\overline{p_G}\rceil}\, W_3\, G^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_G}\rceil} \sqcap \overline{B_2\mathrm{L}}) \sqcup (G_{\lceil\overline{p_G}\rceil}\, W_3\, G^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_G}\rceil} \sqcap B_2\mathrm{L}))\, F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \\
\subset & (F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \sqcap \overline{B_1\mathrm{L}})(W_2 \sqcup W_2(G_{\lceil\overline{p_G}\rceil}\, G^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_G}\rceil} \sqcap B_2\mathrm{L}\, B_2^{\mathsf{T}}))\, F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \\
\subset & (F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \sqcap \overline{B_1\mathrm{L}})\, W_2\, F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \sqcup (F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \sqcap \overline{B_1\mathrm{L}})\, W_2(G_{\lceil\overline{p_G}\rceil}\, G^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_G}\rceil} \sqcap B_2\mathrm{L}\, B_2^{\mathsf{T}})\, F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \\
\subset & W_1 \sqcup (W_1 F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \sqcap \overline{B_1\mathrm{L}})(G_{\lceil\overline{p_G}\rceil}\, G^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_G}\rceil} \sqcap B_2\mathrm{L}\, B_2^{\mathsf{T}})\, F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \\
\subset & W_1 \sqcup (W_1 \sqcap \overline{\mathrm{L}\, B_1^{\mathsf{T}}})\, F_{\lceil\overline{p_F}\rceil}(G_{\lceil\overline{p_G}\rceil}\, G^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_G}\rceil} \sqcap B_2\mathrm{L}\, B_2^{\mathsf{T}})\, F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil}
\end{array}
$$

Wir betrachten nun den letzten Term der Disjunktion: Angenommen wir haben zwei Punkte $\alpha_1, \beta_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ in G_1 mit $\alpha_1 \subset \mathrm{L}\, W_1 \sqcap \overline{\mathrm{L}\, B_1^{\mathsf{T}}}$ und $\beta_1 \subset \alpha_1(F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \sqcap \overline{B_1\mathrm{L}})(G_{\lceil\overline{p_G}\rceil}\, G^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_G}\rceil} \sqcap B_2\mathrm{L}\, B_2^{\mathsf{T}})$. Dann gilt $\alpha_2 := \alpha_1 F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \subset \mathrm{L}\, B_2^{\mathsf{T}}$ sowie $\beta_2 := \beta_1 F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \subset \mathrm{L}\, B_2^{\mathsf{T}}$. Sei nun γ_1 ein ungekapselter Knoten, von dem aus α_1 erreichbar ist. Wegen der Kohärenz von F gibt es einen Pfad n von γ_2 nach α_2, und mit der Bindungsbeherrschung von F folgt nun, daß $\alpha_2 B_2 \subset \overline{\mathrm{L}\, F^{\lfloor p_F \rfloor}}$, so daß $\alpha_2 B_2$ sicher nicht auf n von γ_2 aus liegt, und wegen der Kapselung gilt dann $\gamma_2 := \gamma_1 F \subset \alpha_2 B_2 C_2$.



Nach der Kapselungseinheitlichkeit von F ist nun aber β_2 von $\alpha_2 B_2$ aus erreichbar, und mit der Kapselung in G_2 muß es nun einen Pfad zwischen $\alpha_2 B_2$ und $\beta_2 B_2$ in die eine oder andere Richtung geben. Ist dieser Pfad leer, so gilt mit der Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen durch G:

$$\alpha_2^{\mathsf{T}}\beta_2 \subset G_{\lceil\overline{p_G}\rceil}\, G^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_G}\rceil} \sqcap B_2 B_2^{\mathsf{T}} \subset W_2$$

und daher auch

$$\alpha_1^{\mathsf{T}}\beta_1 \subset F_{\lceil\overline{p_F}\rceil}\, W_2\, F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \sqcap \overline{B_1\mathrm{L}} \subset W_1$$

Ist dieser Pfad aber nicht leer, so ist dies wegen $\alpha_2 B_2 G_{\lceil\overline{p_G}\rceil} = \beta_2 B_2 G_{\lceil\overline{p_G}\rceil}$ ein Widerspruch zur Nichtzyklizität von $G_{\lceil\overline{p_G}\rceil}$.

Damit läßt sich die Inklusionskette von oben fortschreiben und wir erhalten

$$(FG)_{\lceil\overline{p}\rceil}\, W_3 (FG)^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil} \sqcap \overline{B_1\mathrm{L}} \subset W_1 \qquad \square$$

Lemma 7.6.10 (Variablenbeherrschung unter Komposition) [←99]
Sei im Abschnittskontext F eine p_F-Einpassung von G_1 in G_2 sowie G eine nichtzyklische p_F-Einpassung von G_2 in G_3. Dann ist FG als p-Einbettung mit $p = p_F \sqcup F^{\mathsf{T}} p_G$ variablenbeherrschend.

Beweis: Wir stützen uns außer auf die Variablen- und Bindungsbeherrschung und Bindungs- und Variablentreue von F und G noch auf die Kapselungseinheitlichkeit und Kohärenz von F sowie die Nichtzyklizität und Erhaltung gebundener Variablen von G und darauf, daß G_1 kapselungsfrei basiert ist. Wir teilen das Problem in drei Teile:

$$\begin{array}{rcl} ((FG)^{\underline{\lfloor p\rfloor}} \sqcap FG\text{€}_3^{\mathsf{T}})\, W_3 \subset & & (F_{\overline{\lceil p_F\rceil}}\, G^{\underline{\lfloor p_G\rfloor}} \sqcap FG\text{€}_3^{\mathsf{T}})\, W_3 \\ & \sqcup & ((FG)^{\underline{\lfloor p\rfloor}} \sqcap F^{\underline{\lfloor p_F\rfloor}} G_{\overline{\lceil p_G\rceil}} \sqcap FG\text{€}_3^{\mathsf{T}})\, W_3 \\ & \sqcup & (F^{\underline{\lfloor p_F\rfloor}} G^{\underline{\lfloor p_G\rfloor}} \sqcap FG\text{€}_3^{\mathsf{T}})\, W_3 \end{array}$$

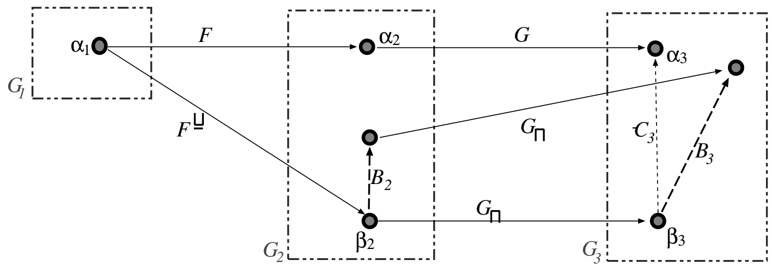
Für den ersten dieser drei Terme gilt nun

$$\begin{array}{cll} & (F_{\overline{\lceil p_F\rceil}}\, G^{\underline{\lfloor p_G\rfloor}} \sqcap FG\text{€}_3^{\mathsf{T}})\, W_3 & \\ = & F_{\overline{\lceil p_F\rceil}}\, (G^{\underline{\lfloor p_G\rfloor}} \sqcap G\text{€}_3^{\mathsf{T}})\, W_3 & \\ \subset & F_{\overline{\lceil p_F\rceil}}\, \overline{\mathrm{L}\, G_{\overline{\lceil p_G\rceil}}} & \text{Variablenbeherrschung } G \\ \subset & \overline{\mathrm{L}\, F_{\overline{\lceil p_F\rceil}}\, G_{\overline{\lceil p_G\rceil}}} & \\ = & \overline{\mathrm{L}\, (FG)_{\overline{\lceil p\rceil}}} & \end{array}$$

Für den zweiten Fall zeigen wir zunächst:

$$(FG)^{\underline{\lfloor p\rfloor}} \sqcap F^{\underline{\lfloor p_F\rfloor}} G_{\overline{\lceil p_G\rceil}} \sqcap FG\text{€}_3^{\mathsf{T}} \subset (F^{\underline{\lfloor p_F\rfloor}} \sqcap F\text{€}_2^{\mathsf{T}})\, G_{\overline{\lceil p_G\rceil}} \qquad (*)$$

Hierzu wählen wir einen Punkt $\alpha_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ aus G_1 und einen Punkt $\beta_3 \subset \alpha_1((FG)^{\underline{\lfloor p\rfloor}} \sqcap F^{\underline{\lfloor p_F\rfloor}} G_{\overline{\lceil p_G\rceil}} \sqcap FG\text{€}_3^{\mathsf{T}})$. Nun gibt es Punkte $x : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ mit $x \subset \beta_3 G_{\overline{\lceil p_G\rceil}}^{\mathsf{T}} \sqcap \alpha_1 F^{\underline{\lfloor p_F\rfloor}}$. Falls es einen solchen Punkt β_2 gibt, so daß $\beta_2 \subset \alpha_1 F\text{€}_3^{\mathsf{T}}$, so ist unsere Hilfsaussage bereits bewiesen. Nehmen wir nun also das Gegenteil an, nämlich daß $\beta_3 G_{\overline{\lceil p_G\rceil}}^{\mathsf{T}} \sqcap \alpha_1 F^{\underline{\lfloor p_F\rfloor}} \subset \overline{\alpha_1 F\text{€}_3^{\mathsf{T}}}$, und wählen einen beliebigen Punkt $\beta_2 \subset \beta_3 G_{\overline{\lceil p_G\rceil}}^{\mathsf{T}} \sqcap \alpha_1 F^{\underline{\lfloor p_F\rfloor}}$ aus. Dann ist β_2 in $\alpha_1 F^{\underline{\lfloor p_F\rfloor}}$ gebunden und es liegt $\beta_2 B_2$ auf jedem Pfad von $\alpha_1 F$ nach β_2, insbesondere also auch $\beta_2 B_2 \subset \alpha_1 F^{\lfloor p_F\rfloor}$.



Mit $\beta_3 \subset \alpha_3\text{€}_3^{\mathsf{T}}$ gilt aber auch

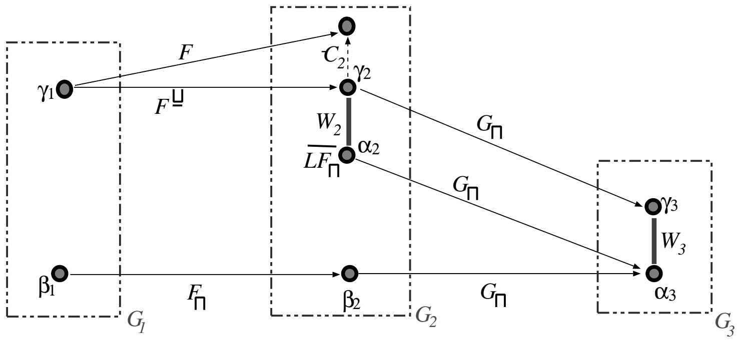
$$\alpha_3 \subset \beta_2 B_2 B_2^{\mathsf{T}} G_{\overline{\lceil p_G\rceil}}\, \text{€}_3 \subset \beta_2 B_2\, G_{\overline{\lceil p_G\rceil}}\, B_3^{\mathsf{T}}\text{€}_3 \subset \beta_2 B_2\, G_{\overline{\lceil p_G\rceil}}\, C_3\ ,$$

so daß ein Widerspruch zu Lemma 7.5.5 entsteht. (Nur hier greifen wir auf den Abschnittskontext zurück; im Intervallkontext gilt $(*)$ ebenfalls, nur ist der Beweis aufwendiger.)

Damit ist $(*)$ bewiesen und wir kommen etwas weiter:

$$\begin{array}{rcl} (F^{\underline{\lfloor p_F\rfloor}} G_{\overline{\lceil p_G\rceil}} \sqcap FG\text{€}_3^{\mathsf{T}})\, W_3 & \subset & (F^{\underline{\lfloor p_F\rfloor}} \sqcap F\text{€}_2^{\mathsf{T}})\, G_{\overline{\lceil p_G\rceil}}\, W_3 \\ & \subset & A_1 := (F^{\underline{\lfloor p_F\rfloor}} \sqcap F\text{€}_2^{\mathsf{T}})\, W_2\, G_{\overline{\lceil p_G\rceil}} \\ & \subset & \langle \text{Variablenbeherrschung } F \rangle \\ & & \overline{\mathrm{L}\, F_{\overline{\lceil p_F\rceil}}}\, G_{\overline{\lceil p_G\rceil}} \end{array}$$

Um nun zu zeigen, daß A_1 wieder in $\overline{\mathrm{L}\,(FG)_{\lceil p\rceil}}$ enthalten ist, nehmen wir zunächst das Gegenteil an, und zwar ganz konkret für Punkte $\beta_1, \gamma_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ und $\alpha_3, \gamma_3 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ mit $\beta_2 = \beta_1 F_{\lceil p_F \rceil}$, $\gamma_2 \subset \gamma_1 (F^{\lfloor p_F \rfloor} \sqcap F \cdot \!\!\!\!C_2^{\mathsf{T}})$, $\alpha_3 = \alpha_2 G_{\lceil p_G \rceil} = \beta_2 G_{\lceil p_G \rceil}$ und $\alpha_2 \subset \gamma_2 W_2$, also beliebige γ_1, α_3 mit $\gamma_1^{\mathsf{T}} \alpha_3 \subset A_1 \sqcap \mathrm{L}\, F_{\lceil p_F \rceil}\, G_{\lceil p_G \rceil}$ und dazu sicher so existierende Zwischenpunkte.



Angenommen, $\beta_2 \subset \overline{\mathrm{L}\, B_2^{\mathsf{T}}}$, ist also eine freie Variable, dann gilt wegen der Erhaltung freier Variablen durch G , daß $\alpha_2 \subset \beta_2 W_2$ und $\gamma_2 \subset \beta_2 W_2 = \beta_1 F_{\lceil p_F \rceil} W_2 = \beta_1 W_2 F_{\lceil p_F \rceil}$. Doch α_2 und γ_2 sind wegen der Variablenbeherrschung von F beide in $\overline{\mathrm{L}\, F_{\lceil p_F \rceil}}$ enthalten, was einen Widerspruch ergibt.

Sei also nun $\beta_2 \subset \mathrm{L}\, B_2^{\mathsf{T}}$. Dann gilt (mit Bindungstreue „$\subset$“ und Lemma 7.3.2):

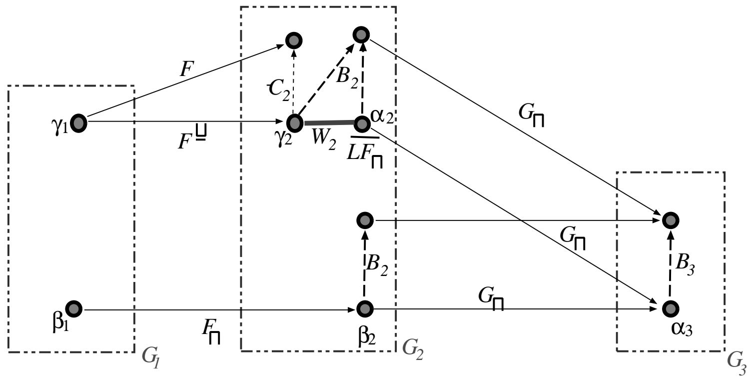
$$\alpha_2 \subset \beta_2 G_{\lceil p_G \rceil} G_{\lceil p_G \rceil}^{\mathsf{T}} \subset \mathrm{L}\, B_2^{\mathsf{T}} G_{\lceil p_G \rceil} G_{\lceil p_G \rceil}^{\mathsf{T}} = \mathrm{L}\, G_{\lceil p_G \rceil} B_3^{\mathsf{T}} G_{\lceil p_G \rceil}^{\mathsf{T}} \subset \mathrm{L}\, B_2^{\mathsf{T}} \;,$$

und damit auch

$$\gamma_2 \subset \alpha_2 W_2 \subset \mathrm{L}\, B_2^{\mathsf{T}} W_2 = \mathrm{L}\, B_2^{\mathsf{T}} \,.$$

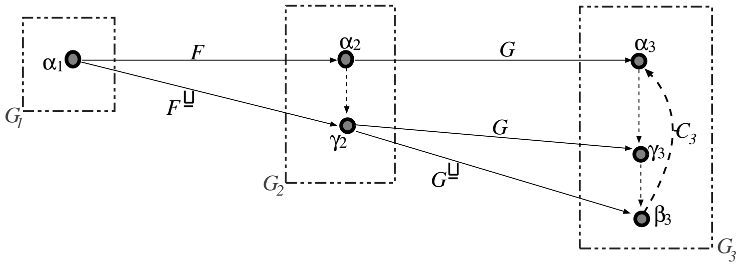
Sei ferner δ_1 ein ungekapselter Knoten über γ_1, dann ist $\delta_1 F$ von $\gamma_2 B_2$ gekapselt, da es einen Pfad von $\delta_1 F$ nach γ_2 gibt (Lemma 7.3.5). Wegen der Kapselungseinheitlichkeit von F ist nun aber auch β_2 von $\gamma_2 B_2$ aus erreichbar. Aus der Bindungsbeherrschung von G erhalten wir

$$\alpha_3 B_3 = \beta_2 G_{\lceil p_G \rceil} B_3 \sqcap \gamma_2 B_2 G_{\lceil p_G \rceil} = \beta_2 B_2 G_{\lceil p_G \rceil}$$



Falls nun $\gamma_2 B_2 = \beta_2 B_2$, dann erhalten wir aus der Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen durch G wieder $\gamma_2 \subset \beta_2 W_2$ und kommen wie oben zu einem Widerspruch zur Variablenbeherrschung von F. Falls $\gamma_2 B_2$ und $\beta_2 B_2$ aber verschieden sind, dann gibt es wegen der Dominierung der Variablenbindung einen Pfad in die eine oder andere Richtung zwischen den beiden und wir erhalten einen Widerspruch zur Nichtzyklizität von G. Damit ist der zweite Fall, $(\underline{F^{\lfloor p_F \rfloor}} G_{\lceil p_G \rceil} \sqcap FG \cdot\!\!\!\!C_3^{\mathsf{T}})\, W_3 \subset \overline{\mathrm{L}\,(FG)_{\lceil p\rceil}}$, bewiesen.

Wir betrachten nun den dritten Teil des Gesamtproblems, und dazu Punkte wie im folgenden Bild:



Angenommen, $\beta_3 \subset \gamma_3 \mathcal{C}_3^{\top}$. Dann gilt mit der Variablenbeherrschung von G: $\beta_3 \subset \overline{\mathrm{L}\, G_{\lceil \overline{p_G} \rceil}}$, von wo aus man wie im ersten Teil zum Ziel kommt.

Falls aber $\beta_3 \subset \overline{\gamma_3 \mathcal{C}_3^{\top}}$, dann ist β_3 zunächst gebunden und es muß wegen der Kapselung ein Pfad von $\beta_3 B_3$ — und damit auch von γ_3 — nach α_3 existieren. Da $\beta_3 B_3$ nun auf jedem Pfad von γ_3 nach β_3 liegt — und es existiert wegen $\beta_3 \subset \gamma_2 G^{\lfloor p_G \rfloor}$ mindestens ein solcher Pfad — gilt auch $\beta_3 B_3 \subset \gamma_2 G^{\lfloor p_G \rfloor}$, und da letzteres ein Graphausschnitt ist, erhalten wir auch $\alpha_3 \subset \gamma_2 G^{\lfloor p_G \rfloor}$. Da G nichtzyklisch ist, muß nun $\gamma_2 \subset \alpha_2 E_{p_G, G}$ sein. Daraus folgt aber $\alpha_3 = \gamma_3$ und $\beta_3 \subset \alpha_3 \mathcal{C}_3^{\top} = \gamma_3 \mathcal{C}_3^{\top}$ im Widerspruch zur Annahme. Damit kann dieser Fall nicht eintreten. □

Satz 7.6.11 (Komposition von Einpassungen) [←100]
Seien im Abschnittskontext drei Graphen G_1, G_2 und G_3, zwei Schemavariablenvektoren $p_F : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_1$ und $p_G : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_2$ sowie eine nichtzyklische p_F-Einpassung F von G_1 in G_2 und eine nichtzyklische p_G-Einpassung G von G_2 in G_3 gegeben. Wenn Metavariable in p_F und p_G höchstens einstellig sind, oder wenn FG nichtzyklisch ist und G_1 und G_2 CRS-Patterns sind, dann ist FG eine p-Einpassung von G_1 in G_3 mit $p = p_F \sqcup p_G F^{\top}_{\lceil \overline{p_F} \rceil}$.

Beweis: Die Einpassungseigenschaften von FG leiten sich aus den eben bewiesenen Lemmata her:

- zu den Nachfolgerfunktionen:
  - Kohärenz: nach Lemma 7.6.6 bzw. 7.6.7
- zur Bindung:
  - Strenge Bindungstreue: nach Lemma 7.6.1
  - Konformität: nach Lemma 7.6.5
  - Kapselungseinheitlichkeit: nach Lemma 7.6.2
  - Kapselungskonsistenz: Lemma 7.6.3
  - Kapselrespekt: Lemma 7.6.4
  - Bindungsbeherrschung: nach Lemma 7.6.8
- zur Variablenidentität:
  - Strenge Variablentreue: nach Lemma 7.6.1
  - Erhaltung gebundener Variablen: nach Lemma 6.1.4
  - Erhaltung freier Variablen: nach Lemma 7.6.9
  - Variablenbeherrschung: nach Lemma 7.6.10 □

Im allgemeinen ist die Komposition zweier nichtzyklischer Einpassungen nicht wieder nichtzyklisch, so daß wir zusätzliche Bedingungen brauchen, wenn wir eine Kategorie erhalten wollen. Eine Möglichkeit ist die Einschränkung auf definitive Einpassungen (siehe Definition 6.5.4), die zwar recht radikal erscheinen mag, aber immer noch liberaler ist als die bei CRS übliche Einschränkung auf Grundterme als Bilder von Homomorphismen. Eine andere

Möglichkeit ist die Einschränkung auf kreisfreie Graphen. Beide Möglichkeiten nutzen nicht die volle Allgemeinheit der Beweise, aber Nichtzyklizität scheint leider eine unentbehrliche Bedingung zu sein.

Wesentlich an Satz 7.6.11 ist, daß Kategorien von Einpassungen mit Schemavariablen mit Nachfolgern konstruierbar sind. Als Besipiele erhalten wir:

Satz 7.6.12 [←128] Folgende **Einpassungskategorien** existieren:

- v_s-zulässige Graphen mit höchstens einstelligen Schemavariablen und v_s-definitiven nichtzyklischen Einpassungen,
- v_s-zulässige kreisfreie Graphen mit höchstens einstelligen Schemavariablen und beliebigen Einpassungen,
- CRS-Patterns mit v_s-definitiven nichtzyklischen Einpassungen und
- kreisfreie CRS-Patterns mit beliebigen Einpassungen. □

Damit haben wir nämlich gezeigt, daß die Einpassungsbedingungen die wesentlichen Aspekte der Strukturerhaltung für unsere Termgraphen abdecken. Wie wir später sehen werden, benötigen wir für einen angemessenen Ersetzungsbegriff gar keine Kategorie von Einpassungen, so daß die zusätzlichen Bedingungen in Satz 7.6.11 auch nicht schmerzen.

7.7 Verhalten auf DAGs

Nicht immer wird die volle Freiheit beliebiger, ggf. zyklischer Graphen benötigt. Die häufigsten Anwendungen beschäftigen sich ausschließlich mit kreisfreien Wurzelgraphen, also kurz WurzelDAGs. Eine Wurzel ist dabei ein Knoten, von dem aus alle anderen Knoten erreichbar sind, mit anderen Worten eine Basis, die ein Punkt ist. Eine Wurzel ist damit in allgemeinen Graphen noch nicht notwendigerweise *Quelle*, also ein Knoten ohne Vorgänger, bzw. ein Punkt in $\overline{\mathrm{L}\,D}$.

Wir können nun zeigen, daß für von Wurzelgraphen ausgehende Einpassungen die Kapselungseinheitlichkeit trivial ist, und für in kreisfreien Graphen endende Einpassungen die Bindungsbeherrschung und Kapselungskonsistenz. In letzterem Fall ergibt sich ohnehin auch der Kapselrespekt von selbst.

Diese Fakten bewirken, daß der Aufwand zur Berechnung von Matchings bei Einschränkung auf WurzelDAGs erheblich reduziert werden kann.

Lemma 7.7.1 (Kapselungseinheitlichkeit bei Wurzelgraphen)
Sei F eine kohärente, streng bindungstreue, konforme, kapselrespektierende, bindungsbeherrschende und variablenbeherrschende p-Einbettung von G_1 in G_2. Falls G_1 ein Wurzelgraph ist mit einer ungekapselten Wurzel, dann ist F kapselungseinheitlich.

Beweis: Sei $\alpha_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ eine ungekapselte Wurzel in G_1. Angenommen, es gibt einen Knoten $\delta_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$, so daß es ein $\beta_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ gibt mit $\beta_1 \subset \overline{\mathrm{L}\,C_1}$ und $\delta_2 \subset \beta_1 F C_2^{\mathsf{T}}$, aber $\delta_2 D_2^{+} F^{\mathsf{T}} \neq \mathrm{L}_{\mathbb{1},\mathcal{V}_1}$, dann ist mit der Kohärenz von F auch $\alpha_2 := \alpha_1 F$ nicht in $\delta_2 D_2^{+}$. Es gilt daher sicher $\beta_1 E_{p,F} \sqcap \alpha_1 E_{p,F} = \mathrm{O}$, und es gibt ein $\gamma_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ mit $\gamma_2 \subset \delta_2 B_2^{\mathsf{T}} \sqcap \beta_1 F \not{C}_2^{\mathsf{T}}$. Mit der Dominierung der Variablenbindung liegt sicher δ_2 auf jedem Pfad von $\alpha_1 F$ nach $\beta_1 F$, und mit Lemma 7.4.1 erhalten wir einen Widerspruch zu $\beta_1 \subset \overline{\mathrm{L}\,C_1}$. □

Da jede Quelle ungekapselt ist, ist F insbesondere kapselungseinheitlich, wenn eine Quelle (dann ja einzige) Wurzel ist. In den üblicherweise betrachteten Fällen von WurzelDAGs und Arboreszenzen (Bäumen) ergibt sich daher die Kapselungseinheitlichkeit von selbst.

Lemma 7.7.2 (Kapselungskonsistenz bei kreisfreien Graphen) [←78]
Sei F eine nichtzyklische, konforme und kapselungseinheitliche p-Einbettung von G_1 in G_2 mit strenger Bindungstreue und Erhaltung freier Variablen. Falls G_2 kreisfrei ist, dann ist F kapselungskonsistent.

Beweis: Seien α_1 und β_1 zwei ungekapselte Knoten in G_1, und seien $\alpha_2 := \alpha_1 F$ und $\beta_2 := \beta_1 F$ ihre Bilder. Es liege nun eine Variable γ_2 o.B.d.A. frei unter α_2, also $\alpha_2 \subset \gamma_2 \epsilon_2$. Sei weiter $\beta_2 \subset \gamma_2(\overline{\epsilon_2} \sqcap (D_2^*)^{\mathsf{T}}) = \gamma_2(\overline{\epsilon_2} \sqcap \Delta_2)$, dann ist γ_2 gebunden und sein Bindungsknoten $\delta_2 := \gamma_2 B$ liegt auf jedem Pfad von β_2 nach γ_2, insbesondere gilt also $\delta_2 \subset \beta_2 D_2^*$.

Nun ist aber α_2 gekapselt: $\alpha_2 \subset \gamma_2 \epsilon_2 \subset \delta_2 B_2^{\mathsf{T}} \epsilon_2 \subset \delta_2 C_2$, und mit der Kapselungseinheitlichkeit gilt: $\beta_2 \subset \delta_2 D_2^+ \subset \beta_2 D_2^+$, was ein Widerspruch zur Kreisfreiheit von G_2 ist. □

Lemma 7.7.3 (Bindungsbeherrschung bei kreisfreien Graphen) [←78]
Sei F eine nichtzyklische, konforme, variablenbeherrschende und kapselungseinheitliche p-Einbettung von G_1 in G_2 mit strenger Bindungstreue und Erhaltung freier Variablen. Falls G_2 kreisfrei ist, dann erfüllt F die Bedingung der Bindungsbeherrschung.

Beweis: Gegeben seien zwei Punkte $\alpha_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ und $\beta_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ mit $\alpha_1^{\mathsf{T}} \beta_2 \subset F_{\lceil \overline{p} \rceil} B_2$. Falls $\alpha_1 \subset \mathrm{L} B_1^{\mathsf{T}}$, also gebunden ist, dann haben wir keine Probleme, denn es gilt $\beta_2 = \alpha_1 (F_{\lceil \overline{p} \rceil} B_2 \sqcap B_1 \mathrm{L}) \subset \alpha_1 B_1 F_{\lceil \overline{p} \rceil}$.

Nehmen wir nun α_1 als freie Variable an, also $\alpha_1 \subset \overline{\mathrm{L} B_1^{\mathsf{T}}}$, und nehmen wir im Widerspruch zur Bindungsbeherrschung an, daß $\beta_2 \subset \mathrm{L} F^{\lfloor p \rfloor}$.

Sei nun $\gamma_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ ein ungekapselter Knoten, von dem aus α_1 erreichbar ist. Aus Korollar 7.3.6 folgt zusammen mit der Erhaltung freier Variablen durch F, daß $\alpha_1 F$ auch frei unter dem Bild von γ_1 liegt: $\gamma_1 F \subset \alpha_1 F \epsilon_2$. Damit ist $\gamma_1 F$ von β_2 gekapselt.

Sei $\beta_1 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ ein Knoten mit $\beta_2 \subset \beta_1 F^{\lfloor p \rfloor}$. Wäre $\beta_1 \subset \overline{p}$, so hätte man mit

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &\subset \alpha_1 F_{\lceil \overline{p} \rceil} B_2 F_{\lceil \overline{p} \rceil}^{\mathsf{T}} && \\
&\subset \alpha_1 F_{\lceil \overline{p} \rceil} F_{\lceil \overline{p} \rceil}^{\mathsf{T}} B_1 && \text{strenge Bindungstreue} \\
&\subset \alpha_1 (F_{\lceil \overline{p} \rceil} W_2 F_{\lceil \overline{p} \rceil}^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{B_1 \mathrm{L}}) B_1 && \text{Markierungstreue, } \alpha_1 \text{ freie Variable} \\
&\subset \alpha_1 W_1 B_1 && \text{Erhaltung freier Variablen} \\
&= \alpha_1 B_1 &&
\end{aligned}
$$

einen Widerspruch zur Ungebundenheit von α_1. Daher muß $\beta_1 \subset p$ sein.

Nach der Kapselungseinheitlichkeit von F muß nun $\beta_1 F$ von β_2 aus über einen nichtleeren Pfad erreichbar sein. Dann können wir aber weiter abschätzen:

$$\beta_1 F \subset \beta_2 D_2^+ \subset \beta_1 F^{\lfloor p \rfloor} D_2^+ \subset \beta_1 F D_2^* D_2^+ \subset \beta_1 F D_2^+$$

und erhalten einen Widerspruch zur Kreisfreiheit von G_2. □

Kapitel 8

Korrespondenzen und Homomorphismen

Für verschiedene Knoten einer parallelen Variablen wünscht man sich eine gewisse Äquivalenz zwischen deren Bildern. So wollen wir nun Vorbereitungen treffen, über die Definition von Korrespondenzen, zunächst zwischen Intervallen, solche Beziehungen herzustellen. Die motivierende Idee ist, daß eine Art auf Intervalle bzw. Abschnitte eingeschränkter Isomorphismen benötigt wird, jedoch nur „bis auf Identifizierung“.

Korrespondenzen sind abgeschlossen gegenüber gewissen einfachen Operationen. Insbesondere gilt, daß die Transponierte jeder Korrespondenz wieder eine solche ist. Bei der Infimumsbildung muß man sich auf Korrespondenzen zwischen Graphausschnitten mit eindeutiger oberer Grenze beschränken; die Graphausschnittbedingung ist für die Erhaltung der Bindungstreue und der Variablentreue nötig. Bei der Supremumsbildung hingegen, sowie bei der Komposition ist die Einschränkung auf Graphausschnitte nur für die Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen erforderlich. Diese Eigenschaften und ihre Beweise finden sich in Abschnitt 8.3.

Wie bereits angekündigt, sollen Korrespondenzen dazu dienen, zwischen den Bildern verschiedener Knoten einer parallelen Variablen eine Beziehung herzustellen. Der Intuition gemäß ist für die Bilder einer Blattvariablen eine solche Relation bereits durch den Gleichwertigkeitsbegriff aus Definition 4.2.5 gegeben. Für Bilder von Blattvariablen erhalten wir Intervalle, deren untere Grenze die leere Relation ist; solche Intervalle sind trivialerweise offen. Es läßt sich zeigen, daß sich aus einer Korrespondenz zwischen Abschnitten mit leerer unterer Grenze immer eine Identifizierung gewinnen läßt, die Gleichwertigkeit induziert, und daß sich umgekehrt im Falle der Gleichwertigkeit nach Definition 4.2.5 immer eine Korrespondenz zwischen den entsprechenden Abschnitten finden läßt. Damit ist volle Kompatibilität der Korrespondenzen mit dem Gleichwertigkeitsbegriff gewährleistet. All dies findet sich in Abschnitt 8.4.

Nach Einführung einiger Begriffe zu Korrespondenzen zwischen den Bildern von Schemavariablen unter Einpassungen in Abschnitt 8.5 definieren wir in Abschnitt 8.6 *Homomorphismen* als Einpassungen, zu denen zwischen den Bildern paralleler Schemavariablen jeweils die Existenz von Korrespondenzen gefordert wird.

Abschließend erfordern die Gegebenheiten auf mehrstelligen parallelen Schemavariablen noch spezielle Begriffe, die wir in Abschnitt 8.7 zur Verfügung stellen.

8.1 Korrespondenzen

Definition 8.1.1 (Korrespondenz) [←104]
Gegeben seien ein Graph G und zwei Intervalle $\mathfrak{a} = [t, b]$ und $\mathfrak{b} = [u, c]$ mit $t\mathrm{L} = u\mathrm{L}$ und $b\mathrm{L} = c\mathrm{L}$. Eine Relation $F : \mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{V}$ heißt *Korrespondenz von* $\mathfrak{a}$ *nach* $\mathfrak{b}$, wenn:

- der Definitionsbereich von F genau alle Knoten in $\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$ umfaßt, d.h.: $\mathrm{L}F^{\mathsf{T}} = \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$,
- der Wertebereich von F genau alle Knoten in $\mathrm{L}\underline{\mathfrak{b}}$ umfaßt, d.h.: $\mathrm{L}F = \mathrm{L}\underline{\mathfrak{b}}$,
- F die oberen Grenzen ineinander überführt: $u \sqcap \overline{\mathrm{L}c} \subset (t \sqcap \overline{\mathrm{L}b})F$, und $t \sqcap \overline{\mathrm{L}b} \subset (u \sqcap \overline{\mathrm{L}c})F^{\mathsf{T}}$,
- F Markierungen erhält: $FM \subset M$,
- F Nachfolger erhält: $(F \| \mathrm{I})S \subset S(F \sqcup b^{\mathsf{T}}c)$,

- F auf intern gebundenen Knoten Bindungen erhält:

$$\begin{aligned} FB \sqcap \mathrm{L}F &\subset BF & \qquad BF \sqcap F\mathrm{L} &\subset FB \\ F^{\mathsf{T}}B \sqcap \mathrm{L}F^{\mathsf{T}} &\subset BF^{\mathsf{T}} & \qquad BF^{\mathsf{T}} \sqcap F^{\mathsf{T}}\mathrm{L} &\subset F^{\mathsf{T}}B \end{aligned}$$

- F auf intern gebundenen Knoten die Verschiedenheit der Variablen erhält:

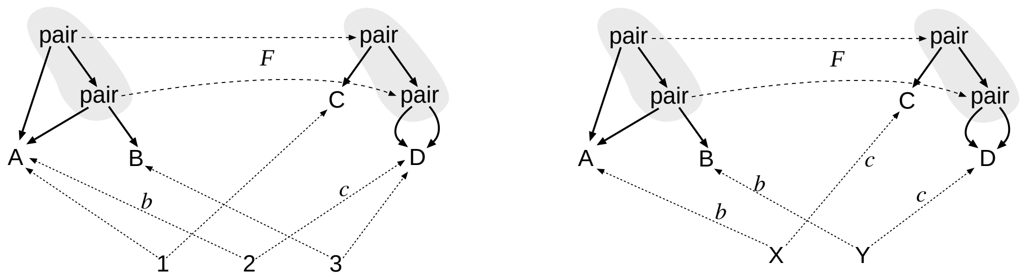
$$F^{\mathsf{T}}WF \sqcap \mathrm{L}FB^{\mathsf{T}} \sqcap BB^{\mathsf{T}} \subset W \qquad \text{und} \qquad FWF^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}F^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}} \sqcap BB^{\mathsf{T}} \subset W$$

- F Kapselungen respektiert: $FF^{\mathsf{T}} \subset \overline{C}$, $F^{\mathsf{T}}F \subset \overline{C}$,
- F nicht intern gebundene Variablenknoten nur auf Knoten der gleichen Variablen abbildet:

$$F \sqcap \overline{BF\mathrm{L}} \sqcap W\mathrm{L} \subset W \quad ,$$

- F variablentreu ist: $FW \sqcap \mathrm{L}F = WF \sqcap F\mathrm{L}$. □

Hier kommt zum ersten Male zum Tragen, daß Intervallgrenzen keine Vektoren zu sein brauchen. So liegt der einzige Unterschied zwischen den beiden Situationen im folgenden Bild in den unteren Intervallgrenzen, doch das Ergebnis ist, daß die Bedingung zur Nachfolgertreue links erfüllt ist und rechts nicht (die oberen Intervallgrenzen wurden nicht explizit eingezeichnet):



Die Korrespondenzen in diesem Bild zeichnen sich noch dadurch aus, daß sie sowohl eindeutig als auch injektiv sind. Wir geben solchen Korrespondenzen einen eigenen Namen:

Definition 8.1.2 Eine **gleichwertige Abbildung** ist eindeutige und injektive Korrespondenz. □

Für gleichwertige Abbildungen ist die Bedingung zur Erhaltung der Verschiedenheit intern gebundener Variablen trivialerweise erfüllt. Ferner sind hier die Bedingungen zur Bindungstreue äquivalent zur Konjunktion der folgenden beiden Bedingungen: $F^{\mathsf{T}}BF \subset B$ und $FBF^{\mathsf{T}} \subset B$.

Ein triviales Beispiel für Korrespondenzen sind Einschränkungen der Identität:

Behauptung 8.1.3 (Ausschnitte der Identität) Für jedes Intervall $\mathfrak{a}$ ist $\mathbb{I} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$ eine Korrespondenz, ja sogar eine gleichwertige Abbildung von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{a}$. □

Um den Begriff der Korrespondenz auch auf Abschnitte übertragen zu können, müssen wir uns vor allem der Selbstkapselungsgrenze genauer annehmen: Die Knoten der Selbstkapselungsgrenze nehmen eine „globale“ Stellung im Verhältnis zum jeweiligen Abschnitt ein, ähnlich den Bindungsknoten nicht intern gebundener Variablen. Daher erscheint es sinnvoll, Identität der Selbstkapselungsgrenzen zu fordern. Die Nachfolgertreue muß natürlich diese hinzugekommenen „Ausstiege“ aus $\underline{\mathfrak{a}}$ auch noch berücksichtigen. Sonst kann alles beim alten bleiben:

Definition 8.1.4 (Korrespondenz zwischen Abschnitten)
Gegeben seien ein Graph G und zwei Abschnitte $\mathfrak{a} = [t, b]\!]$ und $\mathfrak{b} = [u, c]\!]$ mit $t\mathrm{L} = u\mathrm{L}$ und $b\mathrm{L} = c\mathrm{L}$. Eine Relation $F : \mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{V}$ heißt *Korrespondenz von* $\mathfrak{a}$ *nach* $\mathfrak{b}$, wenn:

- die Selbstkapselungsgrenzen gleich sind: $\mathrm{L}\widehat{\mathsf{a}} = \mathrm{L}\widehat{\mathsf{b}}$
- F Nachfolger erhält: $(F\|\mathrm{I})S \subset S(F \sqcup b^{\mathsf{T}}c \sqcup (\widehat{\mathsf{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}\widehat{\mathsf{b}} \sqcap \mathrm{I}))$,
- alle Bedingungen aus Definition 8.1.1 bis auf die dortige Nachfolgertreue erfüllt sind. □

Die Forderung nach Gleichheit der Selbstkapselungsgrenzen ist nicht trivial erfüllt, da gebundene Variable aus $tC^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}$ nicht immer innerhalb von $\underline{\mathsf{a}}$ liegen (wo sie lokal frei wären). In der Nachfolgerbedingung gilt aufgrund der Gleichheit der Selbstkapselungsgrenzen natürlich $(\widehat{\mathsf{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}\widehat{\mathsf{b}} \sqcap \mathrm{I}) = \mathrm{I} \sqcap \mathrm{L}\widehat{\mathsf{a}}$.

Um eine einheitliche Argumentation zu ermöglichen, definieren wir folgende (überladene) Abkürzung:

Definition 8.1.5 (Korrespondenzgrenze) [←110] Zu zwei Intervallen a und b in G sei die *(untere) Korrespondenzgrenze* $\perp_{\mathsf{a},\mathsf{b}}$ *von* a *nach* b folgendermaßen definiert:

$$\perp_{\mathsf{a},\mathsf{b}} := b_{\mathsf{a}}^{\mathsf{T}} b_{\mathsf{b}}$$

Zu zwei Abschnitten a und b hingegen definieren wir:

$$\perp_{\mathsf{a},\mathsf{b}} := b_{\mathsf{a}}^{\mathsf{T}} b_{\mathsf{b}} \sqcup (\widehat{\mathsf{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}\widehat{\mathsf{b}} \sqcap \mathrm{I})$$ □

Damit lassen sich die Bedingungen zur Nachfolgertreue einheitlich folgendermaßen schreiben:

$$(F\|\mathrm{I})S \subset S(F \sqcup \perp_{\mathsf{a},\mathsf{b}})$$

Wichtige Eigenschaften sind allgemein $\underline{\mathsf{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \perp_{\mathsf{a},\mathsf{b}} = \mathrm{O}$ und $\mathrm{L}\underline{\mathsf{b}} \sqcap \perp_{\mathsf{a},\mathsf{b}} = \mathrm{O}$, sowie im Abschnittskontext $\widehat{\mathsf{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \perp_{\mathsf{a},\mathsf{b}} \subset \mathrm{I}$ und $\mathrm{L}\widehat{\mathsf{b}} \sqcap \perp_{\mathsf{a},\mathsf{b}} \subset \mathrm{I}$.

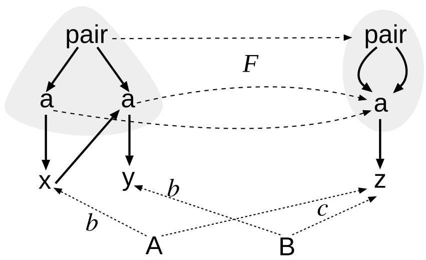
Die meisten Aussagen über Korrespondenzen zwischen Intervallen gelten auch für solche zwischen Abschnitten. Wir werden Sonderfälle separat behandeln und Gemeinsamkeiten immer wieder zusammenfassend erwähnen.

Definition 8.1.6 Eine Korrespondenz von a nach b heißt **nichtzyklisch**, wenn

$$(FF^{\mathsf{T}} \sqcap (D \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathsf{a}})^{+}) \sqcup (F^{\mathsf{T}}F \sqcap (D \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathsf{b}})^{+}) \subset \mathrm{I} \ .$$

Sonst heißt F *zyklisch.* □

Erst die Einschränkung der Assoziierten erlaubt, eine Korrespondenz wie die folgende als nichtzyklisch aufzufassen:



8.2 Eigenschaften von Korrespondenzen

In diesem Abschnitt zeigen wir Eigenschaften von Korrespondenzen, die in späteren Beweisen nützlich sein werden. Wir beginnen mit allgemein gültigen Gesetzen und fahren fort mit Eigenschaften, deren Gültigkeit von der Erfüllung einer der Abschlußbedingungen aus Definition 5.2.1 durch die entsprechenden Intervalle bzw. Abschnitte abhängt.

Lemma 8.2.1 (Einfache Eigenschaften von Korrespondenzen) [←108]
Sei F eine Korrespondenz von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$, dann gilt:

i) $FF^{\mathsf{T}} \supset \mathrm{I} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$ und $F^{\mathsf{T}}F \supset \mathrm{I} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{b}}$

ii) $FM = M \sqcap \underline{\mathfrak{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}$

iii) Für jedes $i : \mathbb{1} \to \mathcal{E}$ gilt $F(S_i \sqcap \mathrm{L}F) \subset (S_i \sqcap F\mathrm{L})F$; bei gleichwertigen Abbildungen gilt sogar Gleichheit.

iv) $\overline{\mathbb{Z}\overline{\underline{\mathfrak{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}}} \sqcap (F\|\mathrm{I})Z \subset ZF$ und $\overline{\mathbb{Z}\overline{\underline{\mathfrak{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}}} \sqcap (F\|\mathrm{I})\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}F$.

Beweis:

i) Die Behauptungen folgen aus Definitions- bzw. Wertebereich von F.

ii) Folgt sofort aus dem Definitionsbereich von F und der Eindeutigkeit und Totalität von M.

iii) Es gilt:

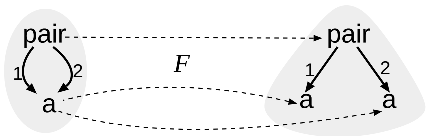
$$F(S_i \sqcap \mathrm{L}F) = FS_i \sqcap \mathrm{L}F \subset S_i(F \sqcup \bot_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}) \sqcap \mathrm{L}F = S_i((F \sqcap \mathrm{L}F) \sqcup (\bot_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \sqcap \mathrm{L}F)) = S_iF$$

Zusammen mit $F(S_i \sqcap \mathrm{L}F) \subset F\mathrm{L}$ erhält man dann die Behauptung.

Falls F eine gleichwertige Abbildung ist, sei nun $p : \mathbb{1} \to \mathcal{V}$ ein Punkt mit $p \subset \mathrm{L}F^{\mathsf{T}}$, dann gilt: $pFM \subset pM$ und wegen $pF \neq \mathrm{O}$ sogar $pFM = pM$. Wegen der Eigenschaften von S_i gilt daher die Formel: $(p(S_i \sqcap F\mathrm{L})F = pS_iF \neq \mathrm{O} \;\Rightarrow\; pFS_i \neq \mathrm{O})$ und damit $p(S_i \sqcap F\mathrm{L})F \subset pFS_i$, womit nun $(S_i \sqcap F\mathrm{L})F \subset FS_i$ gezeigt ist. Zusammen mit $(S_i \sqcap F\mathrm{L})F \subset \mathrm{L}F$ ergibt sich dann das gewünschte Ergebnis.

iv) folgt aus iii). □

Als Gegenbeispiel zur Gleichheit von iii), wenn F allgemeine Korrespondenz, aber keine gleichwertige Abbildung ist, siehe:



Lemma 8.2.2 (Korrespondenzen und Bindung) [←111, 121]
Sei F eine Korrespondenz von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$, dann gilt:

i) $FB \subset W\mathrm{L}$

ii) $BF \sqcap F\mathrm{L} = FB \sqcap BF\mathrm{L} = FB \sqcap \mathrm{L}F$

iii) $F \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}} \subset F \sqcap \overline{BF\mathrm{L}}$

iv) $F \sqcap \mathrm{L}FB^{\mathsf{T}} = F \sqcap BF\mathrm{L}$

v) $F \sqcap \overline{BF\mathrm{L}} = F \sqcap \overline{\mathrm{L}FB^{\mathsf{T}}}$

vi) $F \sqcap B\overline{F\mathrm{L}} \subset \overline{\mathrm{L}F}B^{\mathsf{T}}$

vii) $FB \subset B(F \sqcup \mathrm{I})$

Beweis:

i) $FB \subset FB\mathrm{L} \subset FMv_b^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \subset Mv_b^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \subset W\mathrm{L}$

ii) $FB \sqcap BF\mathrm{L} \subset F(B \sqcap F^{\mathsf{T}}BF\mathrm{L}) \subset F(B \sqcap BF^{\mathsf{T}}F\mathrm{L}) = FB(\mathrm{I} \sqcap F^{\mathsf{T}}\mathrm{L}) = FB \sqcap \mathrm{L}F$

Die Gegenrichtung ist ganz einfach: $FB \sqcap \mathrm{L}F \subset F\mathrm{L} \sqcap BF \subset BF\mathrm{L}$

iii) $F \sqcap BF\mathrm{L} \subset F(\mathrm{I} \sqcap F^{\mathsf{T}}BF\mathrm{L}) \subset F(\mathrm{I} \sqcap BF^{\mathsf{T}}F\mathrm{L}) \subset F \sqcap \mathrm{L}B^{\mathsf{T}}$

iv) Es gilt mit einer Modalregel: $F \sqcap \mathrm{L}FB^{\mathsf{T}} \subset (FB \sqcap \mathrm{L}F)B^{\mathsf{T}} \subset (BF)\mathrm{L}$ und ebenso $F \sqcap BF\mathrm{L} \subset B(F\mathrm{L} \sqcap B^{\mathsf{T}}F) \subset \mathrm{L}(FB^{\mathsf{T}})$.

v) mit Lemma 2.2.5 aus iv)

vi) Es gilt: $B\overline{F\mathrm{L}} \sqcap F \subset F \sqcap \overline{BF\mathrm{L}} \sqcap W\mathrm{L} \subset W$. Daraus folgt mit Lemma 3.2.7: $B\overline{F\mathrm{L}} \sqcap F \subset B\overline{F\mathrm{L}} \sqcap W \subset \overline{\mathrm{L}F^{\mathsf{T}}}B^{\mathsf{T}}$.

vii) Die Behauptung läßt sich herleiten, indem man unterscheidet, ob eine Variable innerhalb oder außerhalb von $\underline{\mathfrak{a}}$ gebunden ist und dann die jeweiligen Gesetze anwendet:

$$\begin{aligned} FB &= (F \sqcap (BF\mathrm{L} \sqcup \overline{BF\mathrm{L}}))B = (FB \sqcap BF\mathrm{L}) \sqcup (FB \sqcap \overline{BF\mathrm{L}}) \\ &\subset BF \sqcup WB = BF \sqcup B = B(F \sqcup \mathrm{I}) \end{aligned}$$ □

Lemma 8.2.3 (Korrespondenzen und Variablenidentität)
Sei F eine Korrespondenz von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$, dann gilt:

i) Das Bild einer freien Variablen ist wieder frei.
ii) Die Transponierte von F erfüllt die Bedingung zur Erhaltung nicht intern gebundener Variablen.

Beweis:

i) $F \sqcap \overline{B\mathrm{L}} \sqcap W\mathrm{L} \subset \overline{B\mathrm{L}} \sqcap F \sqcap \overline{BF\mathrm{L}} \sqcap W\mathrm{L} \subset \overline{B\mathrm{L}} \sqcap W \subset \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}}$
ii) $F^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{BF^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap W\mathrm{L} \subset F^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L}F^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}W \subset W^{\mathsf{T}} = W$ □

Wenn man nun die Urbild- und Bildintervalle einer gleichwertigen Abbildung noch Anforderungen aus Definition 5.2.1 stellt, lassen sich weitere Eigenschaften beweisen:

Lemma 8.2.4 (Stärkere EdVigV.) Sei F eine Korrespondenz zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die beide variablenabgeschlossen seien; dann gilt folgende stärkere Form der Erhaltung intern gebundener Variablen:

$$F^{\mathsf{T}}FW \sqcap \mathrm{L}FB^{\mathsf{T}} \sqcap BB^{\mathsf{T}} \subset W$$

Beweis: Aus der Variablenabgeschlossenheit von $\mathfrak{b} = \mathrm{L}F$ erhalten wir

$$F^{\mathsf{T}}FW \sqcap \mathrm{L}FB^{\mathsf{T}} \subset \mathrm{L}F$$

und daraus mit Hilfe der Variablentreue:

$$F^{\mathsf{T}}FW \sqcap \mathrm{L}FB^{\mathsf{T}} \sqcap BB^{\mathsf{T}} \subset F^{\mathsf{T}}FW \sqcap \mathrm{L}F \sqcap \mathrm{L}FB^{\mathsf{T}} \sqcap BB^{\mathsf{T}} \subset F^{\mathsf{T}}WF \sqcap \mathrm{L}FB^{\mathsf{T}} \sqcap BB^{\mathsf{T}} \subset W$$ □

Lemma 8.2.5 (Vertauschbarkeit mit der Variablenidentität) [←116]
Sei F eine Korrespondenz zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die beide variablenabgeschlossen seien; dann gilt: $FW \subset W(F \sqcup \mathrm{I})$.

Beweis: Die Beweisidee ist folgende: Wir unterscheiden für von FW abgebildete Variablenknoten (daß es Variable sind, wird durch die Markierungserhaltung gewährleistet), ob sie in $\underline{\mathfrak{a}}$ intern gebunden sind oder nicht. Intern gebundene werden durch F auf in $\underline{\mathfrak{b}}$ intern gebundene abgebildet, und andere Knoten dieser Variablen müssen, da $\mathfrak{b}$ variablenabgeschlossen ist, wieder in $\underline{\mathfrak{b}}$ liegen. Nicht intern gebundene können schon von F nicht aus dem Bereich von W hinaus abgebildet werden.

Für den relationenalgebraischen Beweis zeigen wir zunächst eine Hilfsaussage über intern gebundene Variable:

$$FW \sqcap BF\mathrm{L} \subset \mathrm{L}F \quad .$$

Und zwar gilt: $FW \sqcap BF\mathrm{L} = (F \sqcap BF\mathrm{L})W$ und

$$\mathrm{L}(F \sqcap BF\mathrm{L}) = \mathrm{L}F^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}F \subset \mathrm{L}F^{\mathsf{T}}FB^{\mathsf{T}} = \mathrm{L}FB^{\mathsf{T}}$$

Damit gilt dann (da $\mathfrak{b}$ variablenabgeschlossen ist):

$$FW \sqcap BF\mathrm{L} = (F \sqcap BF\mathrm{L})W \subset \mathrm{L}(F \sqcap BF\mathrm{L})W \subset (\mathrm{L}FB^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}F)W \subset \mathrm{L}F$$

Die eigentliche Aussage läßt sich dann folgendermaßen herleiten:

$$\begin{aligned} FW &= ((F \sqcap BF\mathrm{L}) \sqcup (F \sqcap \overline{BF\mathrm{L}}))\, W = (F \sqcap BF\mathrm{L})\, W \sqcup (F \sqcap \overline{BF\mathrm{L}})\, W \\ &= (FW \sqcap BF\mathrm{L}) \sqcup WW \subset (FW \sqcap \mathrm{L}F) \sqcup W \subset WF \sqcup W = W(F \sqcup \mathrm{I}) \end{aligned}$$

Die Hilfsaussage geht hierbei in die erste Inklusion ein. □

Lemma 8.2.6 (Bindungstreue unter Abschluß) [←116] Sei F eine Korrespondenz zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die beide bindungsabgeschlossen seien. Dann gilt:

$$BF \subset FB \qquad \text{und} \qquad BF^{\mathsf{T}} \subset F^{\mathsf{T}}B$$

Beweis: Zunächst folgt daraus, daß $\mathfrak{a}$ bindungsabgeschlossenen ist: $BF \subset B\underline{\mathfrak{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \subset \underline{\mathfrak{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} = F\mathrm{L}$. Damit gilt dann $BF = BF \sqcap F\mathrm{L} \subset FB$. Die zweite Inklusion zeigt man analog. □

Eine zentrale Eigenschaft, die sich aus dem Kapselrespekt ergibt, ist die folgende:

Lemma 8.2.7 (Erhaltung von Bindungspfaden) [←108, 110, 117, 120]
Für jede Korrespondenz F zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die beide Graphausschnitte sind, gilt:

$$(F \| \mathrm{I})\mathbb{B} \subset \mathbb{B}F \quad ,$$

bzw. äquivalent für alle abstrakten Pfade m: $F\mathbb{B}_m \subset \mathbb{B}_m F$.

Beweis: Der Beweis ist völlig analog zu dem von Lemma 4.1.8 für Identifizierungen.

Es seien für einen beliebigen, aber festen abstrakten Pfad m zwei Punkte $\alpha_1, \gamma_2 : \mathbb{1} \to \mathcal{V}$ mit $\alpha_1^{\mathsf{T}}\gamma_2 \subset F(\mathcal{Z}_m \sqcap B^{\mathsf{T}})$ gegeben, und sei $\alpha_2 := \gamma_2 B$ der entsprechende Zwischenpunkt. Für den konkreten Pfad $\langle\!\langle \alpha_2, m \rangle\!\rangle$ wird also vorausgesetzt, daß er keinen Kreis über α_2 enthält; damit gilt $\langle\!\langle \alpha_2, m \rangle\!\rangle \mathcal{Z}^{+} \subset \gamma_2 \mathcal{C} \subset \alpha_2 C \subset \underline{\mathfrak{b}}$.

Nun gilt $\gamma_2 \subset \alpha_1 F(Z_m \sqcap B^{\mathsf{T}}) \subset \alpha_1 Z_m F$. Sei $\gamma_1 := \alpha_1 Z_m$, so erhalten wir $\alpha_2 \subset \gamma_1 FB \sqcap \mathrm{L}F \subset \gamma_1 BF$. Daraus folgt $\gamma_1 B \neq \mathrm{O}$ und $\gamma_1 B \subset \alpha_1 FF^{\mathsf{T}}$. Falls $\alpha_1 \subset \gamma_1 \mathcal{C}$, dann gilt auch $\alpha_1 \subset \gamma_1 BB^{\mathsf{T}}\mathcal{C} = \gamma_1 BC$, und wir erhalten mit $FF^{\mathsf{T}} \sqcap C \supset B^{\mathsf{T}}\gamma_1^{\mathsf{T}}\alpha_1 \neq \mathrm{O}$ einen Widerspruch zum Kapselrespekt von F.

Falls sonst $\alpha_1 \neq \gamma_1 B$, dann liegt $\gamma_1 B$ auf jedem Pfad von α_1 nach γ_1, also auch auf $\langle\!\langle \alpha_1, m \rangle\!\rangle$. Sei $n : \mathbb{1} \to \mathcal{E}^*$ ein abstrakter Pfad mit $n^{\mathsf{T}}m \subset \underline{prefix}$ und $\alpha_1 Z_n = \gamma_1 B$, also ein Präfix von m, über das $\gamma_1 B$ von α_1 aus zu erreichen ist. Dann gilt

$$\alpha_2 \subset \gamma_1 BF = \alpha_1 Z_n F \subset \alpha_2 F^{\mathsf{T}} Z_n F \subset \alpha_2 Z_n F^{\mathsf{T}} F \quad .$$

Nach den bisherigen Annahmen gilt $\underline{empty} \neq n \neq m$ und $\alpha_2 \neq \alpha_2 Z_n$ und damit auch $\mathrm{O} \neq \alpha_2 Z_n \subset \alpha_2(C \sqcap F^{\mathsf{T}}F)$, was einen Widerspruch zum Kapselrespekt ergibt.

Damit bleibt nur $\alpha_1 = \gamma_1 B$, und $\alpha_1^{\mathsf{T}}\gamma_2 \subset (Z_m \sqcap B^{\mathsf{T}})F$ ist gezeigt.

Angenommen, $\gamma_1 \subset \overline{\alpha_1 \mathcal{Z}_m}$, dann muß es einen abstrakten Pfad $n : \mathbb{1} \to \mathcal{E}^*$ geben mit $n \neq \underline{empty}$, $n^{\mathsf{T}}m \subset \underline{prefix}$ und $\alpha_1 Z_n = \alpha_1$, also ein nichtleeres Präfix von m, über das α_1 von α_1 aus zu erreichen ist. Auch hier erhalten wir wieder

$$\alpha_2 \subset \alpha_1 F = \alpha_1 Z_n F \subset \alpha_2 F^{\mathsf{T}} Z_n F \subset \alpha_2 Z_n F^{\mathsf{T}} F$$

und damit auch $\alpha_2 Z_n \subset \alpha_2(C \sqcap F^{\mathsf{T}}F)$, was einen Widerspruch zum Kapselrespekt ergibt. Also gilt auch $\gamma_1 \subset \alpha_1 \mathcal{Z}_m$ und damit die gesamte Behauptung. □

Lemma 8.2.8 (Bindungspfade rückwärts) [←114] Für jede Korrespondenz F zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die beide Graphausschnitte sind, gilt:

$$F\mathbb{B}^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}F\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*} \subset W\mathbb{B}(F\|\mathrm{I})$$

bzw. für jeden abstrakten Pfad m:

$$F\mathbb{B}^{\mathsf{T}}_m \sqcap \mathrm{L}F \subset W\mathbb{B}^{\mathsf{T}}_m F$$

Beweis:

$$
\begin{array}{rcll}
F\mathbb{B}_m^\top \sqcap \mathrm{L}F & \subset & BF \sqcap F\mathbb{B}_m^\top & \text{Bindungstreue } F \\
& \subset & (B \sqcap F\mathbb{B}_m^\top F^\top)F & \text{Modalregel} \\
& \subset & (B \sqcap FF^\top\mathbb{B}_m^\top)F & \text{Lemma 8.2.7} \\
& \subset & (BB^\top \sqcap FF^\top)\mathbb{B}_m^\top F & \text{Modalregel} \\
& \subset & W\mathbb{B}_m^\top F & \text{EdVggV. } F
\end{array}
$$
□

Lemma 8.2.9 (Vertauschbarkeit mit der Kapselung) [←108, 118] Sei F eine nichtzyklische Korrespondenz zwischen zwei Graphausschnitten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, dann gilt:

$$FC \subset CF$$

Beweis: Analog zum Beweis von Lemma 4.1.10 erhalten wir:

$$
\begin{array}{rcll}
FC & = & F\pi^\top_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}(\mathbb{B}\mathrm{L} \sqcap \not{\mathbb{Z}}) & \text{Lemma 3.5.12} \\
& = & \pi^\top_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}((F\|\mathrm{I}) \sqcap \overline{\overline{\mathbb{Z}\underline{\mathfrak{a}}^\top\mathrm{L}}})(\mathbb{B}\mathrm{L} \sqcap \not{\mathbb{Z}}) & (\|),\ \mathfrak{a} \text{ Graphausschnitt} \\
& \subset & \pi^\top_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}((F\|\mathrm{I})\mathbb{B}\mathrm{L} \sqcap ((F\|\mathrm{I}) \sqcap \overline{\overline{\mathbb{Z}\underline{\mathfrak{a}}^\top\mathrm{L}}})\not{\mathbb{Z}}) & \sqcap\text{-Subdistributivität} \\
& \subset & \pi^\top_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}((\mathbb{B} \sqcap \underline{\mathfrak{a}}^\top\mathrm{L})F\mathrm{L} \sqcap \not{\mathbb{Z}}F) & \text{Lemma 8.2.7, 8.2.1} \\
& = & \pi^\top_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*}(\mathbb{B}\mathrm{L} \sqcap \not{\mathbb{Z}})F & \\
& = & CF &
\end{array}
$$
□

Das Gegenbeispiel zu Lemma 4.3.12 auf Seite 49 wäre auch gleichzeitig hier ein Gegenbeispiel für $F := \chi$ in Abwesenheit von Kapselrespekt.

Lemma 8.2.10 (Verschärfung des Kapselrespektes) Auf Graphen mit progressiv-endlicher Kapselung gilt für jede Korrespondenz: $FF^\top \subset \overline{C^+}$.

Beweis:

$$
\begin{array}{rcll}
\mathrm{L}(FF^\top \sqcap C^+) & \subset & \mathrm{L}F(F^\top \sqcap F^\top C^+) & \text{Modalregel} \\
& \subset & \mathrm{L}F(F^\top \sqcap C^+F^\top) & \text{Lemma 8.2.9} \\
& \subset & \mathrm{L}C^+(F^\top \sqcap (C^+)^\top F^\top) & \text{Modalregel} \\
& \subset & \mathrm{L}(F^\top \sqcap F^\top(C^+)^\top) & \text{Lemma 8.2.9} \\
& \subset & \mathrm{L}F^\top(FF^\top \sqcap C^+)(C^+)^\top & \text{Modalregel} \\
& \subset & \mathrm{L}(FF^\top \sqcap C^+)(C^+)^\top &
\end{array}
$$

Mit Lemma 2.3.4 und 2.3.5 erhalten wir daraus einen Widerspruch zur angenommenen progressiven Endlichkeit von C. □

Für Korrespondenzen zwischen offenen Intervallen bzw. Abschnitten läßt sich die Nachfolgertreue schärfer fassen:

Lemma 8.2.11 (Nachfolgertreue auf offenen Intervallen) [←119]
Gegeben seien ein Graph G und zwei offene Intervalle bzw. Abschnitte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Sei nun F eine Korrespondenz von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$, dann gilt $(F\|\mathrm{I})S \subset S_F \sqcap \pi_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}}F\mathrm{L}$, bzw.für beliebiges $i : \mathbb{1} \to \mathcal{E}$ gilt $FS_i \subset S_iF \sqcap F\mathrm{L}$.

Beweis: Unter Ausnutzung der Offenheit von $\mathfrak{b}$ erhalten wir für jedes $i : \mathbb{1} \to \mathcal{E}$: $FS_i \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{b}}S_i \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{b}} = \mathrm{L}F$. Damit erhalten wir (mit Lemma 8.2.1)

$$FS_i = F(S_i \sqcap \mathrm{L}F) \subset (S_i \sqcap F\mathrm{L})F \subset S_iF$$
□

8.3 Operationen auf Korrespondenzen

In diesem Abschnitt zeigen wir zum einen, daß die Menge der Korrespondenzen zwischen zwei festen Graphausschnitten ein vollständiger Verband bezüglich der Inklusionsordnung ist, d.h., daß zu zwei Graphausschnitten für beliebige Mengen von Korrespondenzen zwischen ihnen Infima (Lemma 8.3.1) und Suprema (Lemma 8.3.2) existieren, und zum anderen, daß Graphausschnitte auf einem festen Graphen mit Korrespondenzen eine selbstduale Kategorie bilden, d.h., daß zu jeder Korrespondenz auch ihre Transponierte eine Korrespondenz ist (Lemma 8.3.3) und daß Korrespondenzen komponiert werden können (Lemma 8.3.4).

Lemma 8.3.1 (Infimum von Korrespondenzen) [←109, 112] Sei für eine nichtleere Indexmenge $\mathcal{I}$ eine Menge von Korrespondenzen $\{k : \mathcal{I} \bullet F_k\}$ von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ gegeben, wobei $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beide Graphausschnitte mit eindeutigen oberen Grenzen seien.

Dann ist $H := \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F_k\}$ auch eine Korrespondenz von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$.

Beweis: Nacheinander zeigen wir die Korrespondenzeneigenschaften:

- Überführung der oberen Grenzen ineinander:

$$\begin{aligned}(t \sqcap \overline{\mathrm{L}\,b})H &= (t \sqcap \overline{\mathrm{L}\,b})\bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F_k\} \\ &= \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet (t \sqcap \overline{\mathrm{L}\,b})F_k\} && (t \sqcap \overline{\mathrm{L}\,b}) \text{ eindeutig} \\ &\supset \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet u \sqcap \overline{\mathrm{L}\,c}\} \\ &= u \sqcap \overline{\mathrm{L}\,c}\end{aligned}$$

  Die zweite Bedingung läßt sich analog beweisen.

- Definitionsbereich: Zunächst wählen wir eine andere Darstellung von $\underline{\mathfrak{a}}$:

$$\begin{aligned}\underline{\mathfrak{a}} &= (t \sqcap \overline{\mathrm{L}\,b})\bigsqcup\{j \geq 0 \bullet (D \sqcap \overline{\mathrm{L}\,b})^j\} \\ &= \bigsqcup\{j \geq 0 \bullet (t \sqcap \overline{\mathrm{L}\,b})(D \sqcap \overline{\mathrm{L}\,b})^j\} \\ &= \bigsqcup\{j \geq 0;\ \langle i_1, \ldots, i_j\rangle : \mathcal{E}^* \bullet (t \sqcap \overline{\mathrm{L}\,b})(S_{i_1} \sqcap \mathrm{L}\,\underline{\mathfrak{a}}) \cdots (S_{i_j} \sqcap \mathrm{L}\,\underline{\mathfrak{a}})\} \\ &= \bigsqcup\{\langle i_1, i_2, \ldots\rangle : \mathcal{E}^\infty;\ j \geq 0 \bullet (t \sqcap \overline{\mathrm{L}\,b})(S_{i_1} \sqcap \mathrm{L}\,\underline{\mathfrak{a}}) \cdots (S_{i_j} \sqcap \mathrm{L}\,\underline{\mathfrak{a}})\}\end{aligned}$$

  Für ein beliebiges, aber festes $\langle i_1, i_2, \ldots\rangle : \mathcal{E}^\infty$ verwenden wir nun die folgende Abkürzung:

$$U_j = (t \sqcap \overline{\mathrm{L}\,b})(S_{i_1} \sqcap \mathrm{L}\,\underline{\mathfrak{a}}) \cdots (S_{i_j} \sqcap \mathrm{L}\,\underline{\mathfrak{a}})$$

  und beweisen nun per Induktion über j die folgende Aussage:

$$(t \sqcap \overline{\mathrm{L}\,b})\,U_j \subset \mathrm{L}\,H^{\mathsf{T}}$$

  Für $j = 0$ folgt dies aus der Erhaltung der oberen Grenzen. Angenommen, für ein bestimmtes $j \geq 0$ gelte bereits $(t \sqcap \overline{\mathrm{L}\,b})\,U_j \subset \mathrm{L}\,H^{\mathsf{T}}$.Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}(t \sqcap \overline{\mathrm{L}\,b})\,U_{j+1} &= (t \sqcap \overline{\mathrm{L}\,b})\,U_j(S_{i_{j+1}} \sqcap \mathrm{L}\,\underline{\mathfrak{a}}) \\ &\subset \mathrm{L}\,H^{\mathsf{T}}(S_{i_{j+1}} \sqcap \mathrm{L}\,\underline{\mathfrak{a}}) \\ &= \mathrm{L}\bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F_k^{\mathsf{T}}\}(S_{i_{j+1}} \sqcap \mathrm{L}\,\underline{\mathfrak{a}}) \\ &\subset \mathrm{L}\bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F_k^{\mathsf{T}}(S_{i_{j+1}} \sqcap \mathrm{L}\,F_k^{\mathsf{T}})\} \\ &\subset \mathrm{L}\bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet S_{i_{j+1}}F_k^{\mathsf{T}}\} \\ &= \mathrm{L}\,S_{i_{j+1}}\bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F_k^{\mathsf{T}}\} \\ &= \mathrm{L}\,S_{i_{j+1}}H^{\mathsf{T}} \\ &\subset \mathrm{L}\,H^{\mathsf{T}}\end{aligned}$$

- Wertebereich: analog zum Definitionsbereich.
- Markierungstreue: $HM \subset \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F_k M\} \subset \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet M\} \subset M$
- Nachfolgertreue: Sei $i : \mathbb{1} \to \mathcal{E}$ beliebig. Unter Verwendung der Korrespondenzgrenze (siehe Definition 8.1.5) gilt:

$$\begin{array}{rcl} HS_i & \subset & \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F_k S_i\} \\ & \subset & \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet S_i(F_k \sqcup \bot_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})\} \\ & = & S_i \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F_k \sqcup \bot_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\} \\ & = & S_i(\bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F_k\} \sqcup \bot_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}) \\ & = & S_i(H \sqcup \bot_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}) \end{array}$$

- Bindungstreue: Zunächst erhalten wir ohne Probleme:

$$HB \sqcap \mathrm{L}H \subset \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F_k B \sqcap \mathrm{L}F_k\} \subset \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet BF_k\} = B\bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F_k\} = BH$$

Ebenso ergibt sich auch $H^{\mathsf{T}} B \sqcap \mathrm{L}H^{\mathsf{T}} \subset BH^{\mathsf{T}}$. Für die anderen beiden Inklusionen ist wesentlich mehr Aufwand erforderlich. Als Anfang ergibt sich nur:

$$BH \sqcap H\mathrm{L} = \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet BF_k \sqcap F_k \mathrm{L}\} \subset \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F_k B\} \ .$$

Da B aber nicht injektiv ist, kann man es nicht aus dem Infimum herausziehen.

Seien nun a und b zwei beliebige Punkte mit $a^{\mathsf{T}} b \subset BH \sqcap H\mathrm{L}$. Insbesondere haben wir also erst einmal

$$a \subset bH^{\mathsf{T}} B^{\mathsf{T}}$$

Ferner gilt ja $aB \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$, somit gibt es einen Pfad m, so daß einerseits $a = aB\mathcal{Z}_m$, andererseits aber auch, da $\mathfrak{a}$ Graphausschnitt ist $aB\mathbb{Z}_m \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$, m also von aB aus ganz innerhalb $\mathfrak{a}$ verläuft. Damit gewinnen wir nun unter Verwendung von Lemma 8.2.7:

$$a^{\mathsf{T}} b \subset (B \sqcap \mathcal{Z}^{\mathsf{T}}_m)H = \mathbb{B}^{\mathsf{T}}_m H = \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet \mathbb{B}^{\mathsf{T}}_m F_k\} \subset \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F_k \mathbb{B}^{\mathsf{T}}_m\} = H\mathbb{B}^{\mathsf{T}}_m \subset HB$$

Die vierte Inklusion zeigt man analog.

- Kapselrespekt:

$$HH^{\mathsf{T}} = \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F_k\}\bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F^{\mathsf{T}}_k\} \subset \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F_k F^{\mathsf{T}}_k\} \subset \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet \overline{C}\} = \overline{C}$$

Die zweite Inklusion zeigt man ebenso.

- Erhaltung der Verschiedenheit intern gebundener Variablen:

$$\begin{array}{rcl} H^{\mathsf{T}} WH \sqcap \mathrm{L}HB^{\mathsf{T}} \sqcap BB^{\mathsf{T}} & = & \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F^{\mathsf{T}}_k\} W \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F_k\} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{b}}B^{\mathsf{T}} \sqcap BB^{\mathsf{T}} \\ & \subset & \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F^{\mathsf{T}}_k WF_k\} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{b}}B^{\mathsf{T}} \sqcap BB^{\mathsf{T}} \\ & = & \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F^{\mathsf{T}}_k WF_k \sqcap \mathrm{L}F_k B^{\mathsf{T}} \sqcap BB^{\mathsf{T}}\} \\ & \subset & \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet W\} \\ & = & W \end{array}$$

- Erhaltung nicht intern gebundener Variablen:

$$\begin{array}{rcl} H \sqcap \overline{BH\mathrm{L}} \sqcap W\mathrm{L} & = & \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F_k\} \sqcap \overline{B\underline{\mathfrak{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap W\mathrm{L} \\ & = & \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F_k \sqcap \overline{B\underline{\mathfrak{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap W\mathrm{L}\} \\ & = & W \end{array}$$

- Variablentreue: Wie schon bei der Bindungstreue kommen wir auf Anhieb nicht sehr weit:

$$HW \sqcap \mathrm{L}H \subset \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet F_k W \sqcap \mathrm{L} F_k\} \subset \bigsqcap\{k : \mathcal{I} \bullet WF_k\}$$

Wieder betrachten wir zwei beliebige Punkte a und b mit $a^{\mathsf{T}}b \subset HW \sqcap \mathrm{L}H$, und unterscheiden nun, ob a intern gebunden ist oder nicht.

Falls a nicht intern gebunden ist, also $a \subset \overline{\mathrm{L}H^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}}$, so gilt wegen der Erhaltung nicht intern gebunder Variablen durch H auch $aH \subset aW$ und damit $b \subset aHW \subset aW$. Nach Lemma 8.2.2 gilt auch $aH \subset \overline{\mathrm{L}HB^{\mathsf{T}}}$ und damit $b \subset \overline{\mathrm{L}HB^{\mathsf{T}}}$. Daraus folgt nun wieder mit der Erhaltung nicht intern gebunder Variablen, daß $bH^{\mathsf{T}} \subset bW \subset aW$, also insgesamt $a^{\mathsf{T}}b \subset WH$.

Falls nun a intern gebunden ist, also $a \subset \mathrm{L}H^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}$, gilt auch $a \subset bWH^{\mathsf{T}}$ und $b \subset aHW$. aB ist definiert und wir erhalten:

$$aB = aB \sqcap \mathrm{L}H^{\mathsf{T}} \subset bWH^{\mathsf{T}}B \sqcap \mathrm{L}H^{\mathsf{T}} \subset bWBH^{\mathsf{T}} \subset bBH^{\mathsf{T}}$$

Nun gibt es einen Pfad n, so daß $a = aB\mathcal{Z}_n$ und, da $\mathfrak{a}$ Graphausschnitt ist, auch $aB\mathbb{Z}_n \subset \underline{\mathfrak{a}}$. Mit der Nachfolgertreue von H erhalten wir daraus:

$$a = aB(\mathcal{Z}_n \sqcap B^{\mathsf{T}}) \subset bBH^{\mathsf{T}}(\mathcal{Z}_n \sqcap B^{\mathsf{T}}) \subset bB(\mathcal{Z}_n \sqcap B^{\mathsf{T}})H^{\mathsf{T}}$$

Sei nun $c := bBZ_n$, so gilt $cB = bB$. Von eben haben wir $c \subset aH$. Sei nun $k \in \mathcal{I}$ ein beliebiger Index, dann nutzen wir Variablentreue und Erhaltung der Verschiedenheit intern gebundener Variablen von F_k:

$$c^{\mathsf{T}}b \subset BB^{\mathsf{T}} \sqcap H^{\mathsf{T}}HW \sqcap BH\mathrm{L} \subset BB^{\mathsf{T}} \sqcap F_k^{\mathsf{T}}F_k W \sqcap BF_k\mathrm{L} \subset W$$

Auch zu b gibt es nun einen innerhalb von $\mathfrak{a}$ verlaufenden bindenden Pfad p mit $b = bBZ_p \subset aBHZ_p \subset aBZ_pH$, und wie oben erhalten wir mit $d := aBZ_p$ auch $dB = aB$ und $b \subset dH$. Daraus ergibt sich schließlich:

$$a^{\mathsf{T}}d \subset HWH^{\mathsf{T}} \sqcap BB^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}HB^{\mathsf{T}} \subset F_kWF_k^{\mathsf{T}} \sqcap BB^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}F_kB^{\mathsf{T}} \subset W$$

Nun folgt direkt: $a^{\mathsf{T}}b \subset a^{\mathsf{T}}dH \subset WH$, q.e.d. □

Lemma 8.3.2 (Supremum von Korrespondenzen) [←109, 113] Sei für eine nichtleere Indexmenge $\mathcal{I}$ eine Menge von Korrespondenzen $\{k : \mathcal{I} \bullet F_k\}$ von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ gegeben, wobei $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ beide Graphausschnitte seien.

Dann ist $H := \bigsqcup\{k : \mathcal{I} \bullet F_k\}$ auch eine Korrespondenz von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$.

Beweis: Die meisten Punkte lassen sich hier dank der $\sqcup$-Distributivität der Multiplikation problemlos zeigen. Die Erhaltung der Verschiedenheit intern gebundener Variablen ist nicht ganz so einfach:

$$\begin{aligned} H^{\mathsf{T}}WH \sqcap BB^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}HB^{\mathsf{T}} &= \bigsqcup\{k : \mathcal{I} \bullet F_k^{\mathsf{T}}\}W\bigsqcup\{k : \mathcal{I} \bullet F_k\} \sqcap BB^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{b}}B^{\mathsf{T}} \\ &= \bigsqcup\{k, l : \mathcal{I} \bullet F_k^{\mathsf{T}}WF_l \sqcap BB^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{b}}B^{\mathsf{T}}\} \end{aligned}$$

Seien nun $k, l \in \mathcal{I}$ zwei beliebige Indizes, und seien a und b zwei Punkte mit $a^{\mathsf{T}}b \subset F_k^{\mathsf{T}}WF_l \sqcap BB^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{b}}B^{\mathsf{T}}$. Sei ferner c ein Zwischenpunkt, so daß $a \subset cF_k$ und $b \subset cWF_l$, und sei $d := aB$. Dann gilt

$$\begin{aligned} c^{\mathsf{T}}d &\subset F_kB \sqcap \mathrm{L}F_k \subset BF_k \\ c^{\mathsf{T}}d &\subset WF_lB \sqcap \mathrm{L}F_l \subset WBF_l = BF_l \end{aligned}$$

und mit der Bindungstreue des Infimums (aus Lemma 8.3.1) erhalten wir $c^\mathsf{T}d \subset B(F_k \sqcap F_l) \sqcap (F_k \sqcap F_l)\mathrm{L} \subset (F_k \sqcap F_l)B$. Daher gilt

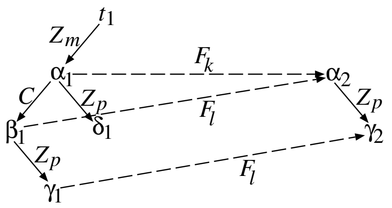
$$
\begin{aligned}
a^\mathsf{T}c(F_k \sqcap F_l) \sqcap dB^\mathsf{T} &\subset F_k^\mathsf{T}WF_k \sqcap BB^\mathsf{T} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{b}}B^\mathsf{T} \subset W \\
b^\mathsf{T}c(F_k \sqcap F_l) \sqcap dB^\mathsf{T} &\subset F^\mathsf{T}{}_l WF_l \sqcap BB^\mathsf{T} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{b}}B^\mathsf{T} \subset W
\end{aligned}
$$

und somit schließlich $a^\mathsf{T}b \subset a^\mathsf{T}cc^\mathsf{T}b \subset a^\mathsf{T}c(F_k \sqcap F_l)(\mathrm{I} \sqcap \mathrm{L}dB^\mathsf{T})(F_k \sqcap F_l)^\mathsf{T}c^\mathsf{T}b \subset WW \subset W$.

Für den Kapselrespekt gilt $HH^\mathsf{T} \subset \overline{C} \quad\Leftrightarrow\quad \bigsqcup\{k,l:\mathcal{I} \bullet F_kF_l^\mathsf{T} \sqcap C\} = \mathrm{O}$. Falls das Supremum nicht kapselrespektierend ist, gibt es daher wenigstens einen Punkt $\alpha_1 \subset \mathrm{L}(F_lF_k^\mathsf{T} \sqcap C^\mathsf{T})$. Insbesondere läßt sich α_1 so wählen, daß es einen Punkt $t_1 \subset \mathrm{L}t_\mathfrak{a}$ und einen abstrakten Pfad m gibt, so daß $\alpha_1 = t_1Z_m$ als Zielpunkt des Pfades m von t_1 aus der einzige Punkt in $\mathrm{L}(F_lF_k^\mathsf{T} \sqcap C^\mathsf{T})$ auf m von t_1 aus ist, also mit:

$$\alpha_1 = t_1Z_m = t_1\mathbb{Z}_m \sqcap \mathrm{L}(F_lF_k^\mathsf{T} \sqcap C^\mathsf{T})$$

Man kann nun Punkte $\alpha_2, \beta_1, \gamma_1$ und einen Pfad p bestimmen, so daß $\alpha_2 \subset \alpha_1F_k$, $\beta_1 \subset \alpha_1C \sqcap \alpha_2F_l^\mathsf{T}$, $\gamma_1 = \beta_1(Z_p \sqcap \not{C}^\mathsf{T}) \sqcap \alpha_1B^\mathsf{T}$. Da $\mathfrak{a}$ Graphausschnitt ist, erhalten wir $\mathrm{O} \neq \gamma_2 := \alpha_2Z_p \subset \gamma_1F_l$. Es gilt $\gamma_2 \subset \alpha_1(F_l\mathrm{L} \sqcap B^\mathsf{T}F_l) \subset \alpha_1F_lB^\mathsf{T}$ und wir gewinnen einen Bindungsknoten $\mathrm{O} \neq \gamma_2B \subset \alpha_1F_l$. Nach der Lage dieses Bindungsknotens unterscheiden wir drei Fälle:



i) Aus $\gamma_2B = \alpha_2$ folgt in

$$\alpha_2 \subset \alpha_1F_l \sqcap \beta_1F_l \subset \alpha_1F_l \sqcap \alpha_1CF_l \subset \alpha_1(F_l \sqcap CF_l) \subset \alpha_1(F_lF_l^\mathsf{T} \sqcap C)F_l = \mathrm{O}$$

ein Widerspruch zur Annahme eines *Punktes* α_2.

ii) Wenn $\gamma_2B \subset \alpha_2\mathbb{Z}_p$, dann bestimmen wir einen Pfad $q \subset \underline{pprefix}^\mathsf{T}$ mit $\gamma_2B = \alpha_2Z_q$ und wir erhalten aus $\beta_1Z_q \subset \alpha_2F_l^\mathsf{T}Z_q \subset \alpha_2Z_qF_l^\mathsf{T} = \gamma_2BF_l^\mathsf{T} \subset \alpha_1F_lF_l^\mathsf{T}$ und $\beta_1Z_q \subset \alpha_1C$ in $\beta_1Z_q \subset \alpha_1F_lF_l^\mathsf{T} \sqcap \alpha_1C \subset \alpha_1(F_lF_l^\mathsf{T} \sqcap C) = \mathrm{O}$ wieder einen Widerspruch.

iii) Falls $\gamma_1B \subset \overline{\alpha_2\mathbb{Z}_p}$ betrachten wir zu

$$\delta_1 := \alpha_1Z_p \subset \alpha_2F_k^\mathsf{T}Z_p \subset \alpha_2Z_pF_k^\mathsf{T} = \gamma_2F_k^\mathsf{T} \subset \alpha_1F_lB^\mathsf{T}F_k^\mathsf{T} \subset \alpha_1F_lF_k^\mathsf{T}B^\mathsf{T}$$

den Bindungsknoten δ_1B, der auch nicht auf p von α_1 aus liegen kann: $\delta_1B \subset \overline{\alpha_1\mathbb{Z}_p}$, aber in $\underline{\mathfrak{a}}$ liegen muß, woraus $\delta_1B \subset t_1\mathbb{Z}_m \sqcap \overline{\alpha_1}$ folgt. Damit gilt $\alpha_1 \subset \delta_1BC$ und $\delta_1B \subset t_1\mathbb{Z}_m \sqcap \overline{\alpha_1}\alpha_1(C^\mathsf{T} \sqcap \alpha_1F_lF_k^\mathsf{T})$, was einen Widerspruch zur Wahl von α_1, m und t_1 bedeutet. □

Lemma 8.3.3 (Transponierte Korrespondenz) [←109, 118, 119]
Gegeben seien ein Graph G und zwei Intervalle bzw. Abschnitte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit $t_\mathfrak{a}\mathrm{L} = t_\mathfrak{b}\mathrm{L}$ und $b_\mathfrak{a}\mathrm{L} = b_\mathfrak{b}\mathrm{L}$. Wenn nun $F : \mathcal{V} \nrightarrow \mathcal{V}$ eine Korrespondenz von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ ist, dann ist F^T eine Korrespondenz von $\mathfrak{b}$ nach $\mathfrak{a}$.

Beweis:

- Definitionsbereich: $\mathrm{L}(F^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathrm{L}F = \mathrm{L}\underline{\mathfrak{b}}$
- Wertebereich: $\mathrm{L}F^\mathsf{T} = \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$
- Obere Grenzen: Forderung geht durch Transposition von F in sich selbst über.
- Markierungstreue: Es gilt:

$$
\begin{aligned}
F^\mathsf{T}M &= F^\mathsf{T}(M \sqcap \underline{\mathfrak{a}}^\mathsf{T}\mathrm{L}) = F^\mathsf{T}FM && \\
&\subset MM^\mathsf{T}F^\mathsf{T}FM && M \text{ total} \\
&\subset M && FM \text{ eindeutig}
\end{aligned}
$$

- Nachfolgertreue: Sei $i : \mathbb{1} \to \mathcal{E}$ beliebig. Aus $FS_i \subset S_i(F \sqcup \bot_{\mathsf{a},\mathsf{b}})$ erhalten wir zunächst durch Transposition $S_i^{\mathsf{T}} F^{\mathsf{T}} \subset (F^{\mathsf{T}} \sqcup \bot_{\mathsf{b},\mathsf{a}}) S_i^{\mathsf{T}}$ und dann durch Multiplikation $S_i S_i^{\mathsf{T}} F^{\mathsf{T}} S_i \subset S_i (F^{\mathsf{T}} \sqcup \bot_{\mathsf{b},\mathsf{a}}) S_i^{\mathsf{T}} S_i \subset S_i(F^{\mathsf{T}} \sqcup \bot_{\mathsf{b},\mathsf{a}})$, daraus folgt schließlich $S_i \mathrm{L} \sqcap F^{\mathsf{T}} S_i \subset S_i(F^{\mathsf{T}} \sqcup \bot_{\mathsf{b},\mathsf{a}})$.

  Nun gilt aber: $\overline{S_i \mathrm{L}} \sqcap F^{\mathsf{T}} S_i = (\overline{S_i \mathrm{L}} \sqcap F^{\mathsf{T}}) S_i = \mathrm{O} \subset S_i(F^{\mathsf{T}} \sqcup \bot_{\mathsf{b},\mathsf{a}})$ nach Lemma 3.2.7 (da $F \subset MM^{\mathsf{T}}$), daher also $F^{\mathsf{T}} S_i \subset S_i \mathrm{L}$, und damit ist dann insgesamt die Nachfolgertreue bewiesen.
- Bindungstreue: Forderung geht durch Transposition von F in sich selbst über.
- Kapselrespekt: Forderung geht durch Transposition von F in sich selbst über.
- Erhaltung nicht intern gebundener Variablen: Schon aus der Markierungstreue erhält man die Inklusion $F^{\mathsf{T}} \sqcap W\mathrm{L} \subset \mathrm{L}W$. Ferner gilt:

  $$\overline{\mathrm{L}FB^{\mathsf{T}}}F^{\mathsf{T}} \subset \overline{\mathrm{L}FB^{\mathsf{T}}F^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}F^{\mathsf{T}} = \overline{\mathrm{L}FF^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}F^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}F^{\mathsf{T}} = \overline{\mathrm{L}F^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}F^{\mathsf{T}}$$

  und damit

  $$F^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{BF^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \subset \overline{\mathrm{L}F^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}} \ .$$

  Insgesamt können wir nun folgendermaßen schließen:

  $$F^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{BF^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap W\mathrm{L} \subset F^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L}F^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}W = (F \sqcap \overline{BF\mathrm{L}} \sqcap W\mathrm{L})^{\mathsf{T}} \subset W^{\mathsf{T}} = W$$

- Erhaltung der Verschiedenheit intern gebundener Variablen: Forderung geht durch Transposition von F in sich selbst über.
- Variablentreue: Forderung geht durch Transposition von F in sich selbst über. □

Die Transponierte einer nichtzyklischen Korrespondenz ist natürlich auch wieder nichtzyklisch, da auch diese Bedingung durch Transposition in sich selbst übergeht.

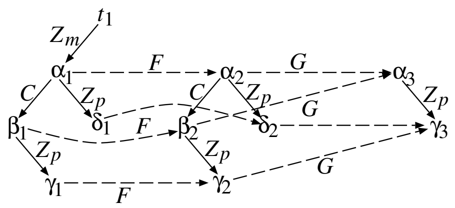
Lemma 8.3.4 (Komposition von Korrespondenzen) [←109]
Gegeben seien ein Graph G, eine Korrespondenz F von a nach b sowie eine Korrespondenz G von b nach d, wobei a, b und d Graphausschnitte seien. Dann ist die Komposition von F und G wieder eine Korrespondenz.

Beweis: Wir verwenden folgende Abkürzung: $H = FG$. Nun zeigen wir der Reihe nach die Eigenschaften der gleichwertigen Abbildung durch einfaches Übertragen derer von F und G:

- Definitionsbereich: $\mathrm{L}H^{\mathsf{T}} = \mathrm{L}G^{\mathsf{T}}F^{\mathsf{T}} = \mathrm{L}\underline{\mathsf{b}}F^{\mathsf{T}} = \mathrm{L}\underline{\mathsf{a}}$
- Obere Grenzen: Es gilt: $(t_{\mathsf{a}} \sqcap \overline{\mathrm{L}b_{\mathsf{a}}})H = (t_{\mathsf{a}} \sqcap \overline{\mathrm{L}b_{\mathsf{a}}})FG \supset (t_{\mathsf{b}} \sqcap \overline{\mathrm{L}b_{\mathsf{b}}})G \supset (t_{\mathsf{d}} \sqcap \overline{\mathrm{L}b_{\mathsf{d}}})$. Die zweite Bedingung zeigt man analog.
- Wertebereich: $\mathrm{L}\underline{\mathsf{a}}H = \mathrm{L}\underline{\mathsf{a}}FG = \mathrm{L}\underline{\mathsf{b}}G = \mathrm{L}\underline{\mathsf{d}}$
- Nachfolgertreue: Sei $i : \mathbb{1} \to \mathcal{E}$ beliebig.

  $$\begin{aligned} HS_i &= FGS_i \subset FS_i(G \sqcup b_{\mathsf{b}}^{\mathsf{T}} b_{\mathsf{d}}) \subset S_i(F \sqcup b_{\mathsf{a}}^{\mathsf{T}} b_{\mathsf{b}})(G \sqcup b_{\mathsf{b}}^{\mathsf{T}} b_{\mathsf{d}}) \\ &= S_i(FG \sqcup F b_{\mathsf{b}}^{\mathsf{T}} b_{\mathsf{d}} \sqcup b_{\mathsf{a}}^{\mathsf{T}} b_{\mathsf{b}} G \sqcup b_{\mathsf{a}}^{\mathsf{T}} b_{\mathsf{b}} b_{\mathsf{b}}^{\mathsf{T}} b_{\mathsf{d}}) \\ &= S_i(FG \sqcup \mathrm{O} \sqcup \mathrm{O} \sqcup b_{\mathsf{a}}^{\mathsf{T}} b_{\mathsf{d}}) \end{aligned}$$

- Markierungstreue: $HM = FGM \subset FM \subset M$
- Bindungstreue: Zunächst gilt: $HB \sqcap \mathrm{L}H = FGB \sqcap \mathrm{L}FG \subset FBG = (FB \sqcap \mathrm{L}F)G \subset BFG = BH$. Die anderen Inklusionen zeigt man analog.
- Kapselrespekt: Man betrachte einen ersten Knoten $\alpha_1 \subset \mathrm{L}(FGG^{\mathsf{T}}F^{\mathsf{T}} \sqcap C^{\mathsf{T}})$ auf einem Pfad m von einem Spitzenknoten t_1 aus; es läßt sich immer analog zu dem Vorgehen im Beweis des Kapselrespektes in Lemma 8.3.2 die abgebildete Konstellation konstruieren:

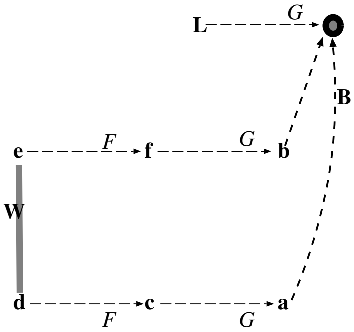


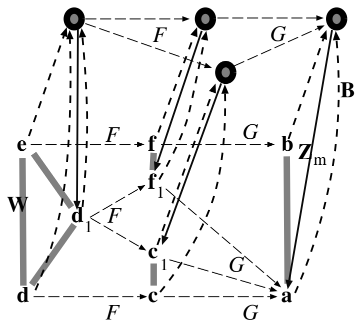
Man gewinnt schließlich ebenso wie dort einen Widerspruch zu der Annahme, daß H nicht kapselrespektierend sei.

- Erhaltung intern gebundener Variablen:

$$H^{\mathsf{T}} W H \sqcap B B^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L} H B^{\mathsf{T}} \quad = \quad G^{\mathsf{T}} F^{\mathsf{T}} W F G \sqcap B B^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L} G B^{\mathsf{T}}$$

Seien nun a und b zwei Punkte mit $a^{\mathsf{T}} b \subset G^{\mathsf{T}} F^{\mathsf{T}} W F G \sqcap B B^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L} G B^{\mathsf{T}}$. Nun nehmen wir Zwischenpunkte c, d, e und f wie im folgenden Bild links an:





Dies ergänzen wir nun schrittweise zu dem Bild rechts. Zunächst gibt es einen Pfad m, so daß $a = aB\mathcal{Z}_m$, und da d ein Graphausschnitt ist, gilt auch $aB\mathbb{Z}_m \subset \underline{\mathsf{d}}$. Mit Lemma 8.2.8 gilt:

$$\begin{aligned}
bB &\subset bG^{\mathsf{T}} F^{\mathsf{T}} W F G \mathbb{B}_m^{\mathsf{T}} \\
&\subset bG^{\mathsf{T}} F^{\mathsf{T}} W F W \mathbb{B}_m^{\mathsf{T}} G \\
&\subset bG^{\mathsf{T}} F^{\mathsf{T}} W W F \mathbb{B}_m^{\mathsf{T}} G \\
&\subset bG^{\mathsf{T}} F^{\mathsf{T}} W W \mathbb{B}_m^{\mathsf{T}} F G \\
&\subset bG^{\mathsf{T}} W F^{\mathsf{T}} \mathbb{B}_m^{\mathsf{T}} F G \\
&\subset bG^{\mathsf{T}} W \mathbb{B}_m^{\mathsf{T}} F^{\mathsf{T}} F G \\
&\subset bW \mathbb{B}_m^{\mathsf{T}} G^{\mathsf{T}} F^{\mathsf{T}} F G \ .
\end{aligned}$$

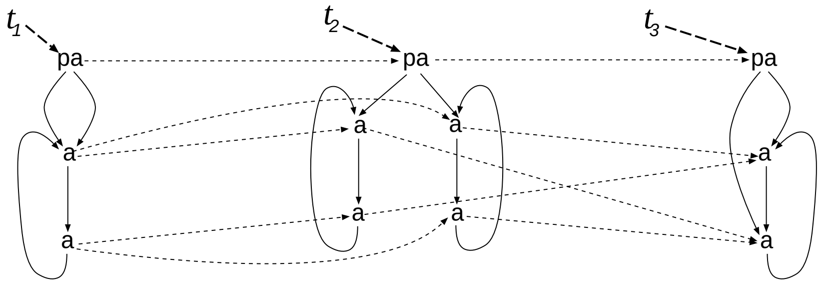
Daraus folgt $bW\mathbb{B}_m^{\mathsf{T}} \neq \mathrm{O}$ und weiter $bW\mathbb{B}_m^{\mathsf{T}} = bW(B \sqcap \mathcal{Z}_m^{\mathsf{T}}) = bB = a\mathcal{Z}_m^{\mathsf{T}}$. Damit und mit der Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen von G und F erhalten wir $a \subset bW$, q.e.d.

- Erhaltung nicht lokal gebundener Variablen:

$$\begin{aligned}
H \sqcap \overline{B\underline{\mathsf{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap W\mathrm{L} &= (F \sqcap \overline{B\underline{\mathsf{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap W\mathrm{L})G \\
&\subset (W \sqcap \overline{\mathrm{L}\underline{\mathsf{b}}B^{\mathsf{T}}})G \\
&\subset W(G \sqcap \overline{B\underline{\mathsf{b}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap W\mathrm{L}) \\
&\subset WW = W
\end{aligned}$$

- Variablentreue: analog zur Bindungstreue. $\square$

Die Komposition zweier nichtzyklischer Korrespondenzen ist im allgemeinen nicht wieder nichtzyklisch:



Falls $D \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$ progressiv-endlich ist, ist die Komposition notwendig nichtzyklisch.

8.4 Kompatibilität mit der Identifizierungsgleichwertigkeit

Um von Korrespondenzen zu Identifizierungen zu kommen, müssen wir zunächst eine in Frage kommende Äquivalenzrelation finden. Wir wählen hierzu die Äquivalenzhülle (Definition 2.4.1).

Ohne weitere Voraussetzungen läßt sich nun zeigen, daß die Äquivalenzhülle einer beliebigen Korrespondenz bereits einige Identifizierungseigenschaften besitzt:

Lemma 8.4.1 (Identifizierungseigenschaften der Äquivalenzhülle) [←119]
Gegeben seien ein Graph G, zwei Intervalle bzw. Abschnitte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und eine Korrespondenz F von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$. Dann erfüllt $\mathcal{R}_F$ die Identifizierungseigenschaften der Markierungskompatibilität, der einfachen Bindungstreue und der Erhaltung freier Variablen.

Beweis:

- Markierungskompatibilität:

$$FM = FM \sqcap \underline{\mathfrak{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \subset M \quad \Rightarrow \quad F \subset MM^{\mathsf{T}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}_F \subset MM^{\mathsf{T}}$$

- einfache Bindungstreue: Es gilt:

$$(F \sqcup F^{\mathsf{T}})B = FB \sqcup F^{\mathsf{T}}B \subset B(F \sqcup \mathrm{I}) \sqcup B(F^{\mathsf{T}} \sqcup \mathrm{I}) = B(F \sqcup F^{\mathsf{T}} \sqcup \mathrm{I})$$

  und damit auch

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_F B &= (F \sqcup F^{\mathsf{T}})^* B \\ &\subset B(F \sqcup F^{\mathsf{T}} \sqcup \mathrm{I})^* \\ &= B(F \sqcup F^{\mathsf{T}})^* \\ &= B\mathcal{R}_F \ , \end{aligned}$$

- Erhaltung freier Variablen: Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} (F \sqcup F^{\mathsf{T}}) \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}W &= ((F \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}W) \sqcup (F^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}W)) \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}} \\ &\subset ((F \sqcap \overline{\mathrm{L}\underline{\mathfrak{b}}B^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}W) \sqcup (F^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}B^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}W)) \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}} \\ &\subset (W \sqcup W) \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}} \\ &= W \sqcap \overline{B\mathrm{L}} \end{aligned}$$

  Durch Induktion über $j \geq 0$ läßt sich dann zeigen:

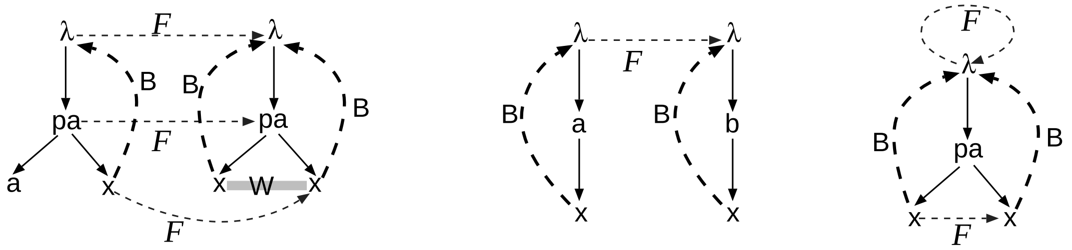
$$(F \sqcup F^{\mathsf{T}})^j \sqcap \overline{\mathrm{L}B^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}W \subset W \sqcap \overline{B\mathrm{L}} \ ,$$

da nämlich $\mathrm{I} \sqcap \mathrm{L}\, W \subset W$ und

$$\begin{aligned}
&(F \sqcup F^{\mathsf{T}})^{j+1} \sqcap \overline{\mathrm{L} B^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}\, W \\
&\qquad = (F \sqcup F^{\mathsf{T}})^{j} (F \sqcup F^{\mathsf{T}}) \sqcap \overline{\mathrm{L} B^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}\, W \subset (F \sqcup F^{\mathsf{T}})^{j} (W \sqcap \overline{B \mathrm{L}}) \\
&\qquad \subset ((F \sqcup F^{\mathsf{T}})^{j} \sqcap \overline{\mathrm{L} B^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}\, W)\, W \subset (W \sqcap \overline{B \mathrm{L}})\, W = W \sqcap \overline{B \mathrm{L}}
\end{aligned}$$

Damit gilt dann auch $\mathcal{R}_F \sqcap \overline{\mathrm{L} B^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}\, W \subset W$. □

Im folgenden Bild ist links eine gleichwertige Abbildung dargestellt, deren Äquivalenzhülle nicht variablentreu ist (das Bildintervall ist nicht variablenabgeschlossen). In der Mitte erfüllt die Äquivalenzhülle nicht die strikte Bindungstreue (die betreffenden Intervalle sind nicht bindungsabgeschlossenen). Im rechten Bild identifiziert die Äquivalenzhülle von F verschiedene gleich gebundene Variable (Urbild- und Bildintervall von F sind keine Graphausschnitte).



Diese Lücken werden durch die nun folgenden Lemmata geschlossen.

Lemma 8.4.2 (Variablentreue der Äquivalenzhülle)
Gegeben seien ein Graph G, zwei variablenabgeschlossene Intervalle bzw. Abschnitte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und eine Korrespondenz F von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$. Dann ist $\mathcal{R}_F$ variablentreu.

Beweis: analog zur einfachen Bindungstreue unter Heranziehung von Lemma 8.2.5. □

Die strikte Bindungstreue folgt zwar im Endeffekt aus dem Kapselrespekt, läßt sich aber unter Bindungsabschluß auch direkt beweisen:

Lemma 8.4.3 (strikte Bindungstreue der Äquivalenzhülle)
Gegeben seien ein Graph G, zwei bindungsabgeschlossene Intervalle bzw. Abschnitte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und eine Korrespondenz F von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$. Dann ist $\mathcal{R}_F$ strikt bindungstreu.

Beweis: Mit Lemma 8.2.6 schließen wir problemlos:

$$(F \sqcup F^{\mathsf{T}})B = FB \sqcup F^{\mathsf{T}}B \supset BF \sqcup BF^{\mathsf{T}} = B(F \sqcup F^{\mathsf{T}})$$

und damit:

$$\mathcal{R}_F B = (F \sqcup F^{\mathsf{T}})^* B \supset B(F \sqcup F^{\mathsf{T}})^* = B \mathcal{R}_F \ .$$ □

Die Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen macht wieder einmal die größten Probleme.

Lemma 8.4.4 (Äquivalenzhülle und Erhaltung geb. Var.)
Gegeben seien ein Graph G, zwei Graphausschnitte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und eine Korrespondenz F von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$. Dann erhält $\mathcal{R}_F$ die Verschiedenheit gleich gebundener Variablen.

Beweis: Seien $\alpha, \omega : \mathbb{1} \to \mathcal{V}$ zwei Punkte mit $\alpha^{\mathsf{T}}\omega \subset BB^{\mathsf{T}} \sqcap \mathcal{R}_F$, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $q \subset p(F \sqcup F^{\mathsf{T}})^k$, insbesondere gibt es ein Wort $w = \langle j_1, \ldots, j_k \rangle \in \{1,2\}^*$, so daß mit den Vereinbarungen $F_1 = F$, $F_2 = F^{\mathsf{T}}$ und $F_w = F_{j_1} \cdots F_{j_k}$ genauer $\omega \subset \alpha F_w$ gilt.

Wir beweisen nun, daß es für jedes Präfix v von w eine Sequenz $v' \in \{1,2\}^*$ gibt, so daß

$$\alpha F_v \subset \alpha(F_{v'} \sqcap \mathbb{B}^{\mathsf{T}}(F_{v'} \| \mathrm{I})\mathbb{B})\, W$$

Daraus folgt dann sofort $\alpha F_v \subset \mathrm{L}B^\top$. Der Induktionsanfang mit $v = \underline{empty}$ ist trivial. Sei nun $v = \langle\!\langle u, j \rangle\!\rangle \underline{snoc}$, und sei u' so gewählt, daß

$$\alpha F_u \subset \alpha(F_{u'} \sqcap \mathbb{B}^\top(F_{u'} \| \mathrm{I})\mathbb{B})\, W \quad .$$

Nun ist vor allem zu unterscheiden, ob $\alpha F_u \subset \overline{\mathrm{L}F_j^\top} B^\top$ oder $\alpha F_u \subset \mathrm{L}F_j^\top B^\top$.

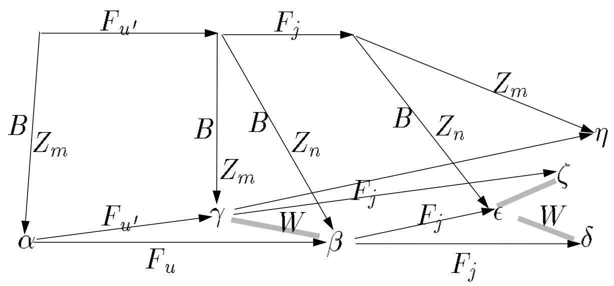
Im ersten Fall gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha F_v &= \alpha F_u F_j \\
&\subset \alpha F_u(F_j \sqcap B\overline{F_j\mathrm{L}}) \\
&\subset \alpha F_u(F_j \sqcap \overline{BF_j\mathrm{L}} \sqcap W\mathrm{L}) \\
&\subset \alpha F_u W \\
&\subset \alpha(F_{u'} \sqcap \mathbb{B}^\top(F_{u'} \| \mathrm{I})\mathbb{B})\, WW \\
&\subset \alpha(F_{u'} \sqcap \mathbb{B}^\top(F_{u'} \| \mathrm{I})\mathbb{B})\, W \quad .
\end{aligned}$$

Im zweiten Fall erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\alpha F_v &= \alpha F_u F_j \\
&\subset \alpha F_u(F_j \sqcap BF_j\mathrm{L}) \\
&\subset \alpha F_u(F_j \sqcap \mathbb{B}^\top(F_j \| \mathrm{I})\mathrm{L}) \\
&\subset \alpha F_u(F_j \sqcap (F_j \sqcap \mathbb{B}^\top(F_j \| \mathrm{I})\mathbb{B})\, W) \\
&\subset \alpha(F_u \sqcap (F_{u'} \sqcap \mathbb{B}^\top(F_{u'} \| \mathrm{I})\mathbb{B})\, W)(F_j \sqcap (F_j \sqcap \mathbb{B}^\top(F_j \| \mathrm{I})\mathbb{B})\, W)
\end{aligned}$$

Damit existieren für jeden Knoten δ mit $\delta \subset \alpha F_u F_j$ Zwischenknoten β, γ, δ wie im folgenden Bild:



Insbesondere gilt $\gamma B = \beta B$. Da $\mathrm{L}F_j^\top$ variablenabgeschlossen ist erhalten wir mit der Variablentreue durch $\epsilon^\top\gamma \subset F_j^\top W \sqcap \mathrm{L}F_j^\top \subset WF_j^\top$ die Existenz eines Zwischenpunktes $\zeta \subset \epsilon W \sqcap \gamma F_j$.

Da $\mathrm{L}F_j$ Graphausschnitt ist gilt weiter mit Lemma 8.2.7

$$B^\top\epsilon^\top\gamma \subset F_j^\top(B^\top \sqcap Z_m) \subset (B^\top \sqcap Z_m)F_j^\top$$

und wir erhalten einen Zwischenpunkt $\eta = \epsilon B Z_m \subset \gamma F_j$ mit $\eta B = \epsilon B = \zeta B$. Nun gilt mit der Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen:

$$\delta^\top\eta \subset \delta^\top\zeta\zeta^\top\eta \subset W\zeta^\top\eta \subset W(F_j^\top F_j \sqcap BB^\top \sqcap \mathrm{L}B^\top) \subset WW \subset W \quad .$$

Hieraus folgt nun mit $v' := \langle\!\langle u', j \rangle\!\rangle \underline{snoc}$ die Inklusion:

$$\delta \subset \eta W \subset \alpha(F_{v'} \sqcap \mathbb{B}^\top(F_{v'} \| \mathrm{I})\mathbb{B})\, W \quad .$$

Damit gibt es nun insbesondere auch eine Sequenz $w' \in \{1,2\}^*$, so daß wir mit $\omega B = \alpha B$

folgendes erhalten:

$$\begin{aligned}
\alpha F_w \sqcap \omega &\subset \alpha(F_{w'} \sqcap \mathbb{B}^{\mathsf{T}}(F_{w'} \| \mathrm{I})\mathbb{B})\, W \\
&\subset \alpha(F_{w'} \sqcap ((\mathbb{B}^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}\omega_B \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*})(F_{w'} \| \mathrm{I}) \sqcap \mathrm{L}\omega_B \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}\times\mathcal{E}^*})\mathbb{B})\, W \\
&\subset \alpha(F_{w'} \sqcap \mathbb{B}^{\mathsf{T}}\mathbb{B})\, W \\
&\subset \alpha\mathbb{B}^{\mathsf{T}}\mathbb{B} W \\
&\subset \alpha\, W
\end{aligned}$$

□

Für den Kapselrespekt schließlich müssen wir uns auf Graphen mit progressiv endlicher Kapselung, also z.B. progressiv endliche Graphen, einschränken:

Lemma 8.4.5 (Äquivalenzhülle und Kapselrespekt)

Gegeben seien ein Graph G mit progressiv endlicher Kapselung, zwei Graphausschnitte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und eine Korrespondenz F von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$. Dann respektiert $\mathcal{R}_F$ die Kapselung.

Beweis: Analog zum Beweis i) und ii) von Lemma 4.2.3: Für $w = \langle F_1, \ldots, F_n\rangle \in \{F, F^{\mathsf{T}}\}^*$ sei F_w das entsprechende Produkt, also $F_w := F_1 \cdots F_n$. Wir zeigen, daß für alle $w \in \{F, F^{\mathsf{T}}\}^*$ gilt:

i) $C^{\mathsf{T}} F_w \subset F_w C^{\mathsf{T}}$

ii) $F_w \subset \overline{C^{\mathsf{T}}}$

Für den leeren Pfad gilt $F_{\langle\rangle} = \mathrm{I}$ und beide Aussagen sind trivialerweise wahr. Wir nehmen nun an, daß beide Aussagen für ein beliebiges $w \in \{F, F^{\mathsf{T}}\}^*$ gelten; sei $F_0 \in \{F, F^{\mathsf{T}}\}$.

$$\begin{aligned}
\text{i) } C^{\mathsf{T}} F_{F_0:w} &= C^{\mathsf{T}} F_0 F_w \\
&\subset F_0 C^{\mathsf{T}} F_w && \text{Lemma 8.2.9, ggf. mit Lemma 8.3.3} \\
&\subset F_0 F_w C^{\mathsf{T}} && \text{Annahme i)} \\
&= F_{F_0:w}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii) } \mathrm{L}(C^{\mathsf{T}} \sqcap F_{F_0:w}) &\subset \mathrm{L}F_0(F_w \sqcap F_0 C^{\mathsf{T}}) && \text{Modalregel} \\
&\subset \mathrm{L}(F_0 \sqcap F_w C) C^{\mathsf{T}} && \text{Modalregel} \\
&\subset \mathrm{L}(F_0 \sqcap C F_w) C^{\mathsf{T}} && \text{Annahme i)} \\
&\subset \mathrm{L}\, C(F_w \sqcap C^{\mathsf{T}} F_0) C^{\mathsf{T}} && \text{Modalregel} \\
&\subset \mathrm{L}(F_w \sqcap F_0 C^{\mathsf{T}}) C^{\mathsf{T}} && \text{Lemma 8.2.9, ggf. mit Lemma 8.3.3} \\
&\subset \mathrm{L}F_0(C^{\mathsf{T}} \sqcap F_0 F_w) C^{\mathsf{T}} && \text{Modalregel} \\
&\subset \mathrm{L}(C^{\mathsf{T}} \sqcap F_{F_0:w}) C^{\mathsf{T}}
\end{aligned}$$

Mit Lemma 2.3.4 folgt hieraus und aus der progressiven Endlichkeit von C gemäß den Voraussetzungen $\mathrm{L}(C^{\mathsf{T}} \sqcap F_{F_0:w}) = \mathrm{O}$ und damit $F_{F_0:w} \subset \overline{C^{\mathsf{T}}}$.

Durch Induktion über den Aufbau der Elemente von $\{F, F^{\mathsf{T}}\}^*$ sind damit i) und ii) von oben für alle $w \in \{F, F^{\mathsf{T}}\}^*$ bewiesen. Da $\mathcal{R}_F = \bigsqcup\{w : \{F, F^{\mathsf{T}}\}^* \bullet F_w\}$, erhalten wir aus ii) direkt den Kapselrespekt. □

Schließlich ist auch der Nachweis der Nachfolgertreue der Äquivalenzhülle einer Korrespondenz zwischen offenen Graphausschnitten kein Problem.

Lemma 8.4.6 (Nachfolgertreue der Äquivalenzhülle) [←119]

Gegeben seien ein Graph G und eine Korrespondenz F von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$, die beide offen seien. Dann ist $\mathcal{R}_F$ nachfolgertreu.

Beweis: Sei $i : \mathbb{1} \to \mathcal{E}$ beliebig. Nach Lemma 8.2.11 gilt $FS_i \subset S_iF$ und (mit Lemma 8.3.3) auch $F^{\mathsf{T}}S_i \subset S_iF^{\mathsf{T}}$, also schließen wir problemlos:

$$(F \sqcup F^{\mathsf{T}})S_i = FS_i \sqcup F^{\mathsf{T}}S_i \subset S_iF \sqcup S_iF^{\mathsf{T}} = S_i(F \sqcup F^{\mathsf{T}})$$

Daraus folgt dann sofort: $\mathcal{R}_F S_i = (F \sqcup F^{\mathsf{T}})^* S_i \subset S_i(F \sqcup F^{\mathsf{T}})^* = S_i\mathcal{R}_F$. □

Damit erhalten wir aus Korrespondenzen zwischen offenen Graphausschnitten die anvisierten Identifizierungen:

Satz 8.4.7 (Identifizierung offener Intervalle) [←119]

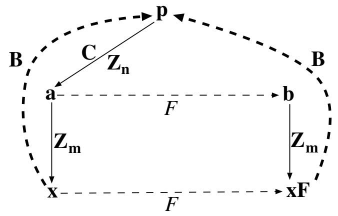
Gegeben seien ein Graph G mit progressiv endlicher Kapselung, zwei offene Graphausschnitte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und eine Korrespondenz F von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$. Dann ist $\mathcal{R}_F$ eine Identifizierung.

Beweis: Die Behauptung folgt aus den Lemmata 8.4.1 bis 8.4.6 zusammen mit Lemma 5.2.2. □

Satz 8.4.8 (Kompatibilität mit der Identifizierungsgleichwertigkeit 1)

Gegeben seien ein Graph G und zwei Punkte $a, b : \mathbb{1} \to \mathcal{V}$. Wenn nun $\mathfrak{a} = [a, \mathrm{O}]$ und $\mathfrak{b} = [b, \mathrm{O}]$ selbstkapselungsfrei sind (siehe Definition 5.3.3), d.h. also wenn $aC^{\mathsf{T}} \subset \underline{\mathfrak{a}}$ und $bC^{\mathsf{T}} \subset \overline{\mathfrak{b}}$, und wenn es eine Korrespondenz F von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ gibt, dann gilt $a \underset{G}{\equiv} b$.

Beweis: Sei F eine Korrespondenz von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$. Nach Satz 8.4.7 ist $\mathcal{R}_F$ eine Identifizierung mit $a^{\mathsf{T}}b \subset \mathcal{R}_F$. Es bleibt noch zu zeigen, daß $aC^{\mathsf{T}} = bC^{\mathsf{T}}$:

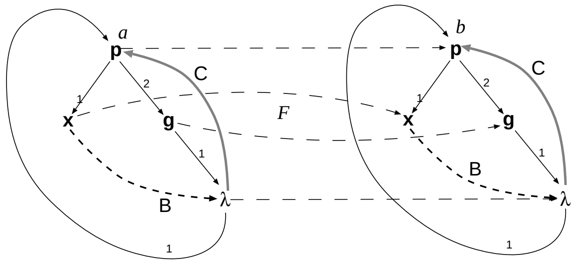


Sei $p : \mathbb{1} \to \mathcal{V}$ ein Knoten mit $p \subset aC^{\mathsf{T}}$. Dann gibt es einen Knoten $x : \mathbb{1} \to \mathcal{V}$ und Pfade m, n, so daß $xB = p$, $pZ_n = a$, $a\mathbb{Z}_m \subset \underline{\mathfrak{a}}$, $x = aZ_m \subset bF^{\mathsf{T}}Z_m \subset bZ_mF^{\mathsf{T}}$. Dann liegt bZ_m in der gleichen Variablen wie x (die Kommutation mit der Pfadfunktion ist gültig, da alle Präfixe von m weder aus $\underline{\mathfrak{a}}$ noch aus $\underline{\mathfrak{b}}$ herausführen können):

$$bZ_m \subset xF \subset x(F \sqcap \overline{BF\mathrm{L}} \sqcap W\mathrm{L}) \subset xW$$

Daraus erhalten wir $bZ_mB \subset xWB = xB = p$. Da auch $b\mathbb{Z}_m \subset \underline{\mathfrak{b}}$ gilt, ist b von p gekapselt, also $b \subset pC$ und insgesamt $aC^{\mathsf{T}} \subset bC^{\mathsf{T}}$. ($pC \subset b\mathbb{Z}_m$ ist unmöglich, da mit der Bindungstreue von F auch $p = xB \subset \underline{\mathfrak{a}}$ folgen würde und damit ein Widerspruch zur Selbstkapselungsfreiheit von $\mathfrak{a}$.) Die entgegengesetzte Inklusion zeigt man analog. □

Für selbstkapselndes $\mathfrak{a}$ läßt sich ein Beispiel konstruieren, in dem die Identifizierungsgleichwertigkeit nicht gilt, sogar in einem kapselungsfrei basierten Graphen.



Satz 8.4.9 (Kompatibilität mit der Identifizierungsgleichwertigkeit 2)

Gegeben seien ein Graph G und zwei Punkte $a, b : \mathbb{1} \to \mathcal{V}$. Wenn nun $\mathfrak{a} = [a, \mathrm{O}]$ und $\mathfrak{b} = [b, \mathrm{O}]$ selbstkapselungsfrei sind und $a \underset{G}{\equiv} b$ gilt, dann gibt es eine Korrespondenz F von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$.

Beweis: $F := Z^{\mathsf{T}}(a^{\mathsf{T}}b \| \mathrm{I})Z = \bigsqcup\{m : \mathcal{E}^* \bullet Z_m^{\mathsf{T}}a^{\mathsf{T}}bZ_m\}$ ist eine solche Korrespondenz.

Zunächst sei R eine Identifizierung, kraft derer $a \underset{G}{\equiv} b$ gilt, und wir zeigen $F \subset R$, indem wir durch Induktion über den Pfadaufbau beweisen, daß für jeden (abstrakten) Pfad m gilt: $Z_m^{\mathsf{T}}a^{\mathsf{T}}bZ_m \subset R$.

Für den leeren Pfad haben wir nach Voraussetzung $a^\mathsf{T} b \subset R$. Als Induktionsschritt erhalten wir nun (sei $i : \mathbb{1} \to \mathcal{E}$ beliebig):

$$Z_m^\mathsf{T} a^\mathsf{T} b Z_m \subset R \Rightarrow Z_{i:m}^\mathsf{T} a^\mathsf{T} b Z_{i:m} = S_i^\mathsf{T} Z_m^\mathsf{T} a^\mathsf{T} b Z_m S_i \subset S_i^\mathsf{T} R S_i \subset S_i^\mathsf{T} S_i R \subset R$$

Nun zu den Korrespondenzeneigenschaften:

- Definitionsbereich: $\mathfrak{a} = [a, \mathrm{O}] = \bigsqcup\{m : \mathcal{E}^* \bullet a Z_m\}$
- Wertebereich: analog
- Obere Grenzen: $b \subset aF$ und $a \subset bF^\mathsf{T}$.
- Markierungstreue: $FM \subset RM = M$
- Nachfolgertreue: Sei $i : \mathbb{1} \to \mathcal{E}$ beliebig. Mit der Markierungstreue können wir schließen:

$$\begin{aligned} FS_i &= \bigsqcup\{m : \mathcal{E}^* \bullet Z_m^\mathsf{T} a^\mathsf{T} b Z_m S_i\} = \bigsqcup\{m : \mathcal{E}^* \bullet S_i S_i^\mathsf{T} Z_m^\mathsf{T} a^\mathsf{T} b Z_m S_i\} \\ &= S_i \bigsqcup\{m : \mathcal{E}^* \bullet S_i^\mathsf{T} Z_m^\mathsf{T} a^\mathsf{T} b Z_m S_i\} \subset S_i F \end{aligned}$$

- Bindungstreue:

$$\begin{aligned} FB \sqcap \mathrm{L}F &= \bigsqcup\{m, n : \mathcal{E}^* \bullet Z_n^\mathsf{T} Z_m^\mathsf{T} a^\mathsf{T} b Z_m \mathbb{B}_n B\} \\ &\subset \bigsqcup\{m, n : \mathcal{E}^* \bullet (Z_n^\mathsf{T} \sqcap \mathrm{L} a Z_m) R \mathbb{B}_n B \sqcap \mathrm{L} b Z_m\} \\ &\subset \bigsqcup\{m, n : \mathcal{E}^* \bullet (Z_n^\mathsf{T} \sqcap \mathrm{L} a Z_m) \mathbb{B}_n R B \sqcap \mathrm{L} b Z_m\} && \text{Lemma 8.2.7} \\ &= \bigsqcup\{m, n : \mathcal{E}^* \bullet (Z_n^\mathsf{T} \sqcap B \sqcap \mathrm{L} a Z_m) \mathbb{B}_n B R \sqcap \mathrm{L} b Z_m\} \\ &\subset \bigsqcup\{m, n : \mathcal{E}^* \bullet B Z_m^\mathsf{T} a^\mathsf{T} b Z_m\} \\ &\subset BF \end{aligned}$$

  Die übrigen Inklusionen zur Bindungstreue zeigt man analog.

- Kapselrespekt: $FF^\mathsf{T} \subset RR = R \subset \overline{C}$
- Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen:

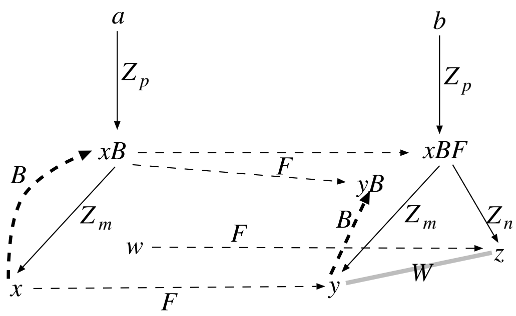
$$F^\mathsf{T} W F \sqcap \mathrm{L} F B^\mathsf{T} \sqcap B B^\mathsf{T} \subset R W R \sqcap B B^\mathsf{T} \subset W$$

- Erhaltung nicht intern gebundener Variablen:

$$\begin{aligned} F \sqcap \overline{BF\mathrm{L}} \sqcap W\mathrm{L} &\subset (R \sqcap \overline{B\mathrm{L}} \sqcap W\mathrm{L}) \sqcup (F \sqcap BCa^\mathsf{T}\mathrm{L}) \\ &\subset W \sqcup (F \sqcap BCa^\mathsf{T}\mathrm{L} \sqcap \mathrm{L}B^\mathsf{T}) && \text{Bindungstreue } R \\ &\subset W \sqcup (F \sqcap BCa^\mathsf{T}\mathrm{L} \sqcap \overline{\mathrm{L}F} B^\mathsf{T}) && \text{Bindungstreue } F \\ &\subset W \sqcup (F \sqcap BCa^\mathsf{T}\mathrm{L} \sqcap \mathrm{L} b C^\mathsf{T} B^\mathsf{T}) && FB \sqcap \overline{\mathrm{L}F} \subset \mathrm{L} b C^\mathsf{T} \\ &\subset W \sqcup (F \sqcap BCa^\mathsf{T}\mathrm{L} \sqcap \mathrm{L} a C^\mathsf{T} B^\mathsf{T}) && a = b \\ &\subset W \sqcup (F \sqcap B(Ca^\mathsf{T}\mathrm{L} \sqcap \mathrm{L} a C^\mathsf{T}) B^\mathsf{T}) \\ &\subset W \sqcup (F \sqcap B(Ca^\mathsf{T}\mathrm{L} \sqcap \mathrm{L} a C^\mathsf{T} \sqcap R) B^\mathsf{T}) && F \subset R, \text{ Bindungstreue } R \\ &\subset W \sqcup (F \sqcap B((C \sqcup C^\mathsf{T}) \sqcap R) B^\mathsf{T}) && \text{Lemma 3.5.5} \\ &\subset W \sqcup (F \sqcap B B^\mathsf{T}) && \text{Kapselrespekt } R \\ &\subset W && \text{EdVggV. } R \end{aligned}$$

- Variablentreue:

$$\begin{aligned}
FW \sqcap \mathrm{L}F \sqcap \overline{BF\mathrm{L}} &\subset WW \sqcap \mathrm{L}F \sqcap \overline{BF\mathrm{L}} \\
&\subset (W \sqcap \overline{\mathrm{L}FB^{\mathsf{T}}})F^{\mathsf{T}}F && \text{Lemma 8.2.2} \\
&\subset W(F^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{BF^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap W\mathrm{L})F \\
&\subset WF
\end{aligned}$$



$FW \sqcap \mathrm{L}F \sqcap BF\mathrm{L} \subset WF$ läßt sich über Nachfolgertreue und Bindungstreue von F sowie Kapselrespekt von R nach bekanntem Muster zeigen. □

8.5 Korrespondenzen zwischen den Bildern von Variablen

Die Einführung von Korrespondenzen entsprang dem Bedürfnis, die Bilder von verschiedenen Knoten einer parallelen Variablen in eine Äquivalenzbeziehung zu setzen. Da die Existenz von Korrespondenzen zwischen Graphausschnitten eine Äquivalenzrelation ist und zwischen zwei Graphausschnitten ein Infimum aller Korrespondenzen existiert, können wir eine eindeutig bestimmte Korrespondenz zu zwei Graphausschnitten gewinnen. Damit kann man zu zwei Knoten und einer Abbildung von *der* zugehörigen Korrespondenz sprechen. Wir definieren eine Notation für diese partielle Funktion.

Definition 8.5.1 (Korrespondenz zwischen den Bildern von Variablen)
Zu zwei Graphen G_1 und G_2 sei eine Einpassung $F : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ gegeben. Es sei

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_F \;:=\; & \bigsqcup \{x, y : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1 \mid x^{\mathsf{T}}y \subset W_1 \sqcap \mathrm{L}v_s M_1^{\mathsf{T}} \wedge \\
& \qquad \text{es gibt eine Korrespondenz von } [x]\!]F \text{ nach } [y]\!]F \bullet x^{\mathsf{T}}y\}
\end{aligned}$$

die Einschränkung der Variablenidentität W_1 auf solche Schemavariablenknoten, zwischen deren Bildabschnitten (im Intervallkontext wären hier Bildintervalle zu setzen) Korrespondenzen existieren. Für zwei Punkte $x, y : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ mit $x^{\mathsf{T}}y \subset \mathcal{W}_F$ bezeichne

$$\mathcal{C}_F(x, y)$$

das Infimum aller Korrespondenzen von $[x]\!]F$ nach $[y]\!]F$ (bzw. von $[x]F$ nach $[y]F$ im Intervallkontext). Wenn $x^{\mathsf{T}}y \subset \overline{\mathcal{W}_F}$, sei $\mathcal{C}_F(x, y)$ undefiniert. Weiter sei $\mathcal{C}_F : (\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2) \leftrightarrow (\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2)$ die Relation, für die $\pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2} \mathcal{C}_F \pi_{\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2} \subset \mathcal{W}_F$ (Gleichheit kann wegen möglicher leerer Bilder nicht gefordert werden), und für alle $x, y : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$

$$\rho^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2}(\mathrm{L}x \| \mathrm{I})\mathcal{C}_F(y^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \| \mathrm{I})\rho_{\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2} = \begin{cases} \mathrm{O} & \text{falls } x^{\mathsf{T}}y \subset \overline{\mathcal{W}_F} \\ \mathcal{C}_F(x, y) & \text{falls } x^{\mathsf{T}}y \subset \mathcal{W}_F. \end{cases}$$

erfüllt ist. □

Damit enthält $\mathcal{C}_F$ jede nichtleere infimale Korrespondenz in G_2 zwischen den Bildern zweier paralleler Schemavariablen in G_1, jeweils angereichert um die Information, welche Schemavariable dies sind.

Da es bei Korrespondenzen um die Bilder von parallelen Variablen geht, werden diese auch dazu dienen, „Kopien“ entsprechender Intervalle zu definieren. Seit [Wad71] ist bekannt, daß echtes Kopieren nur da eingesetzt werden sollte, wo es unumgänglich ist. Eine Korrespondenz entspricht dieser Forderung, wenn sich ihr nichtidentischer Anteil $F \sqcap \overline{\mathrm{I}}$ auf die Kapselgerüste beschränkt. Zu diesem Behufe definieren wir:

Definition 8.5.2 Eine Korrespondenz F von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ heißt **sharing-konservativ**, wenn

$$F \sqcap \overline{\mathrm{I}} \subset \underline{\mathfrak{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}\underline{\mathfrak{b}} \;. \qquad \square$$

8.6 Homomorphismen

Wir ergänzen den Begriff der Einpassung dadurch zu dem des Homomorphismus, daß wir Korrespondenzen zwischen den Bildern der verschiedenen Knoten einer Urbildschemavariablen fordern.

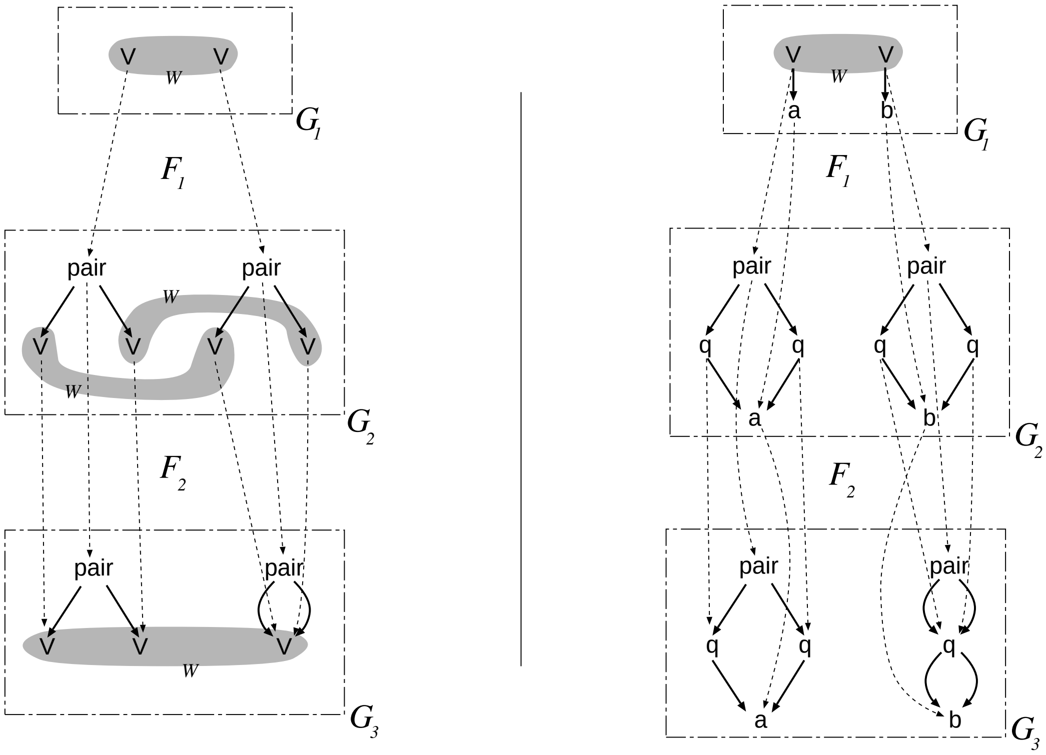
Definition 8.6.1 (Homomorphismus)
Zu zwei Graphen G_1 und G_2 und einem Variablenvektor $p : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_1$ zu G_1 sei eine p-Einpassung F von G_1 in G_2 gegeben. F ist ein *Homomorphismus von* G_1 *nach* G_2, wenn $W_1 \sqcap \mathrm{L}p \subset \mathcal{W}_F$, d.h., wenn es zu je zwei beliebigen Knoten $x, y : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ der gleichen Schemavariablen in p, also mit $x^{\mathsf{T}}y \subset W_1 \sqcap \mathrm{L}p$, eine Korrespondenz $\mathcal{C}_F(x, y)$ zwischen den Bildintervallen bzw. -abschnitten von x und y gibt.

F ist ein *starrer* Homomorphismus, wenn diese Korrespondenzen alle eindeutig und injektiv, also gleichwertige Abbildungen, sind. $\square$

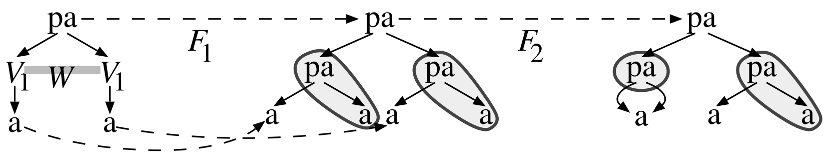
Offensichtlich sind alle O-Einpassungen starre O-Homomorphismen, da die Zusatzbedingung für Homomorphismen bei leerem p trivial wahr ist. Auch Projektionen zu Identifizierungen sind damit starre O-Homomorphismen.

Definition 8.6.2 Ein p-Homomorphismus F heißt **sharing-konservativ**, wenn wenn für je zwei Knoten $x, y : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ der gleichen Variablen aus p, also mit $x^{\mathsf{T}}y \subset W \sqcap \mathrm{L}p$, die zugehörige Korrespondenz $\mathcal{C}_F(x, y)$ sharing-konservativ ist. $\square$

Die Komposition zweier starrer Homomorphismen F und G ist nicht immer starr, wie schon die folgenden beiden Beispiele zeigen. Dabei sind die Homomorphismen im linken Bild beide semiinjektiv und die im rechten Bild beide sharing-konservativ, so daß auch diese Einschränkungen hier keinen Gewinn bringen (der Schemavariablenvektor besteht jeweils aus allen mit „V“ markierten Knoten).



Daher mußten Homomorphismen ohne die Forderung nach Starrheit definiert werden, und daher mußten wir Korrespondenzen einführen und konnten uns nicht mit gleichwertigen Abbildungen begnügen. Was die Komposition von Homomorphismen betrifft, sind jedoch Störungen, die durch Einfangen der unteren Grenzen entstehen, noch viel entscheidender:



Hier ist F_1 offensichtlich ein nichtzyklischer Homomorphismus; F_2 ist sogar eine nichtzyklische Projektion, und dennoch ist F_1F_2, wenn auch eine Einpassung, so doch kein Homomorphismus, da die Projektion die untere Grenze eines Bildabschnittes in sein Inneres hineinidentifiziert hat. Nur wenn wir diesen Effekt verhindern, können wir hoffen, eine Kategorie von Homomorphismen zu erhalten. Indem wir zunächst auf der Ebene des einzelnen Abschnittes solches Hineinidentifizieren verbieten, bekommen wir als Schlüssel zur Komposition von Homomorphismen:

Lemma 8.6.3 (Korrespondenzen unter Homomorphismen)

Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ kohärente Abschnitte und Graphausschnitte in G, wobei $\mathrm{L}\,t_{\mathfrak{a}}$ und $\mathrm{L}\,t_{\mathfrak{b}}$ Punkte seien. Sei weiter F ein nichtzyklischer p-Homomorphismus von G_1 in G_2 und H eine Korrespondenz von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ in G_1 mit $H \sqcap (\mathrm{L}\,p \sqcup p^{\mathsf{T}}\mathrm{L}) \subset W_1$. Sei $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}F$ und $\mathfrak{d} = \mathfrak{b}F$. Weiter gelte $\mathrm{L}\,H^{\mathsf{T}}F^{\lfloor p \rfloor} \subset \overline{\mathrm{L}\,b_{\mathfrak{c}}}$ und $\mathrm{L}\,HF^{\lfloor p \rfloor} \subset \overline{\mathrm{L}\,b_{\mathfrak{d}}}$. Wir fassen alle durch H induzierten Korrespondenzen zwischen Bildern von p-Variablen zu einer Menge $\mathcal{U} : \mathbb{P}(\mathcal{V}_2 \leftrightarrow \mathcal{V}_2)$ zusammen:

$$\mathcal{U} = \{x, y : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1 \mid x^{\mathsf{T}}y \subset W_1 \sqcap \mathrm{L}\,p \sqcap H \bullet \mathcal{C}_F(x, y)\} \ .$$

Mit $K = F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}HF_{\lceil\overline{p}\rceil} \sqcup \bigsqcup\mathcal{U}$ ist $K_0 = K \sqcap \underline{\mathfrak{c}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}$ eine Korrespondenz von $\mathfrak{c}$ nach $\mathfrak{d}$. □

Beweis: Sei

$$\mathcal{U}_0 = \{\, U : \mathcal{U} \mid \mathrm{L}\,U^{\mathsf{T}} \sqcap \underline{\mathfrak{c}} \neq \mathrm{O}\}$$

Damit haben wir

$$K_0 = (F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}HF_{\lceil\overline{p}\rceil} \sqcup \bigsqcup\mathcal{U}_0) \sqcap \underline{\mathfrak{c}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L}$$

- Definitionsbereich: mit

$$\mathrm{L}F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}H^{\mathsf{T}}F_{\lceil\overline{p}\rceil} = \overline{\mathrm{L}p}H^{\mathsf{T}}F_{\lceil\overline{p}\rceil} = (\underline{\mathfrak{a}} \sqcap \overline{\mathrm{L}p})F_{\lceil\overline{p}\rceil} = \underline{\mathfrak{a}}F_{\lceil\overline{p}\rceil}$$

  erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{L}K^{\mathsf{T}} &= \mathrm{L}F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}H^{\mathsf{T}}F_{\lceil\overline{p}\rceil} \sqcup \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1 \mid x \subset p \sqcap \underline{\mathfrak{a}} \bullet \underline{[x]F}\} \\ &= \underline{\mathfrak{a}}F_{\lceil\overline{p}\rceil} \sqcup \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1 \mid x \subset p \sqcap \underline{\mathfrak{a}} \bullet \underline{[x]F}\} \\ &= \underline{\mathfrak{a}}F^{\lfloor p \rfloor} \\ &\supset \underline{\mathfrak{a}F} = \underline{\mathfrak{c}} \end{aligned}$$

  und damit $\mathrm{L}K_0^{\mathsf{T}} = \underline{\mathfrak{c}}$.

- Wertebereich: analog.

- obere Grenzen: Falls $H = \mathrm{O}$ gilt $t_{\mathfrak{a}} \subset b_{\mathfrak{a}}$ und $t_{\mathfrak{b}} \subset b_{\mathfrak{b}}$, und daraus folgt auch $t_{\mathfrak{c}} \sqcap \overline{\mathrm{L}b_{\mathfrak{c}}} = \mathrm{O} = t_{\mathfrak{d}} \sqcap \overline{\mathrm{L}b_{\mathfrak{d}}}$. Falls $H \neq \mathrm{O}$, betrachten wir zunächst die Möglichkeit $\underline{\mathfrak{c}} = \mathrm{O}$. Damit gilt $t_{\mathfrak{c}} \sqcap \overline{\mathrm{L}b_{\mathfrak{c}}} = \mathrm{O}$, also auch (unter Verwendung der bildstationären Assoziierten, siehe Definition 6.4.1) $b_{\mathfrak{a}} \subset t_{\mathfrak{a}}D^{+}_{p,F}$. Da auf einem entsprechenden Pfad in $\mathfrak{a}$ nur Schemavariable mit leerem Bild liegen, erhlaten wir über deren leere Korrespondenzen auch $b_{\mathfrak{b}} \subset t_{\mathfrak{b}}D^{+}_{p,F}$ und damit $t_{\mathfrak{d}} \sqcap \overline{\mathrm{L}b_{\mathfrak{d}}} = \mathrm{O}$ und Erhaltung oberer Grenzen.

  Damit bleibt nur noch $\underline{\mathfrak{c}} \neq \mathrm{O}$ und es gilt $t_{\mathfrak{c}} = t_{\mathfrak{c}} \sqcap \overline{\mathrm{L}b_{\mathfrak{c}}}$; dual zu dem Argument zu $\underline{\mathfrak{c}} = \mathrm{O}$ erhalten wir auch $\underline{\mathfrak{d}} \neq \mathrm{O}$ und $t_{\mathfrak{d}} = t_{\mathfrak{d}} \sqcap \overline{\mathrm{L}b_{\mathfrak{d}}}$.

  Sei $\alpha : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ ein Knoten des Blockadenausgangs der oberen Grenze von $\mathfrak{a}$ (der damit in $\underline{\mathfrak{a}}$ liegt), also $\alpha \subset t_{\mathfrak{a}}E_{F,p}$, dann gibt es auch einen Punkt $\beta : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ mit $\beta \subset \alpha H \sqcap t_{\mathfrak{b}}E_{F,p} \sqcap \underline{\mathfrak{b}}$, und es gilt $t_{\mathfrak{c}} \subset \alpha F^{\lfloor p \rfloor}$ und $t_{\mathfrak{d}} \subset \beta F^{\lfloor p \rfloor}$.

  Für $\alpha \subset p$ erhalten wir $t_{\mathfrak{c}}K_0 \supset \alpha F \mathcal{C}_F(\alpha,\beta) \supset \beta F = t_{\mathfrak{d}}$, und für $\alpha \subset \overline{p}$ gilt $t_{\mathfrak{c}}K_0 \supset \alpha F_{\lceil\overline{p}\rceil}K_0 \supset \alpha F_{\lceil\overline{p}\rceil}F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}HF_{\lceil\overline{p}\rceil} \supset \alpha HF_{\lceil\overline{p}\rceil} \supset \beta F_{\lceil\overline{p}\rceil} = t_{\mathfrak{d}}$. Damit ist eine Richtung der Erhaltung der oberen Grenzen bewiesen; die Gegenrichtung zeigt man analog.

- Markierungstreue: Es gilt $F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}HF_{\lceil\overline{p}\rceil}M_2 \subset F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}HM_1 \subset F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}M_1 \subset M_2$ und für jedes $U \in \mathcal{U}$ erhalten wir $UM_2 \subset M_2$

- Selbstkapselungsgrenzen: Mit Lemma 6.4.7 gilt $\underline{\mathfrak{a}F} \subset \underline{\mathfrak{a}}F^{\lfloor p \rfloor}$; daraus folgt $\widehat{\mathfrak{c}} = \widehat{\mathfrak{a}F} \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}F^{\lfloor p \rfloor}D_2 \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}F_{\lceil\overline{p}\rceil} \sqcup \mathrm{L}b_{\mathfrak{a}}F \sqcup \mathrm{L}\widehat{\mathfrak{a}}F \sqcup \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}F^{\underline{\lfloor p \rfloor}} \sqcup \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}F^{\underline{\rfloor p \lfloor}}$. Demgemäß unterscheiden wir für einen Punkt $\gamma : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_2$ mit $\gamma \subset \widehat{\mathfrak{c}}$ fünf potentielle Fälle:

  i) $\gamma \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}F_{\lceil\overline{p}\rceil}$: Widerspruch zu Lemma 7.5.5.

  ii) $\gamma \subset \mathrm{L}b_{\mathfrak{a}}F$: Widerspruch zur Definition der Selbstkapselungsgrenze.

  iii) $\gamma \subset \mathrm{L}\widehat{\mathfrak{a}}F$: Sei $\alpha : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ ein entsprechendes Urbild, also $\alpha \subset \mathrm{L}\widehat{\mathfrak{a}}$, $\gamma = \alpha F$. Da H Korrespondenz ist, gilt $t_{\mathfrak{b}} \subset \alpha C_1$. Mit Lemma 7.4.3 gilt daher auch $t_{\mathfrak{d}} \subset \alpha F C_2 = \gamma C_2$. Aufgrund der Annahme bezüglich der unteren Grenzen liegt γ auch in $\underline{\rfloor \mathfrak{d} \lceil} = \underline{\rfloor \mathfrak{b} \lceil F}$ und ist damit Selbstkapselungsgrenze von $\mathfrak{d}$.

  iv) $\gamma \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}F^{\underline{\lfloor p \rfloor}}$: Sei $\alpha : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ ein entsprechendes Urbild, also $\alpha \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$, $\gamma \subset \alpha F^{\underline{\lfloor p \rfloor}}$. Mit der Konformität gilt $t_{\mathfrak{c}} \subset \alpha F^{\underline{\lfloor p \rfloor}}$; aus der Nichtzyklizität von F folgt dann $\alpha F = t_{\mathfrak{c}}$, was einen Widerspruch zur Abschnittsdefinition ergibt.

  v) $\gamma \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}F^{\underline{\rfloor p \lfloor}}$: Sei $\alpha : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ ein entsprechendes Urbild, also $\alpha \subset \mathrm{L}\underline{\mathfrak{a}}$, $\gamma \subset \alpha F^{\underline{\rfloor p \lfloor}}$. γ ist auch Selbstkapselungsgrenze des Bildabschnittes jedes Punktes $\beta : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ mit $\beta \subset \alpha H$ aufgrund der Korrespondenz $\mathcal{C}_F(\alpha,\beta)$. Wenn γ nun aber $t_{\mathfrak{d}}$ nicht kapselt, muß γ auf jedem Pfad von $t_{\mathfrak{d}}$ nach βF liegen. Daraus folgt $\gamma \subset \mathrm{L}F^{\underline{<p>}} \subset \mathrm{L}F^{\lfloor p \rfloor}$. Mit Korollar 7.5.3 wird damit dieser Fall auf den Fall i) reduziert.

Insgesamt ist damit $\widehat{\mathfrak{c}} \subset \widehat{\mathfrak{d}}$ gezeigt; die entgegengesetzte Inklusion folgt ebenso.

- Nachfolgertreue: Sei $i : \mathbb{1} \to \mathcal{E}$ beliebig.

$$\begin{aligned}
F^{\mathsf T}_{\lceil p \rceil} H F_{\lceil p \rceil} S_{2,i} &\subset F^{\mathsf T}_{\lceil p \rceil} H S_{1,i} F \\
&\subset F^{\mathsf T}_{\lceil p \rceil} S_{1,i} (H \sqcup \bot_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}) F \\
&\subset S_{2,i} F^{\mathsf T} (H \sqcup \bot_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}) F \\
&\subset S_{2,i} (F^{\mathsf T} H F \sqcup \bot_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}})
\end{aligned}$$

Aus $\underline{\mathfrak{c}} S_{2,i} \subset \underline{\mathfrak{c}} \sqcup b_{\mathfrak{c}}$ zusammen mit den Annahmen über die unteren Grenzen folgt nun

$$\underline{\mathfrak{c}} S_{2,i} \sqcap \mathrm{L} H^{\mathsf T} F \subset \underline{\mathfrak{c}}$$

Damit erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned}
(F^{\mathsf T}_{\lceil p \rceil} H F_{\lceil p \rceil} \sqcap \underline{\mathfrak{c}}^{\mathsf T} \mathrm{L}) S_{2,i} &\subset \underline{\mathfrak{c}}^{\mathsf T} \mathrm{L} \sqcap S_{2,i} (F^{\mathsf T} H F \sqcup \bot_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}) \\
&\subset S_{2,i} ((F^{\mathsf T} H F \sqcap \underline{\mathfrak{c}}^{\mathsf T} \mathrm{L}) \sqcup \bot_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}) \\
&\subset S_{2,i} (K_0 \sqcup \bot_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}) && F^{\mathsf T} H F \sqcap \underline{\mathfrak{c}}^{\mathsf T} \mathrm{L} \subset K_0
\end{aligned}$$

Ferner gilt für $U \in \mathcal{U}_0$ mit $U = \mathcal{C}_F(x, y)$:

$$\begin{aligned}
U S_{2,i} &\subset S_{2,i} (U \sqcup F^{\mathsf T} Q_x^{\mathsf T} Q_y F \sqcup (\mathrm{I} \sqcap \mathrm{L} \widehat{[x\rrbracket F})) \\
&= S_{2,i} (U \sqcup F^{\mathsf T} S_1^{\mathsf T} (x^{\mathsf T} y \| \mathrm{I}) S_1 F \sqcup (\mathrm{I} \sqcap \mathrm{L} \widehat{[x\rrbracket F} \sqcap \mathrm{L} \underline{\mathfrak{c}} \sqcap \mathrm{L} \underline{\mathfrak{a}} F_{\lceil p \rceil}) \sqcup (\mathrm{I} \sqcap \mathrm{L} \widehat{[x\rrbracket F} \sqcap \mathrm{L} \widehat{\mathfrak{c}})) \\
&\subset S_{2,i} (U \sqcup F^{\mathsf T} S_1^{\mathsf T} (H \| \mathrm{I}) S_1 F \sqcup F^{\mathsf T} H F \mathrm{I} \sqcup (\mathrm{I} \sqcap \mathrm{L} \widehat{\mathfrak{c}})) \\
&\subset S_{2,i} (U \sqcup F^{\mathsf T} S_1^{\mathsf T} S_1 (H \sqcup \bot_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}) F \sqcup F^{\mathsf T} H F \mathrm{I} \sqcup (\mathrm{I} \sqcap \mathrm{L} \widehat{\mathfrak{c}})) \\
&\subset (U \sqcup F^{\mathsf T} (H \sqcup \bot_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}) F \sqcup F^{\mathsf T} H F \mathrm{I} \sqcup (\mathrm{I} \sqcap \mathrm{L} \widehat{\mathfrak{c}})) \\
&\subset S_{2,i} (U \sqcup F^{\mathsf T} H F \sqcup \bot_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}})
\end{aligned}$$

Über die Einschränkung des rechten Faktors auf $\underline{\mathfrak{c}}$ analog zu oben erhalten wir $U S_{2,i} \sqcap \underline{\mathfrak{c}}^{\mathsf T} \mathrm{L} \subset S_{2,i}(K_0 \sqcup \bot_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}})$und insgesamt Nachfolgertreue: $K_0 S_{2,i} \sqcap \underline{\mathfrak{c}}^{\mathsf T} \mathrm{L} \subset S_{2,i}(K_0 \sqcup \bot_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}})$.

- Bindungstreue: $B_2 K_0 \sqcap K_0 \mathrm{L} \subset K_0 B_2$ erhalten wir aus:

$$\begin{aligned}
B_2 F^{\mathsf T}_{\lceil p \rceil} H F_{\lceil p \rceil} \sqcap \underline{\mathfrak{c}}^{\mathsf T} \mathrm{L} &\subset F^{\mathsf T}_{\lceil p \rceil} B_1 H F_{\lceil p \rceil} \sqcap \underline{\mathfrak{c}}^{\mathsf T} \mathrm{L} && \text{strenge Bindungstreue } F \\
&\subset F^{\mathsf T}_{\lceil p \rceil} (H \mathrm{L} \sqcap B_1 H) F_{\lceil p \rceil} \sqcap \underline{\mathfrak{c}}^{\mathsf T} \mathrm{L} && \mathfrak{a} \text{ bindungsabgeschlossen} \\
&\subset F^{\mathsf T}_{\lceil p \rceil} H B_1 F_{\lceil p \rceil} \sqcap \underline{\mathfrak{c}}^{\mathsf T} \mathrm{L} && \text{Bindungstreue } H \\
&= F^{\mathsf T}_{\lceil p \rceil} H (B_1 F_{\lceil p \rceil} \sqcap \overline{p^{\mathsf T} \mathrm{L}}) \sqcap \underline{\mathfrak{c}}^{\mathsf T} \mathrm{L} && H \text{ erhält } p \\
&\subset F^{\mathsf T}_{\lceil p \rceil} H F_{\lceil p \rceil} B_2 \sqcap \underline{\mathfrak{c}}^{\mathsf T} \mathrm{L} && \text{Bindungstreue } F \\
&\subset K_0 B_2
\end{aligned}$$

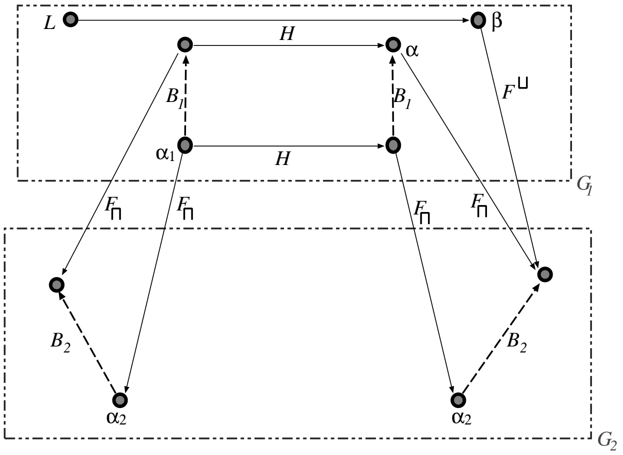
und für $U \in \mathcal{U}_0$:

$$\begin{aligned}
B_2 U \sqcap \underline{\mathfrak{c}}^{\mathsf T} \mathrm{L} &\subset U \mathrm{L} \sqcap B_2 U \sqcap \underline{\mathfrak{c}}^{\mathsf T} \mathrm{L} && \mathrm{L} U^{\mathsf T} \text{ bindungsabgeschlossen} \\
&\subset U B_2 \sqcap \underline{\mathfrak{c}}^{\mathsf T} \mathrm{L} && \text{Bindungstreue } U \\
&\subset K_0 B_2
\end{aligned}$$

Der Nachweis von $B_2 K_0^{\mathsf{T}} \sqcap K_0^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \subset K_0^{\mathsf{T}} B_2$ geht analog. $K_0 B_2 \sqcap \mathrm{L} K_0$ müssen wir noch feiner aufspalten (es gilt ja $\mathrm{L} K_0 \subset \mathrm{L} H F^{\lfloor p \rfloor}$):

$$
\begin{array}{lll}
\multicolumn{2}{l}{F_{\lceil p \rceil}^{\mathsf{T}} H F_{\lceil p \rceil} B_2 \sqcap \underline{d}} & \\
\subset & F_{\lceil p \rceil}^{\mathsf{T}} H B_1 F_{\lceil p \rceil} \sqcap \mathrm{L} H F^{\lfloor p \rfloor} \sqcap \underline{d} & \text{Bindungsbeherrschung} \\
= & F_{\lceil p \rceil}^{\mathsf{T}} (H B_1 \sqcap \mathrm{L} H) F_{\lceil p \rceil} \sqcap \underline{d} & \text{siehe unten (*)} \\
\subset & F_{\lceil p \rceil}^{\mathsf{T}} B_1 H F_{\lceil p \rceil} \sqcap \mathrm{L}\underline{d} & \text{Bindungstreue } H \\
\subset & B_2 F_{\lceil p \rceil}^{\mathsf{T}} H F_{\lceil p \rceil} \sqcap \mathrm{L}\underline{d} & \\
\subset & B_2 K_0 &
\end{array}
$$

(*) Bindende Konstruktoren in der Klammer (α im folgenden Bild) müssen innerhalb $\mathrm{L} H = \underline{b}$ liegen, da sonst wegen der Kapselung von ihnen aus die Zwischenknoten von $\mathrm{L} H F^{\lfloor p \rfloor}$ nach H (im Bild β) erreichbar wären und somit F zyklisch wäre.



Für $U \in \mathcal{U}_0$ ergibt sich problemlos:

$$U B_2 \sqcap \underline{c}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \mathrm{L}\, U \sqcap \mathrm{L}\underline{d} \subset B_2 U \sqcap \mathrm{L}\underline{d} \subset B_2 K_0 \ .$$

Schließlich gilt $U B_2 \sqcap \underline{c}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, U} \sqcap \mathrm{L}\underline{d} = \mathrm{O}$ nach Lemma 7.5.4, und damit erhalten wir insgesamt $K_0 B_2 \sqcap \mathrm{L} K_0 \subset B_2 K_0$. Die entsprechende Forderung für die Transponierte, $K_0^{\mathsf{T}} B_2 \sqcap \mathrm{L} K_0^{\mathsf{T}} \subset B_2 K_0^{\mathsf{T}}$, wird analog gezeigt.

- Variablentreue:

$$
\begin{array}{lll}
\multicolumn{2}{l}{F_{\lceil p \rceil}^{\mathsf{T}} (H \sqcap \mathrm{L} H B_1^{\mathsf{T}}) F_{\lceil p \rceil} W_2 \sqcap \mathrm{L}\underline{d}} & \\
= & F_{\lceil p \rceil}^{\mathsf{T}} (H \sqcap \mathrm{L} H B_1^{\mathsf{T}})\, W_1 F_{\lceil p \rceil} \sqcap \mathrm{L}\underline{d} & \text{strenge Variablentreue } F \\
= & F_{\lceil p \rceil}^{\mathsf{T}} (H W_1 \sqcap \mathrm{L} H) F_{\lceil p \rceil} \sqcap \mathrm{L}\underline{d} & \mathfrak{b} \text{ variablenabgeschlossen} \\
\subset & F_{\lceil p \rceil}^{\mathsf{T}} W_1 H F_{\lceil p \rceil} \sqcap \mathrm{L}\underline{d} & \text{Variablentreue } H \\
\subset & W_2 F_{\lceil p \rceil}^{\mathsf{T}} H F_{\lceil p \rceil} \sqcap \mathrm{L}\underline{d} & \text{Variablentreue } F \\
\subset & W_2 K_0 &
\end{array}
$$

Zunächst haben wir:

$$F_{\lceil p \rceil}^{\mathsf{T}} (H \sqcap \overline{\mathrm{L} H B_1^{\mathsf{T}}}) F_{\lceil p \rceil} \subset F_{\lceil p \rceil}^{\mathsf{T}} W_1 F_{\lceil p \rceil} \subset F_{\lceil p \rceil}^{\mathsf{T}} F_{\lceil p \rceil} W_2 \subset W_2$$

und damit:

$$\begin{aligned}
&F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}(H \sqcap \overline{\mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}}})F_{\lceil p\rceil}\,W_2 \sqcap \mathrm{L}\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}(H \sqcap \overline{\mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}}})F_{\lceil p\rceil} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathrm{d}} \\
&\quad\subset\quad W_2 \sqcap \mathrm{L}\,(F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}HF_{\lceil p\rceil} \sqcap W_2) \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathrm{d}} \\
&\quad\subset\quad W_2\,W_2^{\mathsf{T}}F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}HF_{\lceil p\rceil} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathrm{d}} \\
&\quad\subset\quad W_2\,K_0
\end{aligned}$$

Für intern gebundene Variable gilt:

$$\begin{aligned}
&F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}(H \sqcap \overline{\mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}}})F_{\lceil p\rceil}\,W_2 \sqcap \mathrm{L}\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}(H \sqcap \mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}})F_{\lceil p\rceil} \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathrm{d}} \\
&\subset\quad (F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}(H \sqcap \overline{\mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}}})F_{\lceil p\rceil}\,W_2\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil} \sqcap \mathrm{L}\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}(H \sqcap \mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}}))F_{\lceil p\rceil} \\
&\subset\quad (F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}(H \sqcap \overline{\mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}}})F_{\lceil p\rceil}\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}\,W_1 \sqcap \mathrm{L}\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}H \sqcap \mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}})F_{\lceil p\rceil} && \text{strenge Variablentreue } F \\
&\subset\quad (F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}(H \sqcap \overline{\mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}}})F_{\lceil p\rceil}\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil} \sqcap \mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}})\,W_1\,F_{\lceil p\rceil} && WB = B \\
&\subset\quad (F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}(H \sqcap \overline{\mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}}}) \sqcap \mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}}F_{\lceil p\rceil}\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil})(F_{\lceil p\rceil}\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil} \sqcap \mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}})\,W_1\,F_{\lceil p\rceil} && \text{Dedekind} \\
&\subset\quad (F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}(H \sqcap \overline{\mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}}}) \sqcap \mathrm{L}\,HF_{\lceil p\rceil}\,B_2^{\mathsf{T}}F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil})(F_{\lceil p\rceil}\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil} \sqcap \mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}})\,W_1\,F_{\lceil p\rceil} && \text{Bindungstreue } F \\
&\subset\quad (F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}(H \sqcap \overline{\mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}}}) \sqcap \mathrm{L}\,HF_{\lceil p\rceil}\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}B_1^{\mathsf{T}})(F_{\lceil p\rceil}\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil} \sqcap \mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}})\,W_1\,F_{\lceil p\rceil} && \text{Bindungsbeherrschung} \\
&\subset\quad (F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}(H \sqcap \overline{\mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}}} \sqcap \mathrm{L}\,B_1^{\mathsf{T}})F_{\lceil p\rceil}\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil} \sqcap \mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}})F_{\lceil p\rceil}\,W_2 && \text{strenge Variablentreue } F \\
&\subset\quad (F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}(HB_1 \sqcap \overline{\mathrm{L}\,H})B_1^{\mathsf{T}}F_{\lceil p\rceil}\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil} \sqcap \mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}})F_{\lceil p\rceil}\,W_2 && \text{Lemma 2.2.2} \\
&\subset\quad (F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}(HB_1 \sqcap \overline{\mathrm{L}\,H})F_{\lceil p\rceil}\,B_2^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L}\,HF_{\lceil p\rceil}\,B_2^{\mathsf{T}})\,W_2 && \text{Bindungstreue } F \\
&\subset\quad ((F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}HB_1 \sqcap \overline{\mathrm{L}\,H})F_{\lceil p\rceil} \sqcap \mathrm{L}\,HF_{\lceil p\rceil})\,B_2^{\mathsf{T}}W_2 && \mathrm{L}\,H \text{ bindungsabgeschlossen}
\end{aligned}$$

Der geklammerte Ausdruck ist aber gleich O, da F nichtzyklisch ist und alle Knoten in $\mathrm{L}\,H$ von einem in $\mathrm{L}\,HB_1 \sqcap \overline{\mathrm{L}\,H}$ aus erreichbar sind, und damit verschwindet das Ganze.

Für $U \in \mathcal{U}_0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}(H \sqcap \overline{\mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}}})F_{\lceil p\rceil}\,W_2 \sqcap \mathrm{L}\,U \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathrm{d}} \\
&\subset\quad \langle F \text{ nichtzyklisch, analog zu (*) in der Bindungstreue} \rangle \\
&\qquad F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}(H \sqcap \overline{\mathrm{L}\,H\,B_1^{\mathsf{T}}})F_{\lceil p\rceil}\,W_2 \sqcap \mathrm{L}\,(U \sqcap \overline{\mathrm{L}\,U\,B_2^{\mathsf{T}}}) \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathrm{d}} \\
&\subset\quad W_2 \sqcap \mathrm{L}\,(U \sqcap W_2) \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathrm{d}} \\
&\subset\quad W_2\,U \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathrm{d}} \\
&\subset\quad W_2\,K_0
\end{aligned}$$

Allerdings verschwindet bereits der zweite Ausdruck aufgrund der Variablenbeherrschung, so daß wir $F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}HF_{\lceil p\rceil}\,W_2 \sqcap \mathrm{L}\,U \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathrm{d}} = \mathrm{O}$ erhalten. Bis hierher haben wir nun schon $F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}HF_{\lceil p\rceil}\,W_2 \sqcap \mathrm{L}\,K_0 \subset W_2\,K_0$. Es ist nun noch $UW_2 \sqcap \mathrm{L}\,K_0 \subset W_2\,K_0$ für jedes $U \in \mathcal{U}_0$ zu zeigen. Auch dies zerlegen wir wieder in verschiedene Fälle:

$$\begin{aligned}
UW_2 \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathrm{d}} \sqcap \mathrm{L}\,U \quad &\subset\quad W_2\,U \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathrm{d}} \\
&\subset\quad W_2\,K_0
\end{aligned}$$

$(U \sqcap \overline{\mathrm{L}\,U\,B_2^{\mathsf{T}}})\,W_2 \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathrm{d}} \sqcap \mathrm{L}\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil p\rceil}HF_{\lceil p\rceil} = \mathrm{O}$ folgt wieder aus der Variablenbeherrschung.

Für $V \in \mathcal{U}_0$ gilt:

$$\begin{aligned}(U \sqcap \overline{\mathrm{L}\, U B_2^{\mathsf{T}}})\, W_2 \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathsf{d}} \sqcap \mathrm{L}\, V \sqcap \overline{\mathrm{L}\, V B_2^{\mathsf{T}}} \quad &\subset \quad W_2 \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathsf{d}} \sqcap \mathrm{L}(V \sqcap W_2)\\ &\subset \quad W_2 V \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathsf{d}} \subset W_2 K_0\end{aligned}$$

Für den letzten Fall gilt $(U \sqcap \overline{\mathrm{L}\, U B_2^{\mathsf{T}}})\, W_2 \sqcap \mathrm{L}\underline{\mathsf{d}} \sqcap \mathrm{L}\, V \sqcap \mathrm{L}\, V B_2^{\mathsf{T}} = \mathrm{O}$, da andernfalls der Binder einer in $\mathrm{L}\, U$ freien Variablen in der Selbstkapselungsgrenze von d und damit außerhalb von $\mathrm{L}\underline{\mathsf{d}}$ läge.

- Erhaltung nicht intern gebundener Variablen: Zunächst können wir abschätzen:

$$\begin{aligned}B_1\underline{\mathsf{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap F_{\lceil\overline{p}\rceil}\underline{\mathsf{c}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \quad &\subset \quad F_{\lceil\overline{p}\rceil} B_2 F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}\underline{\mathsf{a}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap F_{\lceil\overline{p}\rceil}\underline{\mathsf{c}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} && F_{\lceil\overline{p}\rceil}\underline{\mathsf{c}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \subset \overline{p^{\mathsf{T}}\mathrm{L}}, \text{ Bindungstreue } F\\ &= \quad F_{\lceil\overline{p}\rceil}(B_2 F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}\underline{\mathsf{a}}^{\mathsf{T}} \sqcap \underline{\mathsf{c}}^{\mathsf{T}})\mathrm{L}\\ &\subset \quad F_{\lceil\overline{p}\rceil} B_2 (F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}\underline{\mathsf{a}}^{\mathsf{T}} \sqcap B_2^{\mathsf{T}}\underline{\mathsf{c}}^{\mathsf{T}})\mathrm{L} && \text{Modalregel}\\ &\subset \quad F_{\lceil\overline{p}\rceil} B_2 K_0 \mathrm{L} && \text{Lemma 7.5.6}\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}&\underline{\mathsf{c}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil} H F_{\lceil\overline{p}\rceil} \sqcap \overline{B_2 K_0 \mathrm{L}} \sqcap W_2\mathrm{L} \ =\\ &\quad = \quad F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}(H \sqcap F_{\lceil\overline{p}\rceil}(\underline{\mathsf{c}}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \overline{B_2 K_0 \mathrm{L}}) \sqcap F W_2 \mathrm{L}) F_{\lceil\overline{p}\rceil}\\ &\quad \subset \quad F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil}(H \sqcap \overline{B_1 H \mathrm{L}} \sqcap W_1 \mathrm{L}) F_{\lceil\overline{p}\rceil} && \text{Abschätzung von eben}\\ &\quad \subset \quad F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil} W_1 F_{\lceil\overline{p}\rceil} && \text{E.n.i.g.V. } H\\ &\quad \subset \quad F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p}\rceil} F_{\lceil\overline{p}\rceil} W_2 && \text{Variablentreue } F\\ &\quad \subset \quad W_2\end{aligned}$$

Für $U \in \mathcal{U}_0$ gilt:

$$U \sqcap \overline{B_2 K_0 \mathrm{L}} \sqcap W_2 \mathrm{L} \subset U \sqcap \overline{B_2 U \mathrm{L}} \sqcap W_2 \mathrm{L} \subset W_2$$

- Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen,

$$K_0^{\mathsf{T}} W_2 K_0 \sqcap \mathrm{L}\, K_0 B_2^{\mathsf{T}} \sqcap B_2 B_2^{\mathsf{T}} \subset W_2 \ ,$$

  ist wieder durch eine ausgiebige Fallunterscheidung zu beweisen.

Damit ist gezeigt, daß K_0 wieder eine Korrespondenz ist. □

Da die Bedingung zu den unteren Grenzen in diesem Lemma sich nicht ohne weiteres auf die Komposition zweier Homomorphismen überträgt, benötigen wir wieder „externe" Bedingungen, um diese sicherzustellen; wir erhalten daher entsprechende Einschränkungen der Kategorien der Einpassungen aus Satz 7.6.12:

Satz 8.6.4 Folgende **Kategorien von Homomorphismen** existieren:

- v_s-zulässige Graphen mit höchstens einstelligen Schemavariablen und v_s-definitiven, nichtzyklischen und abschlußinjektiven ($F^{\lfloor p \rfloor}$ injektiv) Homomorphismen,
- v_s-zulässige kreisfreie Graphen mit höchstens einstelligen Schemavariablen und abschlußinjektiven Homomorphismen,
- v_s-zulässige Graphen mit höchstens nullstelligen Schemavariablen und v_s-definitiven nichtzyklischen Homomorphismen,
- v_s-zulässige kreisfreie Graphen mit höchstens nullstelligen Schemavariablen und beliebigen Homomorphismen,

- CRS-Patterns mit v_s-definitiven nichtzyklischen Homomorphismen und
- kreisfreie CRS-Patterns mit beliebigen Homomorphismen. □

Für die CRS-Patterns folgt die Bedingung zur unteren Grenze aus der Variablenbeherrschung.

Für die Termgraphersetzung allerdings wird, wie sich in [Kah96] herausstellt, gar keine Kategorie von Homomorphismen benötigt, so daß in der Anwendung auf die Termgraphersetzung die Einschränkungen bei der Komposition überhaupt nicht zum Tragen kommen.

8.7 Auflösung und Bildausgang

Für die Komposition von Einpassungen mußten wir uns auf einstellige Schemavariable festlegen — in gewissen Situationen ist es nützlich, diese Einschränkung fallen zu lassen.

Ein Begriff, der dann ins Blickfeld rückt, ist die *Auflösung* von Einpassungen bezüglich Variablen. Erst bei mehrstelligen Schemavariablen wird die Auflösung relevant, und besagt im wesentlichen, welche ausgehenden Kanten in einer bestimmten Situation unterscheidbar sind. Wichtig wird dies bei Transformationen: Anwendung von Ersetzungsregeln wird mehrdeutig, wenn das Matching der linken Seite eine gröbere Auflösung hat als die entsprechenden Instantiierungen der rechten Seite.

Definition 8.7.1 (Auflösung) Es seien zwei Graphen G_1 und G_2, ein Variablenvektor $p : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_1$ zu G_1 und eine p-Einpassung F von G_1 in G_2 gegeben. Sei nun $x : \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{V}_1$ mit $x \subset p$ ein Variablenknoten. Dann ist die *Auflösung von F bezüglich des Variablenknotens x*, $\mathcal{A}_{F,x} : \mathcal{E} \leftrightarrow \mathcal{E}$, die folgendermaßen definierte partielle Äquivalenzrelation zwischen Kantenmarkierungen:

$$\mathcal{A}_{F,x} := Q_{1,x} F F^{\mathrm{T}} Q_{1,x}^{\mathrm{T}}$$

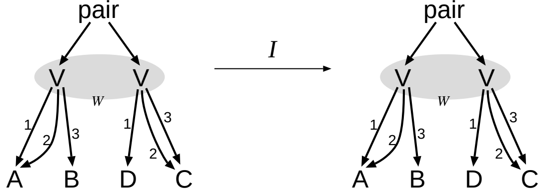
und die *Auflösung von F bezüglich der Variablen xW_1* ist definiert als:

$$\mathcal{A}_{F,xW_1} := \bigsqcap \{ y : \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{V}_1 \mid y \subset xW_1 \bullet \mathcal{A}_{F,y} \} \ .$$

Ferner bezeichnen wir die Auflösung von I (aufgefaßt als p-Einpassung von G_1 in G_1) bezüglich v auch als *Auflösung von v in dem Graphen G_1*.

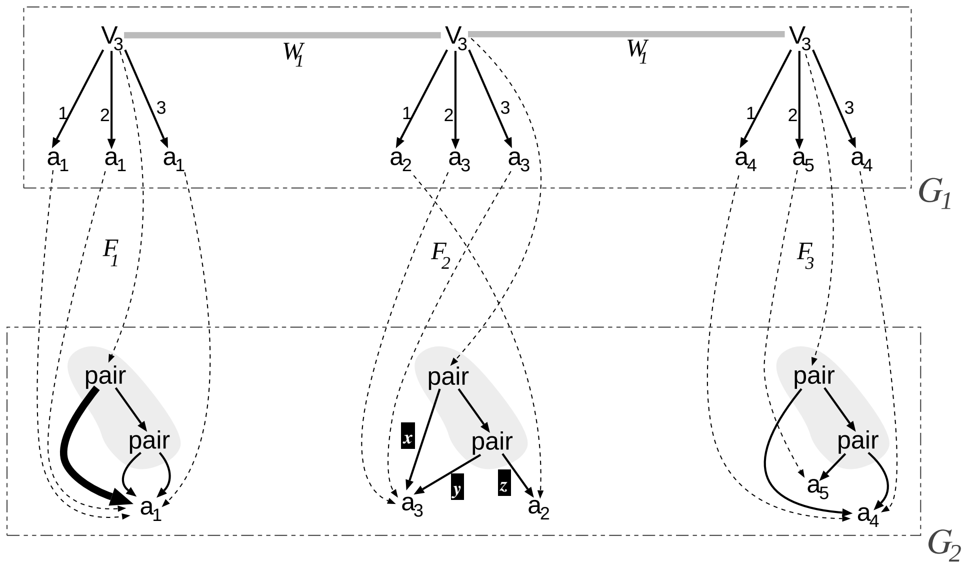
F heißt *scharf auflösend* bezüglich eines Variablenvektors $v \subset p$, wenn für jeden Schemavariablenknoten $x \subset x$ die Auflösung von F bezüglich der Variablen xW_1 in I enthalten ist, und F heißt einfach *scharf auflösend*, wenn F scharf auflösend bezüglich p ist. □

Im folgenden Bild sei x einer der beiden mit V markierten Urbildknoten; es gebe nur die drei angegebenen Kantenmarkierungen. Dann ist die Auflösung von xW die Identitätsrelation I, obwohl die von x selbst echt gröber ist.



Für Instantiierungen von CRS-Patterns ist die scharfe Auflösung durch die Forderung, daß die Nachfolger jeder Schemavariablen verschiedene gebundene Variable sein müssen, von vornherein gewährleistet.

Auch bei scharfer Auflösung stellt sich das Problem, welcher der von der Variablen im Urbild ausgehenden Kanten eine das Bild der Variablen verlassende Kante zuzuordnen ist. Man betrachte dazu das folgende Bild und vergewissere sich, daß $F = F_1 \sqcup F_2 \sqcup F_3$ tatsächlich ein p-Homomorphismus zwischen G_1 und G_2 ist, wobei p aus den drei dreistelligen Variablenknoten besteht. Die invertierten Marken x, y und z im mittleren Teil von G_2 sind zunächst zu ignorieren.



Die Frage ist, welcher Kantenmarkierung im Urbild die hervorgehobene Kante im linken Teil von G_2 entspricht. F_1 allein ist dies offensichtlich überhaupt nicht anzusehen. Beim Hinzuziehen von F_2 bleibt immer noch die Auswahl zwischen „2“ und „3“; zieht man alternativ F_3 heran, so bleibt die Auswahl zwischen „1“ und „3“. Erst durch Betrachtung von ganz F erhält man „3“ als Schnitt der Einzelergebnisse. Insgesamt ergibt sich als Zuordnung der die Bildintervalle verlassenden Kanten zu den Urbildkanten: $\{x \mapsto 3, y \mapsto 2, z \mapsto 1\}$.

Dieses Verfahren formalisieren wir:

Definition 8.7.2 (Bildausgang) [←146, 162] Sei F ein p-Homomorphismus von G_1 in G_2, und sei $x : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ mit $x \subset p$ ein Variablenknoten im Urbild. Dann definieren wir für eine Kantenmarkierung $i : \mathbb{1} \to \mathcal{E}$ den *Bildausgang* $\mathcal{I}_{F,i}(x) : \mathcal{V}_2 \leftrightarrow \mathcal{E}$ mit:

$$\mathcal{I}_{F,i}(x) = \bigsqcap\{w : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1 \mid w \subset xW_1 \bullet \mathcal{C}_F(x,w)S_{2,i}F^{\mathsf{T}}Q^{\mathsf{T}}_{1,w}\}$$

Es gilt damit $j \subset y\mathcal{I}_{F,i}(x)$ genau dann, wenn der Kante $\langle\!\!\langle\, y, i \,\langle\!\!\langle$ als Urbildkante (ggf. unter anderem) $\langle\!\!\langle\, x, j \,\langle\!\!\langle$ zugeordnet werden kann.

Durch Abstraktion von i und x können wir eine direkte Zuordnung $\mathcal{I}_F : \mathcal{V}_2 \times \mathcal{E} \leftrightarrow \mathcal{V}_1 \times \mathcal{E}$ von Bildkanten zu Urbildkanten erhalten:

$$\mathcal{I}_F := (\langle\!\!\langle\, (F^{\lfloor p \rfloor})^{\mathsf{T}}, \mathrm{I} \,\langle\!\!\langle \| \mathrm{I}) \left(\overline{\overline{(\mathcal{C}_F \| \mathrm{I})\underline{assPA}\rangle\!\!\rangle\, \pi^{\mathsf{T}}, \underline{PAass}\rangle\!\!\rangle\, S_2 F^{\mathsf{T}} S_1^{\mathsf{T}}, \rho^{\mathsf{T}} \,\rangle\!\!\rangle \,\rangle\!\!\rangle\rangle\!\!\rangle\, \mathrm{I}, \mathrm{L} \,\rangle\!\!\rangle \sqcup \pi\pi\overline{W_1}}\mathrm{L}} \sqcap (\pi \| \rho)\right)$$

Es gilt $\mathcal{I}_{F,i}(x) = \langle\!\!\langle\, \mathrm{I}, \mathrm{L}i \,\langle\!\!\langle \mathcal{I}_F \rangle\!\!\rangle\, x^{\mathsf{T}}\mathrm{L}, \mathrm{I} \,\rangle\!\!\rangle$. □

$\mathcal{I}_{F,i}(x)$ ist eindeutig, falls die Auflösung von F bezüglich xW_1 scharf ist. Weiter gilt:

Lemma 8.7.3 Der Bildausgang zweier Knoten $x, y : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_1$ der gleichen Variablen, also mit $y \subset xW_1$, ist gleich: $y \subset xW_1 \Rightarrow \mathcal{I}_{F,i}(y) = \mathcal{I}_{F,i}(x)$. □

Wenn F gerüstüberschneidungsfrei ist, dann ist $\mathcal{I}_F$ eindeutig.

Der Bildausgang wird bei der Konstruktion des Ersetzungsschrittes benötigt werden, da im allgemeinen nur so festgestellt werden kann, wohin die aus dem Bild einer Schemavariablen ausgehenden Kanten nach der Ersetzung umzulenken sind.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben nun die in Kapitel 3 eingeführte neue Klasse von Termgraphen mit gebundenen Variablen in verschiedene Kategorien eingeordnet. Zunächst haben wir die einfachen Einbettungskategorien erhalten, in denen schon die aus der Literatur geläufigen Kategorien von Termgraphen ohne gebundene Variable enthalten sind. Erste qualitativ anspruchsvollere Erweiterung war die Kategorie der Überdeckungen.

Schon für verschiedene Betrachtungen im Zusammenhang mit Einbettungen war ein angemessener Begriff für die Bilder von Metavariablen nötig; unser Intervallbegriff erwies sich hier als flexibler Ausgangspunkt. Der Problematik von Kreisen in ihrem Einfluß auf die Bilder von Metavariablen haben wir durch die innovative Einführung von Selbstkapselungsgrenzen und Abschnitten wirksam begegnen können.

Wirkliches Neuland betreten haben wir mit der Kategorie der Einpassungen, die „Einfangen von Variablen“ aus den Bildern der Schemavariablen verbieten. Die elementare Betrachtung von Variablenidentität und -Bindung erwies sich hier als disziplinierend und nützlich zugleich, so daß wir das Wechselspiel zwischen Instantiierung von Schemavariablen und Variablenbindung gründlich durchleuchten und zu einer für Termgraphen angemessenen Formulierung des Verbots des „Einfangens von Variablen“ gelangen konnten. Auch wenn wir für die Erhaltung der Einpassungseigenschaften unter Komposition einige einschneidende Einschränkungen vornehmen mußten, so haben wir doch wertvolle neue Erkenntnisse über das Zusammenspiel von Variablenbindung und Variablenidentität mit Sharing und mit Kreisen gewinnen können.

Die für die Beziehungen zwischen den Bildern paralleler Schemavariablen definierten Korrespondenzen zwischen Intervallen bzw. Abschnitten, die in gewisser Weise eine partielle Entsprechung zu den in Kapitel 4 diskutierten Identifizierungen sind, brachten die Theorie der Intervalle und Abschnitte sozusagen zu ihrem natürlichen Abschluß, da wir hierdurch in einem festen Graphen zusätzlich zu dem Verband der Identifizierungen noch eine Kategorie von Intervallen bzw. Abschnitten mit Korrespondenzen erhielten.

Unsere Homomorphismen, Einpassungen mit Korrespondenzen zwischen den Bildern paralleler Schemavariablen, lassen eine entsprechende Einschränkung der Kategorie der Einpassungen zu, so daß sich dieser letzte Aspekt nahtlos in das zuvor gewonnene Bild einfügt und eine saubere Behandlung paralleler Variablen ermöglicht.

Obwohl wir hier fast nur totale Funktionen beandelt haben, waren es doch Aspekte der Partialität, die uns immer wieder die größte Sorgfalt abverlangt haben. Schon die Einbettungsbedingungen sind in für Homomorphiebedingungen ungewöhnlicher Formulierung dargeboten; Durchbrechungen der Erreichbarkeit im Bild durch Selbstkapselungsgrenzen kostete viel Mühe bei Beweisen zu Einpassungen, und die ohnehin partiellen Korresponenzen mußten sich nach oben und nach unten hin absichern.

Dennoch stehen wir damit wohl noch nicht am Ende einer logischen Entwicklung. Die Einschränkung auf höchstens einstellige Schemavariable in den Kategorien der Einpassungen und Homomorphismen geht entscheidend auf die Bedingung der Kohärenz zurück, die wiederum in engem Zusammenhang mit der Totalität der den Einbettungen, Einpassungen und Homomorphismen zugrundeliegenden Funktionen steht.

Die auf Seite 6 vorgestellte Termgraphregel für die β-Reduktion entspricht in dem aus unseren Kategorien hervorgehenden (und im Anhang kurz vorgestellten) algebraischen Ansatz zur Termgraphersetzung nur der β-Regel des λI-Kalküls von Church — für β-Redexe, bei denen die gebundene Variable im Rumpf der λ-Abstraktion nicht vorkommt, ist eine getrennte Regel (mit zwei nullstelligen Schemavariablen) nötig.

Um direkt den λK-Kalkül, also den heute üblichen λ-Kalkül, implementieren zu können (und analoges gilt für alle CRS-Regeln) müssen wir auf Totalität der den Homomorphismen zugrundeliegenden Funktionen verzichten und damit auch auf die Kohärenz (zumindest in ihrer hier vorgestellten Form). Diese partiellen Funktionen entsprächen damit aber noch mitnichten den partiellen Morphismen z.B. des Ersetzungsansatzes des einfachen Pushouts!

Eine weitere Besonderheit unseres Ansatzes im Vergleich mit allgemeiner Graphersetzung ist der Verzicht auf selbständige Kanten, der allerdings in der gesamten Literatur zur Termgraphersetzung sehr weit verbreitet ist. Bereits auf Seite 68 haben wir einen Fall gesehen, wo dies Folgen hat, die nicht ganz der ursprünglichen Intuition entsprechen. In [Kah96] zeigt sich, daß bei Regelanwendungen dank der Selbstkapselungsgrenzen innerhalb von Kreisen, auf denen eine die Anwendungsstelle kapselnde Bindung liegt, meist direkt ersetzt werden kann, während andere Kreise aufgerollt werden. Letzteres entspricht zwar einigen Ansätzen zur Reduktion zyklischer Graphen in der Literatur [Ban94, IVZ94], scheint aber im Zusammenhang mit ersterem eventuell noch unbefriedigend. Meiner Ansicht nach dürfte eine selbständige Behandlung der Kanten zusammen mit einer Erweiterung des Graphbegriffes um eine Auszeichnung einer kapselungsfreien Basis nötig sein, um die in letzter Zeit aufgekommene *infinitäre Ersetzung* [AK94, CD95] auch auf kapselungsfreien Kreisen mittels unseres algebraischen Ansatzes beschreiben zu können.

Anhang

Konstruktionen für die Termgraphersetzung

Aufbauend auf den bisher erarbeiteten Kategorien von Termgraphen mit gebundenen Variablen diskutieren wir in [Kah96, Kapitel 5], wie der algebraische Ansatz der Termgraphersetzung auf unsere Termgraphen zu übertragen sei. In [Kah96, Kapitel 6] führen wir, von dieser Motivation ausgehend, ganz allgemein eine Erweiterung des algebraische Ersetzungsansatzes, den **fibrierten Ansatz** zu algebraischer Ersetzung, ein. Dieser kann als Modifikation des doppelten Pushouts verstanden werden, wobei die Konstruktion des Pushout-Komplements durch eine allgemeine Wirtskonstruktion ersetzt wird und der rechte Pushout durch einen „Pseudo-Pushout“. [Kah96, Kapitel 7] beschäftigt sich mit der konkreten Anpassung des fibrierten Ansatzes an unsere Termgraphen. Aus Platzgründen werden dort die beiden zentralen Beweise ausgelassen; wir führen sie nun hier auf, auch gestützt auf die ausführlichere Darstellung der Termgraphkategorien im Hauptteil dieses Berichtes.

In Anhang A stellen wir zunächst, nach einem kurzen Abriß des fibrierten Ansatzes, ohne jedoch weiter auf die konkreten Motivationen einzugehen, die für die fibrierte Termgraphersetzung nötigen Kategorien vor. Auf den sich hieraus ergebenden Voraussetzungen führen wir in Anhang B die Wirtskonstruktion durch. Analog widmen wir Anhang C der Konstruktion des Pseudo-Pushouts.

Die Beweise hier im Anhang sind nicht mehr im gleichen Detaillierungsgrad angegeben wie im Hauptteil des Berichtes. So begnügen wir uns gelegentlich mit Hinweisen auf zentrale Eigenschaften, die den einen oder anderen Beweis ermöglichen, und auch die scheinbar genau vorgeführten Beweise stützen sich oft auf komplexe Zwischenschritte, deren eingehende Erläuterung ausgelassen ist. Ohne diese Einschränkungen wäre dieser Anhang zu einem noch größeren Umfang als der Hauptteil des Berichtes aufgebläht worden.

Dennoch geben die angeführten Details wohl einen guten Einblick in die Zusammenhänge und in den Aufwand, der bei so allgemeiner Behandlung von Termgraphen mit gebundenen Variablen für anderswo einfache Ergebnisse zu betreiben ist.

Anhang A

Kategorien für die fibrierte Ersetzung

Wir bereiten uns hier darauf vor, die im Hauptteil des Berichtes erarbeiteten Kategorien von Termgraphen mit gebundenen Variablen für die algebraische Termgraphersetzung einzusetzen. Hierfür geben wir in Abschnitt A.1 zunächst einen kurzen Überblick über den konventionellen Ansatz des doppelten Pushouts, bevor wir in groben Zügen unsere Erweiterung zum fibrierten Ansatz skizzieren. Dabei erwähnen wir die kategorischen Details nur, ohne weiter auf ihre Definitionen einzugehen — für eine lesbare Einführung in Kategorientheorie, insbesondere was auch Fibrationen betrifft, siehe [BW90]; für die Details des fibrierten Ansatzes siehe [Kah96, Kapitel 6]. Die einzigen nicht primitiven Begriffe, die im weiteren Fortgang noch benötigt werden, sind „Matching“, „Matchingpfeil“, „Wirtskonstruktion“ und „Pseudo-Pushout“ sowie die Unterscheidung in „reelle“ und „virtuelle“ Objekte und Pfeile.

Im Abschnitt A.2 instantiieren wir den fibrierten Ansatz für die Ersetzung unserer Termgraphen; d.h. wir definieren die benötigten Kategorien. Auf diese Definitionen bauen dann die folgenden zwei Kapitel auf, in denen die Wohldefiniertheit des fibrierten Ansatzes für die hier selektierten Kategorien gezeigt wird.

A.1 Der fibrierte Ansatz zu algebraischer Ersetzung

Nachdem es schon seit längerem [PR69, Sch70] Graphgrammatiken zur Beschreibung verschiedener Aspekte von Graphtransformationen gab, wurde 1973 in [EPS73] der **algebraische Ansatz** zur Graphersetzung eingeführt und erlangte vor allem mit [Ehr] allgemeine Beachtung. In diesem Ansatz geht man von einer Kategorie von Graphen mit entsprechenden Homomorphismen aus und betrachtet dann als Mittel zur Informationsübertragung die Pushout-Konstruktion der Kategorientheorie.

Für kategorientheoretische Argumentation werden wir folgende Notation einsetzen: Zu einer Kategorie $\mathcal{C}$ wird ein Objekt A von $\mathcal{C}$ durch „$A : \mathcal{C}$“ eingeführt, ein Pfeil (auch Morphismus genannt) f von $\mathcal{C}$ vom Objekt A zum Objekt B durch „$f : A \xrightarrow{\mathcal{C}} B$“, und für zwei Pfeile $f : A \xrightarrow{\mathcal{C}} B$ und $g : B \xrightarrow{\mathcal{C}} C$ schreiben wir wie [CEL+95] „$f \fatsemi g$“ für ihre Komposition. (Man beachte die Reihenfolge der Pfeile! Wir orientieren uns hier an der im Rest der Arbeit verwendeten relationenalgebraischen Komposition.) Für jedes Objekt $A : \mathcal{C}$ ist der Pfeil $\mathrm{id}_{A:\mathcal{C}} : A \xrightarrow{\mathcal{C}} A$ die Identität zu A. Wir geben hier noch eine Definition für Pushouts wieder:

Definition A.1.1 Seien zwei Pfeile $d : L \xrightarrow{\mathcal{C}} R$ und $g : L \xrightarrow{\mathcal{C}} G$ zwischen drei Objekten einer Kategorie $\mathcal{C}$ gegeben. Ein **Pushout** für d und g ist ein Objekt H zusammen mit zwei Pfeilen $e : G \xrightarrow{\mathcal{C}} H$ und $h : R \xrightarrow{\mathcal{C}} H$, so daß $d \fatsemi h = g \fatsemi e$ und für jedes Objekt H' mit Pfeilen $e' : G \xrightarrow{\mathcal{C}} H'$ und $h' : R \xrightarrow{\mathcal{C}} H'$, die ebenfalls $d \fatsemi h' = g \fatsemi e'$ erfüllen, gibt es einen eindeutig bestimmten Pfeil $\varphi : H \xrightarrow{\mathcal{C}} H'$ mit $h \fatsemi \varphi = h'$ and $e \fatsemi \varphi = e'$. □

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g"'] & R \arrow[d, "h"] \arrow[ddr, "h'"] & \\
G \arrow[r, "e"] \arrow[drr, "e'"'] & H \arrow[dr, dotted, "\varphi"] & \\
& & H'
\end{tikzcd}$$

Ehrigs ursprünglicher Ansatz des **doppelten Pushouts** [Ehr, EKL] nutzt diese kategorientheoretische Konstruktion, um einen Ersetzungsschritt gemäß einer Regel in zwei Teilschritten, dem Löschen nicht mehr benötigter Elemente eines Graphen und dem Hinzufügen neuer Elemente, in folgendem aus zwei Pushout-Quadraten bestehendem Schema zu modellieren:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d] & K \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[d] \\ A & H \arrow[l] \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Dabei ist L die *linke Seite* der *Pushout-Regel*, R die *rechte Seite* und K der *Klebegraph* der Pushout-Regel. Weiter sind A der *Anwendungsgraph*, H der *Wirtsgraph* und B der *Ergebnisgraph*. Bei gegebener Pushout-Regel und gegebenem Anwendungsgraphen ist nun hier die Frage, ob ein Wirtsgraph H, also ein *Pushout-Komplement* existiert. Man betrachtet hierzu folgende beide Mengen:

DANGLING: die Menge der Knoten in L, deren Bilder in A Vorgänger außerhalb des Bildes von L haben.

IDENTIFICATION: die Menge der Knoten in L, die in A identifiziert werden.

Damit wird die sogenannte *Klebebedingung (gluing condition)* formuliert:

$$\mathit{DANGLING} \cup \mathit{IDENTIFICATION} \subseteq K_L$$

d.h. Knoten aus diesen beiden Mengen müssen Urbilder in K besitzen (K_L sei die Menge der Bilder der Knoten von K in L). Der Homomorphismus von K nach L wird meist als Monomorphismus ($\widehat{=}$ injektiv) vorausgesetzt. In vielen Graphkategorien ist die Existenz des Pushout-Komplements H äquivalent zur Erfüllung dieser Klebebedingung.

Die homogene Betrachtungsweise des Ansatzes des doppelten Pushouts, in der alle Pfeile derselben Kategorie entstammen, erweist sich als *unzulänglich* für die Behandlung unserer Termgraphen. Es zeigt sich, daß Metavariable in „horizontalen" Pfeilen, unsere Platzhalter, eine ganz andere Funktion zu erfüllen haben als die in den Regelseiten vorkommenden Metavariablen, unsere Schemavariablen, in den „vertikalen" Pfeilen. Konkret bieten sich in unserem Kontext horizontal Überdeckungen an und vertikal Homomorphismen. Abstrakt führt dies zu der nun folgenden Beschreibung.

Für den *fibrierten Ansatz* fordert man innerhalb einer Kategorie $\mathcal{E}$ für diese horizontalen Pfeile Zugehörigkeit zu einer weiten Teilkategorie $\mathcal{E}_\mathrm{H}$ und für diese vertikalen Pfeile Zugehörigkeit zu einer Pfeilklasse $\mathcal{H}$. Man benötigt noch eine weitere weite Teilkategorie $\mathcal{E}_\mathrm{V}$ von $\mathcal{E}$, die alle Pfeile aus $\mathcal{H}$ und die eindeutig bestimmten Pfeile der universellen Bedingung zum Pushout enthalten muß. Nichtidentische Pfeile aus $\mathcal{E}_\mathrm{H}$ heißen *horizontal*, solche aus $\mathcal{E}_\mathrm{V}$ *vertikal* und Pfeile aus $\mathcal{H}$ schließlich **Matchings**.

Weiter ist eine Teilkategorie $\mathcal{T}$ von $\mathcal{E}_\mathrm{H}$ ausgezeichnet, die **Patternkategorie**.

Die Kategorie $\mathcal{M}$ aller Matchings ist die Einschränkung der Pfeilkategorie zu $\mathcal{E}$ derart, daß nur Matchings Objekte sind und Pfeile zwischen zwei Matchings $\underline{g : L \to G}$ und $\underline{h : R \to H}$ Paare $\langle d, e\rangle$ von Pfeilen aus $\mathcal{E}_\mathrm{H}$ sind, wobei $d : L \xrightarrow{\mathcal{T}} R$ ein Pfeil der Patternkategorie sein muß, $e : G \xrightarrow{\mathcal{E}} H$ und $d \mathbin{;} h = g \mathbin{;} e$.

Falls für $\langle d, e\rangle : g \xrightarrow{\mathcal{M}} h$ der Pfeil e aus $\mathcal{E}_\mathrm{H}$ stammt, schreiben wir auch $\langle d, e\rangle : g \xrightarrow{\mathcal{M}_\mathrm{H}} h$, falls aus $\mathcal{E}_\mathrm{V}$, $\langle d, e\rangle : h \xrightarrow{\mathcal{M}_\mathrm{V}} h$. Offensichtlich entstehen aus $\mathcal{M}$ durch entsprechende Einschränkung der Pfeile zwei Teilkategorien $\mathcal{M}_\mathrm{H}$ und $\mathcal{M}_\mathrm{V}$. Im folgenden sei $\mathcal{M}_\equiv$, genannt die **horizontale Matchingkategorie**, eine Teilkategorie von $\mathcal{M}_\mathrm{H}$. Wir werden die folgenden Betrachtungen auf $\mathcal{M}_\equiv$ anstelle von $\mathcal{M}_\mathrm{H}$ einschränken, bzw. sogar auf Teilkategorien von $\mathcal{M}_\equiv$, da wir durch die Auswahl von $\mathcal{M}_\equiv$ spezielle Bedürfnisse der zugrundeliegenden Kategorie befriedigen können, und zwar auch dort, wo dies allein durch Einschränkung von $\mathcal{E}_\mathrm{H}$ nicht sinnvoll zu erreichen ist.

Auf diesen Gundlagen aufbauend können wir bereits die zwei Konstruktionen definieren, die für die Zwecke dieses Berichtes das Wesen des fibrierten Ansatzes ausmachen. Zunächst führen wir für die rechte Seite des Ersetzungsschrittes den Pseudo-Pushout als Verallgemeinerung des Pushouts ein, wobei wir statt von $\mathcal{M}_{\equiv}$ von einer Teilkategorie $\mathcal{M}_{>}$ ausgehen.

Definition A.1.2 Ein **Pseudo-Pushout** zu einem Matching $\underline{g : L \to G}$ zusammen mit einem Patternpfeil $d : L \xrightarrow{\mathcal{T}} R$ ist ein Matching $\underline{h : R \to H}$ zusammen mit einem Pfeil $e : G \xrightarrow{\mathcal{E}_{\mathrm{H}}} H$, so daß $\langle d, e\rangle : g \xrightarrow{\mathcal{M}_{>}} h$ ein Matchingpfeil aus $\mathcal{M}_{>}$ ist (daraus folgt $d \mathbin{;} h = g \mathbin{;} e$) und es für jeden Matchingpfeil $\langle d, e'\rangle : g \xrightarrow{\mathcal{M}_{>}} \underline{h' : R \to H'}$ aus $\mathcal{M}_{>}$ einen eindeutig bestimmten Pfeil $\varphi : H \xrightarrow{\mathcal{E}_{\mathrm{V}}} H'$ gibt mit $h \mathbin{;} \varphi = h'$ und $e \mathbin{;} \varphi = e'$.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g"'] & R \arrow[d, "h"] \arrow[ddr, "h'"] & \\
G \arrow[r, "e"] \arrow[drr, "e'"'] & H \arrow[dr, dotted, "\varphi"] & \\
 & & H'
\end{tikzcd}$$

□

Dual hierzu, nur unter Verwendung einer von $\mathcal{M}_{>}$ unabhängigen Teilkategorie $\mathcal{M}_{<}$ von $\mathcal{M}_{\equiv}$, führen wir für die linke Seite des Ersetzungsschrittes die Wirtskonstruktion ein; sie ist quasi eine Verallgemeinerung der Pushout-Komplement-Konstruktion, die jedoch nicht dual zum Pushout ist.

Definition A.1.3 Eine *Wirtskonstruktion* für ein Matching $\underline{h : R \to H}$ und einen Pfeil $d : L \xrightarrow{\mathcal{T}} R$ von $\mathcal{T}$ ist ein Matching $\underline{g : L \to G}$ zusammen mit einem Pfeil $e : G \xrightarrow{\mathcal{E}_{\mathrm{H}}} H$ von $\mathcal{E}_{\mathrm{H}}$, so daß $\langle d, e\rangle : g \xrightarrow{\mathcal{M}_{<}} h$ ein Matchingpfeil aus $\mathcal{M}_{<}$ ist, $g \mathbin{;} e = d \mathbin{;} h$ gilt und für jeden Matchingpfeil aus $\mathcal{M}_{<}$ $\langle d, e'\rangle : \underline{g' : L \to G'} \xrightarrow{\mathcal{M}_{<}} h$ ein eindeutig bestimmter Pfeil $\varphi : G' \xrightarrow{\mathcal{E}_{\mathrm{V}}} G$ existiert mit $\varphi \mathbin{;} e = e'$ und $g' \mathbin{;} \varphi = g$. □

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[d, "h"'] & L \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "g"] \arrow[ddr, "g'"] & \\
H & G \arrow[l, "e"'] & \\
 & & G' \arrow[ull, "e'"] \arrow[ul, dotted, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Im Ersetzungsschritt des doppelten Pushouts ersetzen wir den linken Pushout durch eine Wirtskonstruktion und den rechten durch einen Pseudo-Pushout, um so einen *fibrierten Ersetzungsschritt* zu erhalten.

Natürlich scheint soweit der Name „fibrierter Ansatz“ noch reichlich unmotiviert. Um den Übergang vorzubereiten, betrachten wir einen *separierten Kontext*, der von einer Aufspaltung der Objekte von $\mathcal{E}$ in die zwei Klassen der **virtuellen** und der **reellen** Objekte ausgeht, so daß $\mathcal{E}_{\mathrm{H}}$ *bipartit* ist in dem Sinne, daß alle nichtidentischen Pfeile als Quelle ein virtuelles Objekt und als Ziel ein reelles Objekt haben.

Definiert man nun den **Patternfunktor** $\mathcal{P}$ von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{T}$, der jedes Matching auf seine Quelle abbildet und Matchingpfeile $\langle d, e\rangle$ auf d (den Domainfunktor der Pfeilkategorie), so gilt im separierten Kontext, wie in [Kah96, Kapitel 6] gezeigt wird, daß Existenz von Wirtskonstruktionen äquivalent dazu ist, daß $\mathcal{P}$ eingeschränkt auf eine durch $\mathcal{M}_{<}$ induzierte Teilkategorie $\overline{\mathcal{M}_{<}}$ von $\mathcal{M}$ eine gespaltene Fibration ist, und Existenz von Pseudo-Pushouts dazu, daß $\mathcal{P}$ eingeschränkt auf $\overline{\mathcal{M}_{>}}$ eine gespaltene Opfibration ist.

Damit läßt sich die fibrierte Ersetzung kategorientheoretisch angemessener definieren:

Definition A.1.4 Eine **Ersetzungsregel** besteht aus drei Objekten und zwei Pfeilen aus $\mathcal{T}$ in folgender Konstellation: $L \xleftarrow{l} G \xrightarrow{r} R$. Dabei sind L die linke Seite, R die rechte Seite und G der *Klebegraph* der Regel.

Für einen **fibrierten Ersetzungsschritt** benötigen wir zusätzlich ein Matching $\underline{g : L \to A}$ von der linken Regelseite in einen Anwendungsgraphen A. Wir konstruieren zuerst den kartesischen Pfeil (l, λ) zu l und g gemäß der *Spaltung* zu $\mathcal{P}$ (als Fibration) und erhalten als Quelle von (l, λ) das *Wirtsmatching* $\underline{h : G \to H}$, in dem der *Wirtsgraph* H enthalten ist. Der gemäß der *Spaltung* zu $\mathcal{P}$ (als Opfibration) erhaltene opkartesische Pfeil (r, ρ) zu h und r ergibt in seinem Zielmatching $\underline{k : R \to B}$ den *Ergebnisgraphen* B. □

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "g"'] & G \arrow[l, "l"'] \arrow[r, "r"] \arrow[d, "h"] & R \arrow[d, "k"] \\
A & & H \arrow[ll, "\lambda"'] \arrow[r, "\rho"] & B
\end{tikzcd}$$

Alternativ hätten wir auch $(\underline{h : G \to H}, \lambda)$ als Wirtskonstruktion zu $\underline{g : L \to A}$ und l und $(\underline{k : R \to B}, \rho)$ als Pseudo-Pushout zu $\underline{h : G \to H}$ und r berechnen können.

Die **Wirtskonstruktion** hier ist eine Verallgemeinerung der Pushout-Komplement-Konstruktion des Ansatzes des doppelten Pushouts und hat den Vorteil einer universellen Charakterisierung: Als Anwendung des *Spaltung* der Fibration ist sie dual zum Pseudo-Pushout.

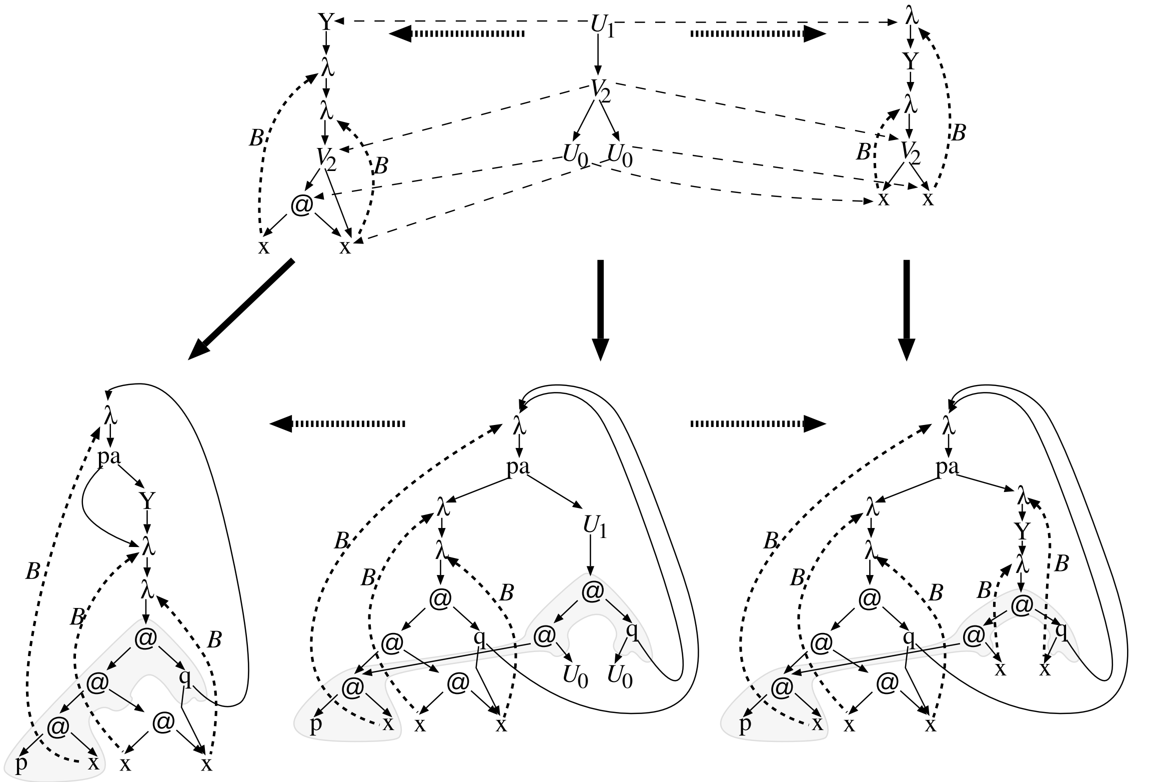
Zu einer informellen Erklärung, die etwas Licht auf die Ideen hinter dem fibrierten Ersetzungsschritt werfen mag, gelangt man, indem man das Diagramm oben wie folgt interpretiert: Man stelle sich auf der Regel im Klebegraphen die Senkrechte als „Interfacegerade“ vor; dann ist der Wirtsgraph das Resultat der *Projektion* des Anwendungsgraphen A auf diese Interfacegerade, wodurch man den kartesischen Pfeil gewinnt, dessen Länge durch die relative Position von A bestimmt ist. Den Ergebnisgraphen erhält man durch *Errichten eines Lots* auf der Interfacegeraden im Wirtsgraphen, wobei die Länge dieses Lotes durch r bestimmt ist — wir haben kaum eine andere Wahl.

So gibt uns der subtile Unterschied zwischen den dualen Konstruktionen von kartesischen und opkartesischen Pfeilen genau so viel von der Freiheit einschränkender Ersetzungen, wie wir für die Ersetzung unserer Termgraphen benötigen.

Eine Beispielregel mit einer zweistelligen Schemavariablen V_2, die eine λ-Abstraktion über den Fixpunkt eines Funktionals hebt, und die in konventioneller CRS-Notation

$$Y(\lambda f.\,\lambda x.\mathcal{B}[f\ x, x]) \;\longrightarrow\; \lambda x.\,Y(\lambda g.\mathcal{B}[g, x])$$

lauten könnte, ist im folgenden zusammen mit einer Anwendung abgebildet (U_0, U_1 sind Platzhalter; V_2 ist Schemavariable):



Die Bildabschnitte von V_2 sind schattiert; zusätzlich zu ihrer von den zwei Nachfolgern von V_2 induzierten unteren Grenze haben sie auch eine Selbstkapselungsgrenze. Das linke Viereck ist kein Pseudo-Pushout, da der Nachfolger von Y ein *DANGLING*-Knoten ist, aber im Klebegraphen keinen Vertreter hat.

Dies ist sogar ein Beispiel für eine Regel, der keine CRS-Regel entspricht (die linke Regelseite ist kein CRS-Pattern), da wir die dort gestellte Bedingung, daß in den linken Regelseiten alle Nachfolger der Metavariablen gebundene Variable sein müssen, durch eine weniger scharfe ersetzen können (die sogenannte „eindeutige Kapselung der Schemavariablenkanten“).

Abschließend noch ein spezieller, ebenfalls in [Kah96, Kapitel 6] neu eingeführter Begriff, der dazu dienen kann, aus einer vorgegebenen horizontalen Matchingkategorie $\mathcal{M}_\equiv$ auf systematische Weise eine geeignete Teilkategorie $\mathcal{M}_<$ zu gewinnen, die in der Wirtskonstruktion überflüssiges Anlegen von Kopien von Teilen des Anwendungsgraphen verhindert:

Definition A.1.5 (Schwanzlastige Matchingpfeile)
Ein Pfeil $\langle d, e\rangle : \underline{g : L \to G} \xrightarrow{\mathcal{M}_\equiv} \underline{h : R \to H}$ zwischen zwei Matchings heißt *schwanzlastig*, wenn für alle Pfeile $\langle d, e'\rangle : \underline{g' : L \to G'} \xrightarrow{\mathcal{M}_\equiv} h$, für die ein vertikaler Monomorphismus $\varphi : G' \xrightarrow{\mathcal{E}_V} G$ mit $\varphi \fatsemi e = e'$ und $g' \fatsemi \varphi = g$ existiert, dieser Monomorphismus φ zugleich ein Isomorphismus ist. $\square$

A.2 Zuordnung der Kategorien

Gemäß Motivationen, die genauer aus [Kah96, Kapitel 5] hervorgehen, nehmen wir nun eine Zuordnung konkreter Termgraphkategorien zu den verschiedenen Rollen des fibrierten Ansatzes vor. Dabei bewegen wir uns von nun an ohne Einschränkung im **Abschnittskontext**.

Objekte

In vertikaler Richtung — also durch Homomorphismen — instantiierte Metavariable dienen als Schemavariable, und es ist wesentlich, *wozu* sie instantiiert werden. In horizontaler Richtung — also durch Einbettungen — instantiierte Metavariable dienen hingegen nur als Platzhalter für den Klebeprozeß. Allerdings ist die Bedeutung dieser Platzhalter in unserem Formalismus mit gekapselter Variablenbindung erheblich größer als in konventionellen Termgraph-Formalismen.

Damit können wir bereits die beiden Objektklassen definieren: Die reellen Objekte, $\mathcal{O}_{\mathrm{R}}$, sind genau alle kapselungsfrei basierten Graphen $G_{\mathrm{R}} = (\mathcal{V}_{\mathrm{R}}, M_{\mathrm{R}}, S_{\mathrm{R}}, D_{\mathrm{R}}, B_{\mathrm{R}}, W_{\mathrm{R}})$ ohne Platzhaltervariable: $v_p M_{\mathrm{R}}^{\mathsf{T}} = \mathrm{O}$. Die virtuellen Objekte, $\mathcal{O}_{\mathrm{V}}$, sind genau alle kapselungsfrei basierten Graphen $G_{\mathrm{V}} = (\mathcal{V}_{\mathrm{V}}, M_{\mathrm{V}}, S_{\mathrm{V}}, D_{\mathrm{V}}, B_{\mathrm{V}}, W_{\mathrm{V}})$ mit Platzhaltervariablen: $v_p M_{\mathrm{V}}^{\mathsf{T}} \neq \mathrm{O}$.

Einbettungen

Eine zweite Disparität zwischen den beiden Richtungen liegt darin, daß horizontal ein Transformationsprozeß kodiert wird, während dessen Stadien vertikal in einen größeren Kontext eingefügt werden. Es ist also ganz natürlich, daß die Homomorphismen nicht überdeckend sind, aber wir werden fordern, daß die horizontalen Einbettungen sehr wohl überdeckend (siehe Definition 6.6.1) sind.

Offensichtlich müssen wir daher für $\mathcal{E}_{\mathrm{V}}$ genau die v_s-Einbettungen wählen; für $\mathcal{E}_{\mathrm{H}}$ benötigen wir, um in der Wirtskonstruktion Verlust von Bindungen zu vermeiden, v_p-Überdeckungen (siehe Abschnitt 6.6). $\mathcal{E}$ enthält damit alle $(v_s \sqcup v_p)$-Einbettungen, die sich aus Kompositionen von Einbettungen aus $\mathcal{E}_{\mathrm{H}}$ und $\mathcal{E}_{\mathrm{V}}$ ergeben.

Patternkategorie

Zur Definition der Patternkategorie $\mathcal{T}$ nehmen wir zunächst eine Zweiteilung der in Frage kommenden Patternobjekte vor und betrachten einerseits die möglichen Regelseiten $\mathcal{P}_{\mathrm{R}} \subseteq \mathcal{O}_{\mathrm{R}}$, andererseits die möglichen Klebegraphen $\mathcal{P}_{\mathrm{V}} \subseteq \mathcal{O}_{\mathrm{V}}$.

$\mathcal{P}_{\mathrm{R}}$ ist die Menge aller v_s-zulässigen Graphen aus $\mathcal{O}_{\mathrm{R}}$.

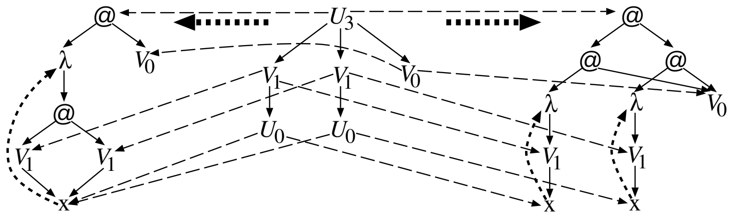
$\mathcal{P}_{\mathrm{V}}$ ist die Menge aller virtuellen Graphen $G \in \mathcal{O}_{\mathrm{V}}$, für die gilt:

- G ist *objektfrei*, d.h. G besteht nur aus Metavariablen: $(v_p \sqcup v_s) M^{\mathsf{T}} = \mathrm{L}$.
- Platzhalter können nur Schemavariable zum Nachfolger haben:
$$v_p M^{\mathsf{T}} D \subset v_s M^{\mathsf{T}} \ .$$
- Schemavariable können nur nullstellige Platzhalter zum Nachfolger haben:
$$v_s M^{\mathsf{T}} D \subset U_0 M^{\mathsf{T}}$$
(aus diesen beiden Bedingungen zusammen folgen Kreisfreiheit und v_s- und v_p-Zulässigkeit).
- Die auf Schemavariable eingeschränkte Nachfolgerfunktion $S \sqcap M v_s^{\mathsf{T}} \mathrm{L}$ ist injektiv (damit wird sichergestellt, daß die Nachfolgerplatzhalter alle verschieden sind).
- Die Basis besteht aus Platzhaltern: $\overline{\mathrm{L}D} \subset v_p M^{\mathsf{T}}$.

$\mathcal{T}$ soll als Objekte genau $\mathcal{P}_{\mathrm{R}} \cup \mathcal{P}_{\mathrm{V}}$ und als Pfeile (außer Identitäten) genau die semiinjektiven und basiskonsistenten (siehe Definition 6.6.8) v_p-Überdeckungen von Graphen in $\mathcal{P}_{\mathrm{V}}$ in Graphen in $\mathcal{P}_{\mathrm{R}}$ enthalten.

Semiinjektivität ist vor allem für den rechten Patternpfeil einer Regel nötig, da bei Identifizierung zweier Schemavariablen mit Nachfolgern der Pseudo-Pushout unmöglich werden kann.

Injektivität können wir nicht einmal für die Einbettung vom Klebegraphen in die linke Regelseite fordern, da wir die Nachfolgerplatzhalter disjunkt halten müssen und sonst Regeln wie die folgende der schrittweisen Propagation von β-Redexen dienende nicht erlaubt wären:



Allerdings sind aufgrund der eingeschränkten Komposition in $\mathcal{T}$ alle nichtidentischen Patternpfeile sowohl Monomorphismen als auch Epimorphismen in $\mathcal{T}$.

Für einen Patternpfeil F von G_1 nach G_2 definieren wir noch $\mathcal{X}_F : \mathcal{V}_2 \leftrightarrow \mathcal{V}_1$, die Zuordnung von Schemavariablen im Bild zu möglichen (indirekten, durch die Variablenidentität vermittelten) Urbildern, mit

$$\mathcal{X}_F := F^{\mathsf{T}}_{\lceil \overline{p_F} \rceil} \sqcup (\overline{F^{\mathsf{T}}_{\lceil \overline{p_F} \rceil} \mathrm{L}} \sqcap W_2 F^{\mathsf{T}}_{\lceil \overline{p_F} \rceil}) \ .$$

Es gilt $\mathrm{L}\mathcal{X}_F^{\mathsf{T}} = \mathrm{L}\, F_{\lceil \overline{p_F} \rceil} W_2$.

Homomorphismen

Hier werden Begriffe zu Einpassungen relevant, um die wir uns in Kapitel 7 noch nicht zu kümmern brauchten. So definieren wir zu einer p-Einpassung F von G_1 in G_2 unter Rückgriff auf den erweiterten Kontext θ_F und den falschen Bildabschluß $F^{\lceil p \rceil}$ ihren *Einstiegskantenvektor* als

$$\eta_F := \theta_F \pi^{\mathsf{T}}_{\mathcal{V}_2 \times \mathcal{E}} \sqcap (\mathrm{L}\, F \sqcap \overline{\mathrm{L}\, F^{\underline{\lfloor p \rfloor}}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, F^{\lceil p \rceil}}) S_2^{\mathsf{T}}$$

und ihren *Einstiegsvektor* als $e_F := \eta_F S_2$. F heißt **einstiegsbasiert**, falls G_1 kreisfrei ist und $\eta_F S_2 \sqcup (\overline{\mathrm{L}\, D_2} \sqcap \mathrm{L}\, F) = \overline{\mathrm{L}\, D_1} F$.

Entsprechend der Aufteilung der Patternobjekte teilen wir auch $\mathcal{H}$ in zwei Teile $\mathcal{H}_{\mathrm{R}}$ und $\mathcal{H}_{\mathrm{V}}$: Für zwei Graphen G_1 und G_2 enthält $\mathcal{H}_{\mathrm{R}}$ genau die Menge aller v_s-Homomorphismen H von $G_1 \in \mathcal{P}_{\mathrm{R}}$ nach $G_2 \in \mathcal{O}_{\mathrm{R}}$. Für zwei Graphen G_1 und G_2 enthält $\mathcal{H}_{\mathrm{V}}$ genau die Menge aller v_s-Homomorphismen H von G_1 nach G_2, für die gilt:

- G_1 ist ein Klebegraphpattern: $G_1 \in \mathcal{P}_{\mathrm{V}}$,
- G_2 enthält genau die Platzhaltervariablen, die Bilder derer in G_1 sind:

$$v_p M_2^{\mathsf{T}} = v_p M_1^{\mathsf{T}} H \ \ ,$$

- H ist nichtzyklisch, gerüstüberschneidungsfrei, gerüsteinstiegsfrei, einstiegsbasiert, semiinjektiv, scharf auflösend und v_p-definitiv.

Die Pfeilklasse $\mathcal{H}$ ist die Vereinigung von $\mathcal{H}_{\mathrm{R}}$ und $\mathcal{H}_{\mathrm{V}}$.

Damit haben wir insgesamt einen separierten Ersetzungskontext definiert und die Kategorie aller Matchings $\mathcal{M}$ festgelegt.

Matchingkategorie

Unsere Aufgabe ist nun, Teilkategorien $\mathcal{M}_>$ und $\mathcal{M}_<$ (oder sogar eine gemeinsame Teilkategorie $\mathcal{M}_{\mathrm{H}}$) von $\mathcal{M}$ zu identifizieren, die geeignet sind, Termgraphersetzung mittels des in Abschnitt A.1 vorgestellten fibrierten Ansatzes zu realisieren. Zu diesem Zwecke definieren wir eine Reihe von für Matchingpfeile geeigneten Begriffen, die wir in der Folge näher auf ihre Auswirkungen hin untersuchen. Zunächst heiße ein Patternpfeil F von G_1 in G_2 **variableninjektiv**, wenn $F_{\lceil \overline{p_F} \rceil} W_2 \sqcap \overline{\mathrm{L}\, F_{\lceil \overline{p_F} \rceil}}$ injektiv ist, also jede Schemavariable, wenn sie im

Urbild mehr als nur einmal vorkommt, im Bild von den Urbildern überdeckt wird. Aus der Variableninjektivität von F folgt, daß $\mathcal{X}_F$ eindeutig ist.

Definition A.2.1 (Eigenschaften von Matchingpfeilen)
Für einen Matching-Pfeil $\langle F, J\rangle : \underline{G : K \to H} \xrightarrow{\mathcal{M}_\mathrm{H}} \underline{N : L \to A}$ definieren wir:

$\langle F, J\rangle$ ist *überlappungsfrei*	$:\Leftrightarrow$	$\overline{\mathrm{L}\,G^{\lfloor p_G\rfloor}} \subset \overline{\mathrm{L}\,N^{\lfloor p_N\rfloor}}\,J^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_J}\rceil}$
$\langle F, J\rangle$ ist *gerüsterhaltend*	$:\Leftrightarrow$	$G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}} J_{\lceil\overline{p_J}\rceil} \subset F_{\lceil\overline{p_F}\rceil}\, N^{\underline{\blacktriangleleft p_N \blacktriangleright}}$
$\langle F, J\rangle$ ist *kontextinjektiv*	$:\Leftrightarrow$	$(\mathrm{I} \sqcap \overline{\mathrm{L}\,G^{\lfloor p_G\rfloor}})J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}$ ist injektiv
$\langle F, J\rangle$ ist *gezügelt*	$:\Leftrightarrow$	für alle Punkte $x : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_L$ mit $x \subset p_N$ ist $\mathcal{C}_N(r\mathcal{X}_F F, r)$ eindeutig, injektiv und sharing-konservativ
$\langle F, J\rangle$ ist *basisinjektiv*	$:\Leftrightarrow$	$FN \sqcap \overline{D^{\mathsf{T}}_K \mathrm{L}}$ ist injektiv
$\langle F, J\rangle$ ist *semiinjektiv*	$:\Leftrightarrow$	J ist semiinjektiv
$\langle F, J\rangle$ ist *variableninjektiv*	$:\Leftrightarrow$	F ist variableninjektiv
$\langle F, J\rangle$ ist *einstiegserhaltend*	$:\Leftrightarrow$	$\eta_N(J^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_J}\rceil} \Vert \mathrm{I}) = \eta_G$ □

Die Forderung nach Variableninjektivität wird zur Lösung von Problemen mit der Auswahl aus den Bildern paralleler Schemavariablen dienen.

Die Bedingung der Überlappungsfreiheit ist in $\mathcal{M}_\mathrm{H}$ wegen $\overline{\mathrm{L}\,G^{\lfloor p_G\rfloor}} \subset \mathrm{L}\,J^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_J}\rceil}$ äquivalent zu:

$$\overline{\mathrm{L}\,G^{\lfloor p_G\rfloor}}\,J_{\lceil\overline{p_J}\rceil} \subset \overline{\mathrm{L}\,N^{\lfloor p_N\rfloor}}$$

Weiter errechnet man leicht, daß die Gerüsterhaltung äquivalent ist zu:

$$F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil}\, G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}} \subset N^{\underline{\blacktriangleleft p_N \blacktriangleright}}\, J^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_J}\rceil}$$

In der Bedingung der Gerüsterhaltung könnte man auch Gleichheit fordern, da folgendes gilt:

Lemma A.2.2 (Schemavariable in $\mathcal{M}_\mathrm{H}$) [←153, 156] Sei $\langle F, J\rangle : \underline{G : K \to H} \xrightarrow{\mathcal{M}_\mathrm{H}} \underline{N : L \to A}$ ein Matching-Pfeil aus $\mathcal{M}_\mathrm{H}$. Mit $GJ = FN$ und Nachfolgertreue von J erhalten wir

$$G^{\underline{\lfloor p_G\rfloor}} J_{\lceil\overline{p_J}\rceil} \supset F_{\lceil\overline{p_F}\rceil}\, N^{\underline{\lfloor p_N\rfloor}} \ .$$

Mit Bindungstreue und Bindungsüberdeckung von J' gilt weiter

$$G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}} J_{\lceil\overline{p_J}\rceil} \supset F_{\lceil\overline{p_F}\rceil}\, N^{\underline{\blacktriangleleft p_N \blacktriangleright}} \ .$$

□

Basisinjektivität werden wir für die Wirtskonstruktion benötigen.

Aus der Zügelung folgt, daß insbesondere auch diejenigen Schemavariablen nicht aufgefächert werden dürfen, deren Kapselgerüst leer ist: $\mathcal{X}_F(G \sqcap \overline{G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}}})J \subset N$. Hieraus folgt unter Ausnutzung der Eindeutigkeit von N und der Totalität von J: $N^{\mathsf{T}}\mathcal{X}_F(G \sqcap \overline{G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}}}) \subset J^{\mathsf{T}}$.

Eigenschaften, die wir sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite des Ersetzungsschrittes benötigen, fordern wir für die gemeinsame horizontale Matchingkategorie $\mathcal{M}_\equiv$:

Definition A.2.3 Die **horizontale Matchingkategorie** $\mathcal{M}_\equiv$ entsteht aus $\mathcal{M}_\mathrm{H}$ durch Einschränkung der Matchingpfeile auf solche, die gerüsterhaltend und einstiegserhaltend sind. □

Nun sind wir bereits in der Lage, die Schlüsselbedingung der Überlappungsfreiheit für die Wirtskonstruktion bei geeigneter Wahl der Matchingkategorie aus der Forderung nach Schwanzlastigkeit zu gewinnen:

Lemma A.2.4 (Schwanzlastigkeit) [←143]

Ein Matching-Pfeil $\langle F, J\rangle : \underline{G : K \to H} \xrightarrow{\mathcal{M}_\equiv} \underline{N : L \to A}$ aus der horizontalen Matchingkategorie $\mathcal{M}_\equiv$ ist schwanzlastig genau dann, wenn er überlappungsfrei und kontextinjektiv ist.

Beweis: Sei zunächst ein Matching-Pfeil

$$\langle F, J\rangle : \underline{G : K \to H} \xrightarrow{\mathcal{M}_\equiv} \underline{N : L \to A}$$

gegeben. Also gilt $GJ = FN$.

„⇐“: Sei nun ein weiterer Matching-Pfeil

$\langle F, J'\rangle : \underline{G' : K \to H'} \xrightarrow{\mathcal{M}_\equiv} \underline{N : L \to A}$

gegeben also mit $G'J' = FN$, und sei ϕ ein Monomorphismus mit $G'\phi = G$ und $\phi J = J'$.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[d, "N"'] & K \arrow[l, "F"'] \arrow[d, "G"] \arrow[ddr, "G'"] & \\
A & H \arrow[l, "J"'] & \\
& & H' \arrow[ull, "J'"] \arrow[ul, dotted, "\phi"']
\end{tikzcd}$$

Um zu zeigen, daß $\langle F, J\rangle$ schwanzlastig ist, müssen wir zeigen, daß ϕ ein Isomorphismus, insbesondere also surjektiv ist. Wir nehmen an, daß es einen Punkt $h : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_H$ gibt, der nicht im Bild von ϕ liegt: $h \subset \overline{\mathrm{L}\phi}$.

(a) $h \subset p_J$: Mit $h \subset p_J = \mathrm{L}\,G_{\lceil p_G \rceil} = \mathrm{L}\,G'_{\lceil p_{G'} \rceil}\phi \subset \mathrm{L}\phi$ erhalten wir einen Widerspruch zur Annahme.

(b) $h \subset \mathrm{L}\,\underline{G^{\lfloor p_G \rfloor}}$: Hieraus läßt sich zusammen mit $p_{J'} = p_F\, G'$ ein Widerspruch zur Nachfolgertreue von ϕ herleiten.

(c) $h \subset \overline{\mathrm{L}\,G^{\lfloor p_G \rfloor}}$: Mit der Gerüsterhaltung erhalten wir sofort $h \subset \overline{\mathrm{L}\,N^{\lfloor p_N \rfloor}}\,J^{\top}_{\lceil p_J \rceil}$, womit $hJ_{\lceil p_J \rceil} \neq \mathrm{O}$ gilt und

$$\begin{array}{rcll}
hJ_{\lceil p_J \rceil} & \subset & \overline{\mathrm{L}\,N^{\lfloor p_N \rfloor}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\,J'_{\lceil p_{J'} \rceil}} & \text{Kontextinjektivität} \\
& \subset & \overline{\mathrm{L}\,N^{\lfloor p_N \rfloor}} \sqcap \mathrm{L}\,\underline{J'^{\lfloor p_{J'} \rfloor}} & J' \text{ Überdeckung} \\
& = & \overline{\mathrm{L}\,N^{\lfloor p_N \rfloor}} \sqcap \mathrm{L}\,G_{\lceil p_G \rceil}\,J'^{\lfloor p_{J'} \rfloor} & \\
& \subset & \overline{\mathrm{L}\,N^{\lfloor p_N \rfloor}} \sqcap \mathrm{L}\,\underline{F^{\lfloor p_F \rfloor}}\,N_{\lceil p_N \rceil} & \text{Kommutativität, Nachfolgertr.} \\
& \subset & \overline{\mathrm{L}\,N^{\lfloor p_N \rfloor}} \sqcap \mathrm{L}\,N_{\lceil p_N \rceil} & \\
& \subset & \mathrm{O}\ , &
\end{array}$$

womit wir einen Widerspruch erreicht haben.

„⇒“: Überlappungsfreiheit: Es gilt:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\mathrm{L}\,G^{\lfloor p_G \rfloor}} \subset \overline{\mathrm{L}\,N^{\lfloor p_N \rfloor}}\,J^{\top}_{\lceil p_J \rceil} & \Leftrightarrow & \overline{\mathrm{L}\,G^{\lfloor p_G \rfloor}} \sqcap \overline{\overline{\mathrm{L}\,N^{\lfloor p_N \rfloor}}\,J^{\top}_{\lceil p_J \rceil}} = \mathrm{O} \\
& \Leftrightarrow & \mathrm{L}\,G^{\lfloor p_G \rfloor} \sqcup \overline{\mathrm{L}\,N^{\lfloor p_N \rfloor}}\,J^{\top}_{\lceil p_J \rceil} = \mathrm{L}
\end{array}$$

Da G einstiegsbasiert ist und $\langle F, J\rangle$ einstiegserhaltend, gilt

$$\mathrm{L}\,G^{\lfloor p_G \rfloor} \sqcup \overline{\mathrm{L}\,N^{\lfloor p_N \rfloor}}\,J^{\top}_{\lceil p_J \rceil} = \mathrm{L} \Leftrightarrow (\mathrm{L}\,G^{\lfloor p_G \rfloor} \sqcup \overline{\mathrm{L}\,N^{\lfloor p_N \rfloor}}\,J^{\top}_{\lceil p_J \rceil})D^{*}_{H} = \mathrm{L}\ \ ?$$

Dann wäre die entsprechende Einschränkung von H, nämlich

$$H' := H|_{(\mathrm{L}\,G^{\lfloor p_G \rfloor} \sqcup \overline{\mathrm{L}\,N^{\lfloor p_N \rfloor}}\, J^{\top}_{\lceil \overline{p_J} \rceil})D^*_H}$$

mit natürlicher Injektion ϕ, die dann nicht surjektiv wäre, eine Widerlegung der Schwanzlastigkeit von $\langle F, J \rangle$.

Kontextinjektivität: Sei $J_0 := (\mathrm{I} \sqcap \overline{\mathrm{L}\,G^{\lfloor p_G \rfloor}})J_{\lceil \overline{p_J} \rceil}$; sei weiter $R_J := J_0 J_0^{\top}$. Da G einstiegsbasiert ist und $\langle F, J \rangle$ einstiegserhaltend, ist R_J eine Identifizierung und es gibt zu dem identifizierten Graphen $H/_{R_J}$ mit natürlicher Projektion χ_J eine Einbettung ξ_J mit $\xi_J \subset \chi^{\top}_J$, die dann injektiv ist, aber nicht surjektiv, falls J_0 nicht injektiv ist. □

$\mathcal{M}_<$ entsteht gemäß Lemma A.2.4 aus $\mathcal{M}_\equiv$ durch Einschränkung auf schwanzlastige horizontale Pfeile; allerdings benötigen wir aus technischen Gründen zusätzlich noch die Basisinjektivität und scharfe Auflösung; bei zu grober Auflösung wäre die Klebegraphkonstruktion zu modifizieren und beim Übergang zur rechten Seite und zum Ergebnisgraphen würde zusätzlicher Nichtdeterminismus eingeführt; für CRS-Regeln ist die Auflösung ohnehin schon scharf.

Definition A.2.5 (Wirtsmatchings) Die Kategorie $\mathcal{M}_<$ entsteht aus $\mathcal{M}_\equiv$ durch Einschränkung der horizontalen Matchingpfeile auf solche, die überlappungsfrei, kontextinjektiv und basisinjektiv sind, und deren Zielmatching ein scharf auflösender Homomorphismus ist. □

Für die rechte Seite des Ersetzungsschrittes hilft uns der zur Schwanzlastigkeit duale Begriff der Kopflastigkeit nicht viel weiter, da höchstens mit Einschränkung von $\mathcal{M}_\equiv$ auf variableninjektive, semiinjektive und bis auf Sharing-Konservativität zügelnde Pfeile die Kopflastigkeit genau der Sharing-Konservativität in der Zügelung entspricht. Daher haben wir hier nur technische Einschränkungen:

Definition A.2.6 (Pseudo-Pushout-Matchings) Die Kategorie $\mathcal{M}_>$ entsteht aus $\mathcal{M}_\equiv$ durch Einschränkung der horizontalen Matchingpfeile auf solche, die semiinjektiv, variableninjektiv und gezügelt sind. □

Anhang B

Wirtskonstruktion

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "N"'] & K \arrow[l, dotted, "F"'] \arrow[d, "G"] \\ A & & H \arrow[ll, dotted, "J"] \end{tikzcd}$$

Wir gehen aus von einem virtuellen Patterngraphen $K \in \mathcal{P}_{\mathrm{V}}$ (dem Klebegraphen), einem reellen Patterngraphen $L \in \mathcal{P}_{\mathrm{R}}$ (der linken Regelseite), einem Patternpfeil F von K in L, d.h. einer semiinjektiven, variableninjektiven und basiskonsistenten v_p-Überdeckung, einem reellen (Anwendungs-)Graphen $A \in \mathcal{O}_{\mathrm{R}}$ und einem reellen, sharf auflösenden p_N-Homomorphismus $N \in \mathcal{H}_{\mathrm{R}}$. $\omega_K := \overline{\mathrm{L}D_K}$ sei die eindeutig bestimmte kapselungsfreie Basis von K; wir definieren: $\zeta := N^{\top}F^{\top} \sqcap \mathrm{L}\omega_K$ (es gilt $\omega_K \subset p_F$ und ζ ist injektiv) und wir fordern noch (für die Basisinjektivität), daß ζ eindeutig ist.

Gesucht sind nun ein virtueller (Wirts-)Graph $H \in \mathcal{O}_{\mathrm{V}}$, ein virtueller Homomorphismus G von K in H, und eine v_p-Überdeckung J von H in A, so daß obiges Diagramm eine Wirtskonstruktion ist.

B.1 Grundlagen der Konstruktion des Wirtsgraphen

Knotenmenge

Wir legen uns zunächst eine Hilfsdefinition zurecht: Sei $N^{\square} : \mathcal{V}_L \leftrightarrow \mathcal{V}_A$ die Relation, die genau die Schemavariablen aus $p_G F$ (dies braucht nicht ganz p_N zu sein!) mit nur den Knoten ihrer Bildabschnitte in Beziehung setzt, die außerhalb des Kapselgerüstes liegen:

$$N^{\square} := N^{\underline{\lfloor p_N \rfloor}} \sqcap \overline{N^{\underline{\blacktriangleleft p_N \blacktriangleright}}} \sqcap F^{\top} p_G^{\top} \mathrm{L}$$

Die Platzhalter, sowohl die eigentlichen für Einstiege stehenden, als auch die nur dem Abschluß von Schemavariablen dienenden, können wir direkt aus K übernehmen. Für jede Schemavariable aus $p_G F$ legen wir eine eigene Kopie des Kapselgerüstes ihres Bildabschnittes an; dies dient der Sicherstellung der Gerüstüberschneidungsfreiheit. Formal bedienen wir uns hier eines partiellen Produktes Θ (siehe Definition 2.5.8):

$$(\ \Theta : \mathbb{P}(\mathcal{V}_L \times \mathcal{V}_A)\ ,\ \pi_{\Theta}\ ,\ \rho_{\Theta}\ ,\ N^{\underline{\blacktriangleleft p_N \blacktriangleright}} \sqcap F^{\top}_{\lceil \overline{p_F} \rceil} \mathrm{L}\ )$$

(Man beachte $F^{\top}_{\lceil \overline{p_F} \rceil} \mathrm{L} = F^{\top} p_G^{\top} \mathrm{L}$.) Mehr Mühe bereiten die aus A zu übernehmenden Knoten. Zunächst einmal benötigen wir zur Instantiierung der Schemavariablen aus $p_G F$ alle die Knoten, die in Bildern dieser Schemavariablen außerhalb der Kapselgerüste liegen — hierzu dient $N^{\square}$. Als Kontext brauchen wir auch alle die Knoten, die außerhalb des Bildabschlusses von N liegen. Falls Außenverweise auf Kapselgerüste nicht verboten sind, kommen noch die von außen erreichbaren Teile der Kapselgerüste hinzu; für beide Teile eignet sich das Intervall $[\overline{\mathrm{L}N^{\lfloor p_N \rfloor}}, \omega_K F N]$, da die Spitzen der linken Seite genau auf die untere Grenze abgebildet werden. (Dieses Intervall ähnelt dem erweiterten Kontext θ_N, nur die untere Grenze ist hier reduziert.) Ferner benötigen wir die Selbstkapselungsgrenzen, sofern sie Bildknoten von Konstanten der linken Regelseite sind (siehe hierzu auch Korollar 7.5.3), und von ihnen aus erreichbare Knoten, die nicht notwendigerweise bereits erfaßt sind — dies leistet für uns der falsche Bildabschluß $N^{\lceil p_N \rceil}$, siehe Definition 7.5.7.

$\mathcal{V}_H$ charakterisieren wir daher als eine dreiteilige direkte Summe mit zwei partiellen Injektionen:

$$\begin{array}{llrcl}
\text{Platzhalter:} & \iota_H : \mathcal{V}_K \rightarrowtail\!\!\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{V}_H & \mathrm{L}\iota_H^{\mathsf{T}} & = & \mathrm{L}p_F \\
\text{Kapselgerüste:} & \kappa_H : \Theta \rightarrowtail \mathcal{V}_H & & & \\
\text{Kontext:} & \lambda_H : \mathcal{V}_A \rightarrowtail\!\!\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{V}_H & \mathrm{L}\lambda_H^{\mathsf{T}} & = & \mathrm{L}N^{\square} \sqcup \underline{[\overline{\mathrm{L}N^{\lfloor p_N \rfloor}}, \omega_K FN]} \sqcup \mathrm{L}N^{\lceil p_N \rceil}
\end{array}$$

Homomorphismus vom Klebe- zum Wirtsgraphen

Die Abbildung der Platzhalter ist klar; sie werden einfach übernommen. Damit ist auch die Semiinjektivität von G sichergestellt. Bei den echten Schemavariablen gibt es drei Möglichkeiten: Das Kapselgerüst kann nichtleer sein — dann liegt der Bildknoten der Entsprechung in L unter N innerhalb des Kapselgerüstes; es kann leer sein, aber das Bild nichtleer — dann liegt der entsprechende Bildknoten unter N in $\mathrm{L}N^{\square}$; schließlich kann auch das Bild leer sein (sei $p_n := p_N \sqcap \mathrm{L}(N^{\mathsf{T}} \sqcap N^{\mathsf{T}} D_L^{\mathsf{T}})$ der Vektor der Schemavariablen in L, die von N leer abgebildet werden) — dann fällt der Bildknoten unter N mit dem des Nachfolgers zusammen (aus der scharfen Auflösung von N folgt, daß Schemavariable in p_n nur einstellig sein können):

$$G := \iota_H \sqcup F_{\lceil \overline{p_F} \rceil}((\pi_\Theta^{\mathsf{T}} \sqcap N\rho_\Theta^{\mathsf{T}})\kappa_H \sqcup (\overline{p_n^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap \overline{\pi_\Theta^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcap N\lambda_H)) \sqcup (F_{\lceil \overline{p_F} \rceil} p_n^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap D_K \iota_H)$$

Eindeutigkeit und Totalität sind offensichtlich. Mit $p_G := \overline{\mathrm{L}p_F}$ erhalten wir sofort $G_{\lceil \overline{p_G} \rceil} = \iota_H$ und damit Semiinjektivität von G. Aus dieser folgt scharfe Auflösung, da $p_G D_K \subset \overline{p_G}$ und G ein virtueller Patterngraph ist. Im weiteren Verlauf werden wir beweisen, daß G ein virtueller p_G-Homomorphismus ist.

Überdeckung vom Wirts- in den Anwendungsgraphen

Für die Überdeckung J von H in A ergibt sich der Variablenvektor offensichtlich als Vektor der Platzhalter in H: $p_J := \mathrm{L}\iota_H$. Diese Platzhalter sind nach den Bildern der entsprechenden Platzhalter in K unter FN abzubilden. Alle übrigen Knoten in H werden ihrer jeweiligen direkten Entsprechung in A zugeordnet:

$$J := \iota_H^{\mathsf{T}} FN \sqcup \kappa_H^{\mathsf{T}} \rho_\Theta \sqcup \lambda_H^{\mathsf{T}}$$

Der konstante Anteil ist damit $J_{\lceil \overline{p_J} \rceil} = \kappa_H^{\mathsf{T}} \rho_\Theta \sqcup \lambda_H^{\mathsf{T}}$; und es gilt $(\zeta\iota_H \mid\!+ \lambda_H) \subset J^{\mathsf{T}}$, $(\lambda_H \mid\!+ \zeta\iota_H) \subset J^{\mathsf{T}}$. Totalität und Eindeutigkeit von J sind offensichtlich.

Kommutativität

$$
\begin{aligned}
GJ &\subset \iota_H \iota_H^{\mathsf{T}} FN \sqcup F_{\lceil p_F \rceil}(N\rho_\Theta^{\mathsf{T}}\kappa_H\kappa_H^{\mathsf{T}}\rho_\Theta \sqcup N\lambda_H \lambda_H^{\mathsf{T}}) \sqcup (F_{\lceil p_F \rceil} p_n^{\mathsf{T}} \mathrm{L} \sqcap D_K \iota_H)\iota_H^{\mathsf{T}} FN \\
&\subset \quad \left\langle \iota_H,\, \rho_\Theta^{\mathsf{T}}\kappa_H,\, \lambda_H \text{ injektiv} \right\rangle \\
&\quad FN \sqcup (F_{\lceil p_F \rceil} p_n^{\mathsf{T}} \mathrm{L} \sqcap D_K FN) \\
&\subset \quad \langle F \text{ semiinjektiv} \rangle \\
&\quad FN \sqcup F_{\lceil p_F \rceil}(p_n^{\mathsf{T}} \mathrm{L} \sqcap F^{\mathsf{T}}_{\lceil p_F \rceil} D_K FN) \\
&\subset \quad \langle \text{Nachfolgertreue } F \rangle \\
&\quad FN \sqcup F_{\lceil p_F \rceil}(p_n^{\mathsf{T}} \mathrm{L} \sqcap D_L F^{\mathsf{T}} FN) \\
&\subset \quad \langle F \text{ eindeutig, Definition } p_n \rangle \\
&\quad FN \sqcup F_{\lceil p_F \rceil}((D_L N \sqcap N)\mathrm{L} \sqcap D_L N) \\
&\subset \quad \langle N \text{ kohärent} \rangle \\
&\quad FN
\end{aligned}
$$

Da GJ total ist und FN eindeutig, folgt Gleichheit.

Knotenmarkierung

Die Knotenmarkierung in H ergibt sich für die Platzhalter aus der in K, für die übrigen Knoten aus der in A:

$$M_H := \iota_H^{\mathsf{T}} M_K \sqcup (\kappa_H^{\mathsf{T}} \rho_\Theta \sqcup \lambda_H^{\mathsf{T}}) M_A$$

Markierungstreue von G: $G^{\mathsf{T}}_{\lceil p_G \rceil} M_K = \iota_H^{\mathsf{T}} M_K \subset M_H$

Markierungstreue von J: $J^{\mathsf{T}}_{\lceil p_J \rceil} M_H = (\rho_\Theta^{\mathsf{T}} \kappa_H \sqcup \lambda_H)(\kappa_H^{\mathsf{T}} \rho_\Theta \sqcup \lambda_H^{\mathsf{T}}) M_A \subset M_A$

B.2 Nachfolgerfunktionen

Wir definieren für jedes $i : \mathbb{1} \to \mathcal{E}$ für die verschiedenen Situationen von Kanten in H einzelne Teilfunktionen, die zusammen $S_{H,i}$ ergeben.

Nachfolger der Platzhalter sind die Bilder der entsprechenden Nachfolger in K:

$$S_{1,i} := \iota_H^{\mathsf{T}} S_{K,i} G$$

Fortbewegung innerhalb des Kapselgerüstes der Schemavariablen:

$$S_{2,i} := \kappa_H^{\mathsf{T}} (\rho_\Theta S_{A,i} \rho_\Theta^{\mathsf{T}} \sqcap \pi_\Theta \pi_\Theta^{\mathsf{T}}) \kappa_H$$

Verlassen des Kapselgerüstes der Schemavariablen über Nachfolger orientiert sich an den Nachfolgern in K — wenn Schemavariable höchstens einstellig wären, könnten wir $S_{X,i} := \kappa_H^{\mathsf{T}}((\rho_\Theta S_{A,i} \sqcap \overline{\pi_\Theta \pi_\Theta^{\mathsf{T}} \rho_\Theta} \sqcap \pi_\Theta D_L N)\mathrm{L} \sqcap \pi_\Theta F^{\mathsf{T}}_{\lceil p_F \rceil} D_K)\iota_H$ verwenden; in Anwesenheit mehrstelliger Schemavariablen müssen wir auf den Bildausgang (siehe Definition 8.7.2) zurückgreifen:

$$S_{3,i} := \kappa_H^{\mathsf{T}}((\rho_\Theta S_{A,i} \sqcap \overline{\pi_\Theta \pi_\Theta^{\mathsf{T}} \rho_\Theta}) N^{\mathsf{T}} S_L^{\mathsf{T}} \sqcap \rbag \pi^{\mathsf{T}}, \mathcal{I}_{N,i} \lbag)(F^{\mathsf{T}}_{\lceil p_F \rceil} \| \mathrm{I}) S_K \iota_H$$

Es gilt dabei $S_{3,i} \subset S_{X,i}$ und $S_{3,i}\mathrm{L} = S_{X,i}\mathrm{L}$.

Verlassen des Kapselgerüstes der Schemavariablen „seitwärts“ darf nur auf Kontextknoten führen, da G sonst nicht gerüstüberschneidungsfrei wäre. Der entsprechende Knoten liegt, da entweder in $\mathrm{L}N^{\Box}$ oder in $\mathrm{L}N^{\underline{]p_N[}}$ enthalten, im Urbildbereich von λ_H:

$$S_{4,i} := \kappa_H^{\top}(\rho_\Theta S_{A,i} \sqcap \overline{\pi_\Theta \pi_\Theta^{\top} \rho_\Theta} \sqcap \overline{\pi_\Theta D_L N})\, \lambda_H$$

Fortbewegung innerhalb des Urbildes von λ kann nur dort bleiben oder auf Einstiegsknoten führen; bei letzteren müssen wir unterscheiden, ob wir von außerhalb des Bildabschlusses von N kommen — dann ist auf den entsprechenden Platzhalter umzulenken — oder von innerhalb — dann bleiben wir im Bild von λ:

$$S_{5,i} := (\lambda_H^{\top} \sqcap \overline{\mathrm{L}N^{\lfloor p_N \rfloor}}) S_{A,i} (\zeta \iota_H | \!\!+ \lambda_H) \sqcup (\lambda_H^{\top} \sqcap \mathrm{L}N^{\lfloor p_N \rfloor}) S_{A,i} (\lambda_H | \!\!+ \zeta \iota_H)$$

Die Nachfolgerfunktion zu H ergibt sich als Vereinigung dieser Teile:

$$S_{H,i} := S_{1,i} \sqcup S_{2,i} \sqcup S_{3,i} \sqcup S_{4,i} \sqcup S_{5,i}$$

Die Eindeutigkeit von $S_{H,i}$ ist offensichtlich, da die jeweils eindeutigen Komponenten den Definitionsbereich klar partitionieren.

Zur Markierungskompatibilität zeigen wir zunächst:

$$\begin{array}{rcl}
n \subset \mathrm{L}S_{1,i}^{\top} & \Leftrightarrow & n \subset \mathrm{L}G^{\top} S_{K,i}^{\top} \iota_H \;\Leftrightarrow\; n\iota_H^{\top} \subset \mathrm{L}S_{K,i}^{\top} \wedge n \subset \mathrm{L}\iota_H \\
 & \Leftrightarrow & i \subset n\iota_H^{\top} M_K E \wedge n \subset \mathrm{L}\iota_H \;\Leftrightarrow\; i \subset nM_H E \wedge n \subset \mathrm{L}\iota_H \\
n \subset \mathrm{L}S_{2,i}^{\top} \sqcup \mathrm{L}S_{3,i}^{\top} \sqcup \mathrm{L}S_{4,i}^{\top} & \Leftrightarrow & n \subset \mathrm{L}S_{A,i}^{\top} \rho_\Theta^{\top} \kappa_H \;\Leftrightarrow\; n\kappa_H^{\top} \rho_\Theta \subset \mathrm{L}S_{A,i}^{\top} \\
 & \Leftrightarrow & i \subset n\kappa_H^{\top} \rho_\Theta M_A E \wedge n \subset \mathrm{L}\kappa_H \\
 & \Leftrightarrow & i \subset nM_H E \wedge n \subset \mathrm{L}\kappa_H \\
n \subset \mathrm{L}S_{5,i}^{\top} & \Leftrightarrow & n \subset \mathrm{L}S_{A,i}^{\top} \lambda_H \;\Leftrightarrow\; n\lambda_H^{\top} \subset \mathrm{L}S_{A,i} \wedge n \subset \mathrm{L}\,\lambda_H \\
 & \Leftrightarrow & i \subset n\lambda_H^{\top} M_A E \wedge n \subset \mathrm{L}\,\lambda_H \;\Leftrightarrow\; i \subset nM_H E \wedge n \subset \mathrm{L}\,\lambda_H
\end{array}$$

Insgesamt erhalten wir nun:

$$n \subset \mathrm{L}S_{H,i}^{\top} \Leftrightarrow i \subset nM_H E \wedge (n \subset \mathrm{L}\iota_H \vee n \subset \mathrm{L}\kappa_H \vee n \subset \mathrm{L}\,\lambda_H) \Leftrightarrow i \subset nM_H E$$

Eigenschaften von G und J

Nachfolgertreue von G: $G^{\top}_{\lceil \overline{p_G} \rceil} S_{K,i} = \iota_H^{\top} S_{K,i} \subset \iota_H^{\top} S_{K,i} G G^{\top} = S_{1,i} \subset S_{H,i} G^{\top}$

Nachfolgertreue von J:

$$
\begin{aligned}
J^{\top}_{\lceil p_J\rceil} S_{1,i} &= (\rho_\Theta^{\top}\kappa_H \sqcup \lambda_H)\iota_H^{\top} S_{K,i} G \;=\; \mathrm{O}\\
J^{\top}_{\lceil p_J\rceil} S_{2,i} &= (\rho_\Theta^{\top}\kappa_H \sqcup \lambda_H)\kappa_H^{\top}(\rho_\Theta S_{A,i}\rho_\Theta^{\top} \sqcap \pi_\Theta\pi_\Theta^{\top})\kappa_H \;\subset\; S_{A,i}\rho_\Theta^{\top}\kappa_H \;\subset\; S_{A,i} J^{\top}_{\lceil p_J\rceil}\\
J^{\top}_{\lceil p_J\rceil} S_{3,i} &= (\rho_\Theta^{\top}\kappa_H \sqcup \lambda_H)\kappa_H^{\top}((\rho_\Theta S_{A,i} \sqcap \overline{\pi_\Theta\pi_\Theta^{\top}\rho_\Theta})N^{\top}S_L^{\top} \sqcap \llbracket \pi^{\top}, \mathcal{I}_{N,i}\rrbracket)(F^{\top}_{\lceil p_F\rceil}\|\mathrm{I})S_K\iota_H\\
&\subset \rho_\Theta^{\top}((\rho_\Theta S_{A,i} \sqcap \overline{\pi_\Theta\pi_\Theta^{\top}\rho_\Theta})N^{\top}S_L^{\top} \sqcap \llbracket \pi^{\top}, \mathcal{I}_{N,i}\rrbracket)(F^{\top}_{\lceil p_F\rceil}\|\mathrm{I})S_K\iota_H\\
&\subset S_{A,i}N^{\top}S_L^{\top}(F^{\top}_{\lceil p_F\rceil}\|\mathrm{I})S_K\iota_H\\
&\subset \quad \langle \text{Nachfolgertreue } F\rangle\\
&\; S_{A,i}N^{\top}S_L^{\top}S_L F^{\top}\iota_H\\
&\subset \quad \langle S_L \text{ eindeutig}\rangle\\
&\; S_{A,i}N^{\top}F^{\top}\iota_H \;\subset\; S_{A,i}J^{\top}\\
J^{\top}_{\lceil p_J\rceil} S_{4,i} &= (\rho_\Theta^{\top}\kappa_H \sqcup \lambda_H)\kappa_H^{\top}(\rho_\Theta S_{A,i} \sqcap \overline{\pi_\Theta\pi_\Theta^{\top}\rho_\Theta} \sqcap \overline{\pi_\Theta D_L N})\,\lambda_H \;\subset\; S_{A,i}\,\lambda_H \;\subset\; S_{A,i} J^{\top}_{\lceil p_J\rceil}\\
J^{\top}_{\lceil p_J\rceil} S_{5,i} &= (\rho_\Theta^{\top}\kappa_H \sqcup \lambda_H)((\lambda_H^{\top} \sqcap \overline{\mathrm{L}N^{\lfloor p_N\rfloor}})S_{A,i}(\zeta\iota_H \mathbin{|\!+} \lambda_H) \sqcup (\lambda_H^{\top} \sqcap \mathrm{L}N^{\lfloor p_N\rfloor})S_{A,i}\,\lambda_H)\\
&\subset S_{A,i}(\zeta\iota_H \mathbin{|\!+} \lambda_H) \sqcup S_{A,i}\,\lambda_H \;\subset\; S_{A,i}J^{\top}
\end{aligned}
$$

J ist überdeckend, da $J_{\lceil p_J\rceil}$ den gesamten Kontext erfaßt und durch den Intervallkontext Überdeckung von $\mathrm{L}ND_A^*$ gewährleistet ist.

B.3 Bindung

Ein innerhalb eines Kapselgerüstes liegender Bindungsknoten bindet nur im gleichen Kapselgerüst liegende Variablenknoten, und zwar gemäß $B_a := \rho_\Theta B_A \rho_\Theta^{\top} \sqcap \pi_\Theta\pi_\Theta^{\top}$:

$$B_1 := \kappa_H^{\top} B_a \kappa_H$$

Nicht innerhalb des Kapselgerüstes gebundene Variable können gemäß B_A im Kontext gebunden sein:

$$B_2 := \kappa_H^{\top}(\rho_\Theta B_A \sqcap \overline{\pi_\Theta\pi_\Theta^{\top}\rho_\Theta})\,\lambda_H = \kappa_H^{\top}(\overline{B_a\mathrm{L}} \sqcap \rho_\Theta B_A\,\lambda_H)$$

Aus der Kapselungseinheitlichkeit folgt noch

$$B_2 = \kappa_H^{\top}(\overline{B_a\mathrm{L}} \sqcap \rho_\Theta B_A \sqcap \overline{\mathrm{L}N^{\lfloor p_N\rfloor}})\,\lambda_H$$

Kontextbindungen werden bewahrt (v.a. aus Konformität und Variablenbeherrschung von N folgt $\lambda_H^{\top} B_A \subset \mathrm{L}\lambda_H^{\top}$):

$$B_3 := \lambda_H^{\top} B_A\,\lambda_H$$

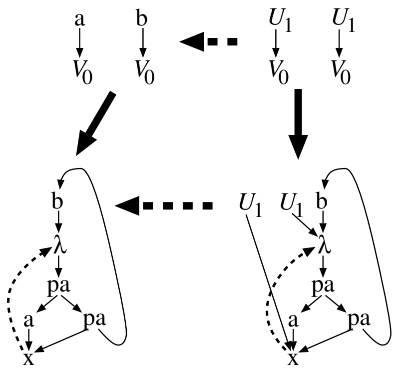
Sonst brauchen wir in H keine Bindungen einzuführen:

$$B_H := B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_3$$

Erreichbarkeit: B_1 klar; B_2 und B_3 benötigen wesentlich die Kapselungseinheitlichkeit.

Verletzungen der Dominierung könnten nur auf Platzhalter zurückgehen, deren zugehörige Einstiege von den relevanten Bindungsknoten aus nur aus dem Bildabschluß $\mathrm{L}N^{\lfloor p_N\rfloor}$ von N heraus erreichbar sind. Dies ist aber aufgrund der Kapselungskonsistenz von N unmöglich.

Ein Beispiel, in dem fehlende Kapselungskonsistenz von N zu einer Verletzung der Dominierung der Bindung in H führt, ist im folgenden Bild zu sehen: (Kapselungseinheitlichkeit ist durch Erreichbarkeit über den nichtleeren Kreis um b gewährleistet.)



Eigenschaften von G

Da wir uns im Abschnittskontext bewegen, hängt der Bildabschluß nicht nur von der Nachfolgerfunktion, sondern auch von der Bindung ab. Gemäß Konstruktion ergibt sich, ohne daß wir dies noch im Detail nachweisen wollen, offensichtlich:

$$G^{\lfloor p_G \rfloor} = G_{\lceil \overline{p_G} \rceil} \sqcup F_{\lceil \overline{p_F} \rceil}(N^{\Box} \lambda_H \sqcup \pi_\Theta^{\top} \kappa_H \sqcup N^{\lceil p_N \rceil} \lambda_H)$$

Damit ist klar, daß G v_p-definitiv ist. Das Kapselgerüst errechnet sich als:

$$G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}} = F_{\lceil \overline{p_F} \rceil} \pi_\Theta^{\top} \kappa_H \quad ,$$

also i.w. als Bild des Kapselgerüstes von N (aus dem Bild des falschen Bildabschlusses heraus kann es keinen Pfad in das Kapselgerüst oder auf die untere Grenze geben!), und ist damit injektiv. Hieraus und aus $G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}} D_H^{\top} \subset G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}} \sqcup D_K^{\top} G$ ist ersichtlich, daß G auch gerüstüberschneidungsfrei, gerüsteinstiegsfrei und nichtzyklisch ist; Kapselrespekt ist für virtuelle Homomorphismen ohnehin trivial. Auch daß G einstiegsbasiert ist, ist unschwer nachzuprüfen.

Für die Selbstkapselungsgrenze gilt $G^{\underline{\rfloor p_G \lfloor}} = (F N^{\underline{\rfloor p_N \lfloor}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, N_{\lceil \overline{p_N} \rceil}})\, \lambda_H$.

Weiter erhalten wir die Einpassungseigenschaften bezüglich der Bindung:

Kohärenz folgt mittelbar aus $F_{\lceil \overline{p_F} \rceil} \pi_\Theta^{\top} \kappa_H \subset G^{\lfloor p_G \rfloor}$.

Bindungstreue: $G_{\lceil \overline{p_G} \rceil}^{\top} B_K = \mathrm{O} = B_H \iota_H^{\top} = B_H G_{\lceil \overline{p_G} \rceil}^{\top}$

Bindungsbeherrschung: $G_{\lceil \overline{p_G} \rceil} B_H = \iota_H B_H = \mathrm{O} \subset B_K G_{\lceil \overline{p_G} \rceil} \sqcup \overline{\mathrm{L}\, G^{\lfloor p_G \rfloor}}$

Konformität von G ist offensichtlich, da es zu einer Schemavariablen x an aus dem Bild heraus erreichbaren Knoten $x G^{\lfloor p_G \rfloor} D_H^{*} \sqcap \overline{x G^{\lfloor p_G \rfloor}}$ nur nullstellige nicht bindbare Platzhalter gibt, die damit auch nicht gekapselt werden können, und Selbstkapselungsgrenzen, deren Kapselung aus $x G^{\lfloor p_G \rfloor}$ heraus zu einem Widerspruch zur Konformität von N bzw. zur Berechnung des Bildabschlusses von N führen würde.

Kapselungseinheitlichkeit ergibt sich aus der Kapselungseinheitlichkeit von N, da die Bilder aller Knoten von K nur aus dem Kontext gekapselt sein können.

Kapselungkonsistenz ergibt sich aus Lemma 7.3.4, Korollar 7.3.6 und Lemma 7.5.2, da diese zunächst ausschließen, daß eine Objektvariable im Bild einer Schemavariablen frei, in dem einer anderen aber lokal gebunden vorkommt. Damit gilt gleiches auch für die Kapselgerüste: $\mathrm{L} B_a^{\top} \rho_\Theta W_A \rho_\Theta^{\top} \overline{B_a \mathrm{L}} = \mathrm{O}$, so daß sich aufgrund der Abwesenheit von Bindungsknoten in K direkt die Kapselungkonsistenz von G ergibt.

Eigenschaften von J

Bindungstreue:

$$
\begin{aligned}
J^{\mathsf{T}}_{\lceil p_J \rceil} B_1 &= (\rho^{\mathsf{T}}_{\Theta}\kappa_H \sqcup \lambda_H)\kappa^{\mathsf{T}}_H B_a \kappa_H \ \subset\ \rho^{\mathsf{T}}_{\Theta} B_a \kappa_H \ \subset\ B_A \rho^{\mathsf{T}}_{\Theta}\kappa_H \ \subset\ B_A J^{\mathsf{T}}_{\lceil p_J \rceil} \\
J^{\mathsf{T}}_{\lceil p_J \rceil} B_2 &\subset \rho^{\mathsf{T}}_{\Theta}(\rho_\Theta B_A \sqcap \overline{\pi_\Theta \pi^{\mathsf{T}}_\Theta \rho_\Theta})\, \lambda_H \ \subset\ B_A\, \lambda_H \ \subset\ B_A J^{\mathsf{T}}_{\lceil p_J \rceil} \\
J^{\mathsf{T}}_{\lceil p_J \rceil} B_3 &\subset \lambda_H\, \lambda^{\mathsf{T}}_H B_A\, \lambda_H \ \subset\ B_A\, \lambda_H \ \subset\ B_A J^{\mathsf{T}}_{\lceil p_J \rceil}
\end{aligned}
$$

Bindungsüberdeckung:

$$
\begin{aligned}
J_{\lceil p_J \rceil} B_A &= \kappa^{\mathsf{T}}_H \rho_\Theta B_A \sqcup \lambda_H\, B_A \\
&\subset \kappa^{\mathsf{T}}_H B_a \kappa_H \kappa^{\mathsf{T}}_H \rho_\Theta \sqcup \kappa^{\mathsf{T}}_H(\overline{B_a \mathrm{L}} \sqcap \rho_\Theta B_A)\, \lambda_H\, \lambda^{\mathsf{T}}_H \sqcup \lambda_H\, B_A\, \lambda_H\, \lambda^{\mathsf{T}}_H \\
&\subset B_1 J_{\lceil p_J \rceil} \sqcup B_2 J_{\lceil p_J \rceil} \sqcup B_3 J_{\lceil p_J \rceil} \ \subset\ B_H J_{\lceil p_J \rceil}
\end{aligned}
$$

Eigenschaften von $\langle F, J\rangle$

Gerüsterhaltung: $G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}} J_{\lceil p_J \rceil} = F_{\lceil p_F \rceil}\pi^{\mathsf{T}}_\Theta \kappa_H J_{\lceil p_J \rceil} = F_{\lceil p_F \rceil}\pi^{\mathsf{T}}_\Theta \rho_\Theta = F_{\lceil p_F \rceil} N^{\underline{\blacktriangleleft p_N \blacktriangleright}}$

Überlappungsfreiheit: Offensichtlich gilt: $\mathrm{L}\iota_H \sqcup \mathrm{L}\kappa_H \sqcup \mathrm{L}\, N^{\lfloor p_N \rfloor}\, \lambda_H \subset \mathrm{L}\, G^{\lfloor p_G \rfloor}$. Daraus erhalten wir sofort:

$$
\overline{\mathrm{L}\, G^{\lfloor p_G \rfloor}} \subset \overline{\mathrm{L}\, N^{\lfloor p_N \rfloor}\, \lambda_H} \subset \overline{\mathrm{L}\, N^{\lfloor p_N \rfloor}}\, \lambda_H \subset \overline{\mathrm{L}\, N^{\lfloor p_N \rfloor}}\, J^{\mathsf{T}}_{\lceil p_J \rceil}
$$

Kontextinjektivität: Die entsprechende Einschränkung von $J_{\lceil p_J \rceil}$, nämlich $(\mathrm{I} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, G^{\lfloor p_G \rfloor}}) J_{\lceil p_J \rceil} \subset (\mathrm{I} \sqcap \mathrm{L}\, \lambda_H) J_{\lceil p_J \rceil} = \lambda^{\mathsf{T}}_H$, ist *per definitionem* injektiv.

B.4 Variablenidentität

Innerhalb der Kapselgerüste der Schemavariablen gebundene Variable bleiben auf dort beschränkt:

$$W_1 := \kappa^{\mathsf{T}}_H(\rho_\Theta W_A \rho^{\mathsf{T}}_\Theta \sqcap B_a \mathrm{L} \sqcap \pi_\Theta \pi^{\mathsf{T}}_\Theta)\kappa_H$$

Dort freie Variable können sich auch in den Kontext hinaus erstrecken:

$$W_2 := \kappa^{\mathsf{T}}_H(\overline{B_a \mathrm{L}} \sqcap \rho_\Theta W_A)(\rho^{\mathsf{T}}_\Theta \kappa_H \sqcup \lambda_H)$$

Hiervon bilden wir den symmetrischen und — auf Variable beschränkt — reflexiven Abschluß:

$$W_{2a} := W_2 \sqcup W_2^{\mathsf{T}} \sqcup (\mathrm{I} \sqcap \mathrm{L}(v_b \sqcup v_s) M_H^{\mathsf{T}})$$

Variablenidentität im Kontext bleibt erhalten:

$$W_3 := \lambda^{\mathsf{T}}_H W_A\, \lambda_H$$

und muß sich in die Kapselgerüste der Schemavariablen hinein fortsetzen können:

$$W_4 := W_{2a} W_3 W_{2a}$$

All dies zusammen ergibt die Variablenidentität im Wirtsgraphen:

$$W_H := W_1 \sqcup W_{2a} \sqcup W_3 \sqcup W_4$$

Offensichtlich gilt

$$W_H \subset (\kappa_H^{\top}\rho_\Theta \sqcup \lambda_H^{\top})\, W_A (\rho_\Theta^{\top}\kappa_H \sqcup \lambda_H) = J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}\, W_A\, J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top} \;,$$

wobei sich die Ungleichheit aus W_1 ergibt; eine von hier ausgehende alternative Definition von W_H ist die folgende:

$$W_H = (J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}\, W_A\, J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top} \sqcap \overline{\kappa_H^{\top} B_a \mathrm{L}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, B_a^{\top}\kappa_H}) \sqcup W_1$$

Damit ergibt sich noch: $W_H \lambda_H^{\top} = J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}\, W_A\, J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top} \lambda_H^{\top} = J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}\, W_A \sqcap \mathrm{L}\, \lambda_H^{\top}$.

Symmetrie von W_H ist offensichtlich; der Nachweis der Transitivität stützt sich auf eine breite Fallunterscheidung, in deren einzelnen Fällen aber keine Komplikationen auftreten.

Eigenschaften von G

Variablentreue: $G_{\lceil\overline{p_G}\rceil}^{\top}\, W_K = \iota_H^{\top}\, W_K = \mathrm{O} = W_H\, \iota_H^{\top} = W_H\, G_{\lceil\overline{p_G}\rceil}^{\top}$

Erhaltung gebundener Variablen: $G_{\lceil\overline{p_G}\rceil}\, W_H\, G_{\lceil\overline{p_G}\rceil}^{\top} \sqcap B_K B_K^{\top} = \mathrm{O} \subset W_K$

Erhaltung freier Variablen: $G_{\lceil\overline{p_G}\rceil}\, W_H\, G_{\lceil\overline{p_G}\rceil}^{\top} \sqcap \overline{B_K \mathrm{L}} = \mathrm{O} \subset W_K$

Variablenbeherrschung: $(G^{\underline{\lfloor p_G \rfloor}} \sqcap G\!\in_H^{\top})\, W_H \subset \mathrm{L}\, W_H \subset \mathrm{L}\kappa_H \sqcup \mathrm{L}\, \lambda_H = \overline{\mathrm{L}\iota_H} = \overline{\mathrm{L}\, G_{\lceil\overline{p_G}\rceil}}$

Eigenschaften von J

Variablentreue:

$$\begin{array}{lcl}
J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top}\, W_1 & \subset & W_A \rho_\Theta^{\top}\kappa_H \;\subset\; W_A\, J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top} \\
J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top}\, W_2 & \subset & W_A(\rho_\Theta^{\top}\kappa_H \sqcup \lambda_H) \;\subset\; W_A\, J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top} \\
J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top}\, W_2^{\top} & \subset & W_A \rho_\Theta^{\top}\kappa_H \;\subset\; W_A\, J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top} \\
J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top}\, W_3 & \subset & W_A\, \lambda_H \;\subset\; W_A\, J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top} \\
J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top}\, W_4 & \subset & W_A^{*} J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top}\, W_3\, W_{2a} \;\subset\; W_A^{*}\, W_A\, J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top}\, W_{2a} \;\subset\; W_A^{+}\, W_A^{*} J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top} \;=\; W_A\, J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top}
\end{array}$$

Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen: Wir untersuchen die verschiedenen Konstellationen bezüglich der Komponenten von B_H getrennt:

$$\begin{array}{lcl}
J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}\, W_A\, J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top} \sqcap B_1 B_1^{\top} & = & J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}\, W_A\, J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top} \sqcap \kappa_H^{\top} B_a\, B_a^{\top}\kappa_H \;=\; \kappa_H^{\top}\rho_\Theta\, W_A\, \rho_\Theta^{\top}\kappa_H \sqcap \kappa_H^{\top} B_a\, B_a^{\top}\kappa_H \\
 & = & \kappa_H^{\top}(\rho_\Theta\, W_A\, \rho_\Theta^{\top} \sqcap B_a\, B_a^{\top})\kappa_H \;=\; \kappa_H^{\top}(\rho_\Theta\, W_A\, \rho_\Theta^{\top} \sqcap B_a \mathrm{L} \sqcap \pi_\Theta\, \pi_\Theta^{\top})\kappa_H \\
 & = & W_1 \\
J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}\, W_A\, J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top} \sqcap B_2 B_3^{\top} & \subset & J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}\, W_A\, J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top} \sqcap \kappa_H^{\top}(\overline{B_a \mathrm{L}} \sqcap \rho_\Theta\, B_A\, B_A^{\top}\, \lambda_H) \\
 & = & \kappa_H^{\top}\rho_\Theta\, W_A\, \lambda_H \sqcap \kappa_H^{\top}(\overline{B_a \mathrm{L}} \sqcap \rho_\Theta\, B_A\, B_A^{\top}\, \lambda_H) \\
 & = & \kappa_H^{\top}(\rho_\Theta\, W_A \sqcap \overline{B_a \mathrm{L}} \sqcap \rho_\Theta\, B_A\, B_A^{\top})\, \lambda_H \\
 & \subset & W_2 \\
J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}\, W_A\, J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top} \sqcap B_3 B_3^{\top} & \subset & J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}\, W_A\, J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}^{\top} \sqcap \lambda_H^{\top} B_A\, B_A^{\top}\, \lambda_H \;=\; \lambda_H^{\top}\, W_A\, \lambda_H \sqcap \lambda_H^{\top} B_A\, B_A^{\top}\, \lambda_H \;\subset\; W_3
\end{array}$$

Aus diesen Abschätzungen errechnet sich leicht das gewünschte Ergebnis:

$$J_{\lceil p_J\rceil} W_A J^{\mathsf{T}}_{\lceil p_J\rceil} \sqcap B_H B_H^{\mathsf{T}} \subset W_H$$

Erhaltung der Verschiedenheit freier Variablen: Wir nutzen Lemma 6.6.4:

$$\begin{aligned} J_{\lceil p_J\rceil} W_A J^{\mathsf{T}}_{\lceil p_J\rceil} \sqcap \overline{B_H \mathrm{L}} &= J_{\lceil p_J\rceil}(W_A \sqcap \overline{B_A \mathrm{L}}) J^{\mathsf{T}}_{\lceil p_J\rceil} \sqcap \overline{B_H\mathrm{L}} \\ &\subset W_{2a} \sqcup W_3 \\ &\subset W_H \end{aligned}$$

B.5 Korrespondenzen zu G

Der Bildabschnitt unter G einer Schemavariablen in K setzt sich nach der oben angegebenen Formel für $G^{\lfloor p_G \rfloor}$ aus drei Teilen zusammen, von denen die beiden von $N^{\underline{\blacktriangleleft p_N \blacktriangleright}}$ und $N^{\square}$ hergeleiteten zusammen dem Bildabschnitt der entsprechenden Schemavariablen in L entsprechen, und der dritte, vom falschen Bildabschluß $N^{\lceil p_N \rceil}$ hergeleitete, zumindest zum Teil außerhalb dieses Bildabschnittes liegt. Dieser dritte Teil wird daher nicht direkt von den Korrespondenzen $\mathcal{C}_N(x,y)$ erfaßt. Indirekt wirkt sich aber die in den Korrespondenzenbedingungen geforderte Gleichheit der Selbstkapselungsgrenzen dahingehend aus, daß für zwei parallele Schemavariable in K die entsprechenden dritten Teile gleich sind, so daß die Korrespondenzen zu G hier eingeschränkte Identitäten sind. Damit fällt die Definition einer solchen Korrespondenz zu zwei Punkten $x, y : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_K$ mit $x^{\mathsf{T}} y \subset W_K$ (es gilt $xF_{\lceil p_F\rceil} = xF$ und $yF_{\lceil p_F\rceil} = yF$) nicht mehr schwer (sei $\sigma := F(N^{\square}\lambda_H \sqcup \pi_\Theta^{\mathsf{T}}\kappa_H)$):

$$\mathcal{C}_G(x,y) = (\mathrm{I} \sqcap \mathrm{L}\, yFN^{\lceil p_N\rceil}\lambda_H) \sqcup (J_{\lceil p_J\rceil}\mathcal{C}_N(xF,yF)J^{\mathsf{T}}_{\lceil p_J\rceil} \sqcap \sigma^{\mathsf{T}}x^{\mathsf{T}}y\sigma)$$

Die Einschränkung der Bilder der Korrespondenzen zu N ist hierbei nötig, da J nicht semi-injektiv ist und erst diese Einschränkungen $J_{\lceil p_J\rceil} \sqcap \sigma^{\mathsf{T}} z^{\mathsf{T}}\mathrm{L}$ für beliebiges $z : \mathbb{1}\to\mathcal{V}_K$ mit $z \subset p_G$ injektiv sind.

Den länglichen und uninteressanten Nachweis der Korrespondenzeneigenschaften, die sich durch Übertragung derer von $\mathcal{C}_N(xF, yF)$ ergeben, lassen wir hier aus.

B.6 Universelle Eigenschaft

Insgesamt haben wir nun gezeigt, daß $\langle F, J\rangle$ ein Pfeil aus $\mathcal{M}_<$ ist.
Wir betrachten nun einen zweiten Kandidaten $(\underline{G' : K \to H'}, J')$ für die Wirtskonstruktion, also einen Graphen H' zusammen mit einem Homomorphismus G' und einer schwanzlastigen Einbettung J', so daß auch $\langle F, J'\rangle : \underline{G':K\to H'} \xrightarrow{\mathcal{M}_<} \underline{N : L \to A}$ ein Pfeil aus $\mathcal{M}_<$ ist.

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "N"'] & K \arrow[l, "F"'] \arrow[d, "G"] \arrow[ddr, "G'"] & \\ A & & H \arrow[ll, "J"'] & \\ & & & H' \arrow[ulll, "J'"] \arrow[ul, dotted, "U"'] \end{tikzcd}$$

Zum Variablenvektor $p_{G'}$ zu G' überlegt man sich leicht, daß in dem Falle, da einer der beiden Homomorphismen G und G' eine Schemavariable V_n nicht in seinem Variablenvektor enthält, aufgrund der Kommutativität der andere Homomorphismus jedenfalls eine äquivalente Schemavariable als Bildabschnitt enthalten muß — wenn wir jeweils V_n als einzige n-stellige Schemavariablenmarkierung in $\mathcal{N}$ zulassen, dann sogar wieder genau einen mit V_n markierten Knoten.
Damit ist klar, daß o.B.d.A. $p_G = p_{G'} = v_s M_K^{\mathsf{T}}$ angenommen werden kann.

Sei nun $p_g := \mathrm{L}(G^{\mathsf{T}} \sqcap G^{\mathsf{T}} D_K)$ der Vektor der von G leer abgebildeten Schemavariablen. Dann gilt offensichtlich zunächst einmal $p_g = p_n F^{\mathsf{T}}_{\lceil p_F\rceil}$, aber auch $p_g = \mathrm{L}(G'^{\mathsf{T}} \sqcap G'^{\mathsf{T}} D_K)$, d.h.

G' bildet die gleichen Variablen leer ab, wessen man sich angesichts von $G'J' = FN$ leicht vergewissert.

Unsere erste Aufgabe ist es nun, eine Einbettung U zu finden, für die $G'U = G$ und $UJ = J'$ gilt. Wir postulieren:

$$U := G'^{\top}_{\lceil p_{G'}\rceil}\iota_H \sqcup ((G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}})^{\top} F_{\lceil p_F\rceil}\pi_\Theta^{\top} \sqcap J'_{\lceil p_{J'}\rceil}\rho_\Theta^{\top})\kappa_H \sqcup (\mathrm{I} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}})J'_{\lceil p_{J'}\rceil}\lambda_H$$

Damit gilt offensichtlich $U \sqcap \overline{\mathrm{L}\iota_H} \subset J'_{\lceil p_{J'}\rceil} J^{\top}_{\lceil p_J\rceil}$. Wir beweisen, daß U eine p_U-Einbettung ist mit $p_U = \mathrm{O}$:

Totalität

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}\,U^{\top} &= \mathrm{L}(\iota_H^{\top} G'_{\lceil p_{G'}\rceil} \sqcup \kappa_H^{\top}(\pi_\Theta F^{\top}_{\lceil p_F\rceil} G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}} \sqcap \rho_\Theta J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}) \sqcup (\lambda_H^{\top} J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}}))\\
&= \mathrm{L}\iota_H^{\top} G'_{\lceil p_{G'}\rceil} \sqcup \mathrm{L}\kappa_H^{\top}(\pi_\Theta F^{\top}_{\lceil p_F\rceil} G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}} \sqcap \rho_\Theta J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}) \sqcup (\mathrm{L}\lambda_H^{\top} J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}})\\
&= \mathrm{L}p_F\, G'_{\lceil p_{G'}\rceil} \sqcup \mathrm{L}(F^{\top}_{\lceil p_F\rceil} G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}} \sqcap \pi_\Theta^{\top}\rho_\Theta J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}) \sqcup (\mathrm{L}J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}})\\
&= \mathrm{L}G'_{\lceil p_{G'}\rceil} \sqcup \mathrm{L}(F^{\top}_{\lceil p_F\rceil} G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}} \sqcap F^{\top}_{\lceil p_F\rceil}\mathrm{L} \sqcap N^{\underline{\blacktriangleleft p_N\blacktriangleright}} J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}) \sqcup (\mathrm{L}J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}})\\
&= \quad \langle \text{Lemma A.2.2} \rangle\\
&\ \mathrm{L}(J^{\lfloor p_J\rfloor})^{\top} \sqcup (\mathrm{L}\, G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}} \sqcap \mathrm{L}J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}) \sqcup (\mathrm{L}J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}})\\
&= \mathrm{L}(J^{\lfloor p_J\rfloor})^{\top} \sqcup \mathrm{L}J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}) \ = \ \mathrm{L}J^{\top} \ = \ \mathrm{L}
\end{aligned}$$

Eindeutigkeit (und Surjektivität)

Die Disjunktheit des Definitionsbereiches der ersten Komponente mit denen der anderen beiden folgt über $\mathrm{L}G'_{\lceil p_{G'}\rceil} \sqcap \mathrm{L}J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil} = \mathrm{O}$ daraus, daß G' v_p-definitiv ist, in A keine Platzhalter vorkommen dürfen und daß H' außer $\mathrm{L}G'_{\lceil p_{G'}\rceil}$ keine Platzhalter enthält. Daraus folgt auch $\mathrm{L}\lambda_H^{\top} \subset \mathrm{L}J'_{\lceil p_{J'}\rceil}$, was wir für die vorletzte Gleichung brauchen.

$$\begin{aligned}
U^{\top}U &= (\iota_H^{\top} G'_{\lceil p_{G'}\rceil} \sqcup \kappa_H^{\top}(\pi_\Theta F^{\top}_{\lceil p_F\rceil} G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}} \sqcap \rho_\Theta J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}) \sqcup (\lambda_H^{\top} J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}}))\,U\\
&= \iota_H^{\top} G'_{\lceil p_{G'}\rceil} G'^{\top}_{\lceil p_{G'}\rceil}\iota_H\\
&\ \sqcup \kappa_H^{\top}(\pi_\Theta F^{\top}_{\lceil p_F\rceil} G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}} \sqcap \rho_\Theta J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil})((G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}})^{\top} F_{\lceil p_F\rceil}\pi_\Theta^{\top} \sqcap J'_{\lceil p_{J'}\rceil}\rho_\Theta^{\top})\kappa_H^{\top}\\
&\ \sqcup \lambda_H^{\top}(J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}})(\mathrm{I} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}})J'_{\lceil p_{J'}\rceil}\lambda_H\\
&= \quad \langle G' \text{ semiinjektiv} \rangle\\
&\ \iota_H^{\top}\iota_H \sqcup \kappa_H^{\top}(\pi_\Theta F^{\top}_{\lceil p_F\rceil} G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}(G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}})^{\top} F_{\lceil p_F\rceil}\pi_\Theta^{\top} \sqcap \rho_\Theta J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil} J'_{\lceil p_{J'}\rceil}\rho_\Theta^{\top})\kappa_H\\
&\ \sqcup \lambda_H^{\top} J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil} J'_{\lceil p_{J'}\rceil}\lambda_H\\
&= \quad \left\langle G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}} \text{ injektiv} \right\rangle\\
&\ \iota_H^{\top}\iota_H \sqcup \kappa_H^{\top}(\pi_\Theta\pi_\Theta^{\top} \sqcap \rho_\Theta\rho_\Theta^{\top})\kappa_H \sqcup \lambda_H^{\top}\lambda_H\\
&= \mathrm{I}
\end{aligned}$$

Wir haben uns dabei darauf gestützt, daß wegen der Gerüstüberschneidungsfreiheit von G' das Kapselgerüst $G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}$ injektiv sein muß. Da es keine Platzhalter enthalten kann, erhalten wir auch noch

$$G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'} \blacktriangleright}}\, U \;=\; G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'} \blacktriangleright}}((G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'} \blacktriangleright}})^{\mathsf{T}} F_{\lceil p_F \rceil}\, \pi_\Theta^{\mathsf{T}} \sqcap J'_{\lceil p_{J'} \rceil}\, \rho_\Theta^{\mathsf{T}})\kappa_H \subset F_{\lceil p_F \rceil}\, \pi_\Theta^{\mathsf{T}} \kappa_H \;=\; G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}}$$

Faktorisierung

$$UJ = U\iota_H^{\mathsf{T}} FN \sqcup J'_{\lceil p_{J'} \rceil} J^{\mathsf{T}}_{\lceil p_J \rceil} J \subset G'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{G'} \rceil} FN \sqcup J'_{\lceil p_{J'} \rceil} \;\subset\; G'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{G'} \rceil} G' J' \sqcup J'_{\lceil p_{J'} \rceil} \;\subset\; J'$$

Da UJ total ist und J' eindeutig, gilt Gleichheit.

$$\begin{aligned}
G'U \;&=\; G' G'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{G'} \rceil} \iota_H \sqcup (G'(G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'} \blacktriangleright}})^{\mathsf{T}} F_{\lceil p_F \rceil}\, \pi_\Theta^{\mathsf{T}} \sqcap G' J'_{\lceil p_{J'} \rceil}\, \rho_\Theta^{\mathsf{T}})\kappa_H \\
&\quad \sqcup (G' \sqcap \overline{\mathrm{L}\, G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'} \blacktriangleright}}}) J'_{\lceil p_{J'} \rceil}\, \lambda_H \\
&=\; \iota_H \sqcup (\overline{p_g^{\mathsf{T}} \mathrm{L}} \sqcap D_K \iota_H) \sqcup (G'(G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'} \blacktriangleright}})^{\mathsf{T}} F_{\lceil p_F \rceil}\, \pi_\Theta^{\mathsf{T}} \sqcap F_{\lceil p_F \rceil} N \rho_\Theta^{\mathsf{T}})\kappa_H \\
&\quad \sqcup G'_{\lceil p_{G'} \rceil} J'_{\lceil p_{J'} \rceil}\, \lambda_H \sqcup (G' \sqcap \overline{p_g^{\mathsf{T}} \mathrm{L}}) J'_{\lceil p_{J'} \rceil}\, \lambda_H \sqcup (G' J'_{\lceil p_{J'} \rceil} \sqcap F_{\lceil p_F \rceil} N^{\Box})\, \lambda_H \\
&=\; \iota_H \sqcup (F_{\lceil p_F \rceil} \overline{p_n^{\mathsf{T}} \mathrm{L}} \sqcap D_K \iota_H) \sqcup F_{\lceil p_F \rceil}(\pi_\Theta^{\mathsf{T}} \sqcap N \rho_\Theta^{\mathsf{T}})\kappa_H \sqcup \mathrm{O} \sqcup (F_{\lceil p_F \rceil} N \sqcap F_{\lceil p_F \rceil} N^{\Box})\, \lambda_H \\
&=\; \iota_H \sqcup (F_{\lceil p_F \rceil} \overline{p_n^{\mathsf{T}} \mathrm{L}} \sqcap D_K \iota_H) \sqcup F_{\lceil p_F \rceil}(\pi_\Theta^{\mathsf{T}} \sqcap N \rho_\Theta^{\mathsf{T}})\kappa_H \sqcup F_{\lceil p_F \rceil}(\overline{p_n^{\mathsf{T}} \mathrm{L}} \sqcap \overline{\pi_\Theta^{\mathsf{T}} \mathrm{L}} \sqcap N\, \lambda_H) \\
&=\; G
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt noch:

$$G^{\mathsf{T}} G' \subset G^{\mathsf{T}} G' U U^{\mathsf{T}} \subset G^{\mathsf{T}} G U^{\mathsf{T}} \subset U^{\mathsf{T}}$$

Markierungstreue

$$U^{\mathsf{T}}_{\lceil p_U \rceil} M_{H'} \subset \iota_H^{\mathsf{T}} G'_{\lceil p_{G'} \rceil} M_{H'} \sqcup (\kappa_H^{\mathsf{T}} \rho_\Theta \sqcup \lambda_H^{\mathsf{T}}) J'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{J'} \rceil} M_{H'} \;\subset\; \iota_H^{\mathsf{T}} M_K \sqcup (\kappa_H^{\mathsf{T}} \rho_\Theta \sqcup \lambda_H^{\mathsf{T}}) M_A \;=\; M_H$$

Nachfolgertreue

Nach Zerlegung von $U^{\mathsf{T}}_{\lceil p_U \rceil}$ in seine Komponenten:

$$U^{\mathsf{T}}_{\lceil p_U \rceil} S_{H',i} \;=\; (\iota_H^{\mathsf{T}} G'_{\lceil p_{G'} \rceil} \sqcup \kappa_H^{\mathsf{T}}(\pi_\Theta F^{\mathsf{T}}_{\lceil p_F \rceil} G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'} \blacktriangleright}} \sqcap \rho_\Theta J'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{J'} \rceil}) \sqcup (\lambda_H^{\mathsf{T}} J'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{J'} \rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, G'^{\underline{\blacktriangleleft p_{G'} \blacktriangleright}}})) S_{H',i}$$

ergibt sich die Nachfolgertreue im Detail nach Überlegungen parallel zu den bei der Definition von $S_{H,i}$ angestellten. Unter Auslassung einiger Zwischenschritte ist der wesentliche Beweisablauf der folgende:

$$
\begin{aligned}
&\iota_H^\top G'_{\lceil p_{G'}\rceil} S_{H',i} \;\subset\; \iota_H^\top S_{K,i} G' \;\subset\; \iota_H^\top S_{K,i} G G^\top G' \;\subset\; S_{1,i} G^\top G' \;\subset\; S_{1,i} U^\top \\
&\kappa_H^\top(\pi_\Theta F^\top_{\lceil p_F\rceil} \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}} \sqcap \rho_\Theta J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil}) S_{H',i} \\
&\quad = \kappa_H^\top(\pi_\Theta F^\top_{\lceil p_F\rceil} \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}} \sqcap \rho_\Theta S_{A,i} J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil}) \\
&\qquad \sqcup \kappa_H^\top((\rho_\Theta S_{A,i} \sqcap \overline{\pi_\Theta \pi_\Theta^\top \rho_\Theta}) N^\top S_L^\top \sqcap [\![\pi^\top, \mathcal{I}_{N,i}]\!])(F^\top_{\lceil p_F\rceil} \| \mathrm{I}) S_K G'_{\lceil p_{G'}\rceil} \\
&\qquad \sqcup \kappa_H^\top(\rho_\Theta S_{A,i} \sqcap \overline{\pi_\Theta \pi_\Theta^\top \rho_\Theta} \sqcap \overline{\pi_\Theta D_L N})(J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \rho_\Theta S_{A,i} J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil}) \\
&\quad = S_{2,i} \kappa_H^\top(\pi_\Theta F^\top_{\lceil p_F\rceil} \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}} \sqcap \rho_\Theta J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil}) \sqcup S_{3,i} \iota_H^\top G'_{\lceil p_{G'}\rceil} \sqcup S_{4,i}(\lambda_H^\top J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}}) \\
&\quad \subset S_{H,i} U^\top \\
&(\lambda_H^\top J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}}) S_{H',i} \\
&\quad = (\lambda_H^\top S_{A,i} J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}}) \sqcup (\lambda_H^\top S_{A,i} J'^\top \sqcap \mathrm{L}\, p_{g'}) \\
&\quad = (\lambda_H^\top S_{A,i}\, \lambda_H\, \lambda_H^\top J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}}) \sqcup (\lambda_H^\top S_{A,i}(N^\top F^\top \sqcap \mathrm{L}\omega_K) G') \\
&\quad = \lambda_H^\top S_{A,i}\, \lambda_H\, (\lambda_H^\top J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}}) \sqcup (\lambda_H^\top S_{A,i}(N^\top F^\top \sqcap \mathrm{L}\omega_K) \iota_H \iota_H^\top G') \\
&\quad = S_{5,i} U^\top
\end{aligned}
$$

Bindungstreue

$$
\begin{aligned}
&U^\top_{\lceil p_U\rceil} B_{H'} = (\iota_H^\top G'_{\lceil p_{G'}\rceil} \sqcup \kappa_H^\top(\pi_\Theta F^\top_{\lceil p_F\rceil} \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}} \sqcap \rho_\Theta J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil}) \sqcup (\lambda_H^\top J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}})) B_{H'} \\
&\quad = \iota_H^\top G'_{\lceil p_{G'}\rceil} B_{H'} \sqcup \kappa_H^\top(\pi_\Theta F^\top_{\lceil p_F\rceil} \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}} \sqcap \rho_\Theta J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil}) B_{H'} \sqcup (\lambda_H^\top J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}}) B_{H'} \\
&\quad \subset \mathrm{O} \sqcup \kappa_H^\top(\pi_\Theta F^\top_{\lceil p_F\rceil} \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}} \sqcap \rho_\Theta J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap B_a \mathrm{L}) B_{H'} \\
&\qquad \sqcup \kappa_H^\top(\pi_\Theta F^\top_{\lceil p_F\rceil} \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}} \sqcap \rho_\Theta J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \overline{B_a \mathrm{L}}) B_{H'} \sqcup (\lambda_H^\top J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil} B_{H'} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}}) \\
&\quad \subset \kappa_H^\top(\pi_\Theta F^\top_{\lceil p_F\rceil} \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}} \sqcap \rho_\Theta B_A J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap B_a \mathrm{L}) \sqcup \kappa_H^\top(\rho_\Theta J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil} B_{H'} \sqcap \overline{B_a \mathrm{L}} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}}) \\
&\qquad \sqcup (\lambda_H^\top B_A J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}}) \\
&\quad \subset \kappa_H^\top(\pi_\Theta F^\top_{\lceil p_F\rceil} \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}} \sqcap B_a \rho_\Theta J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil}) \sqcup (\kappa_H^\top(\rho_\Theta B_A \sqcap \overline{B_a \mathrm{L}}) J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}}) \\
&\qquad \sqcup (\lambda_H^\top B_A\, \lambda_H\, \lambda_H^\top J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}}) \\
&\quad \subset \kappa_H^\top B_a \kappa_H \kappa_H^\top(\rho_\Theta J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \pi_\Theta F^\top_{\lceil p_F\rceil} \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}) \\
&\qquad \sqcup (\kappa_H^\top(\rho_\Theta B_A \sqcap \overline{B_a \mathrm{L}})\, \lambda_H\, \lambda_H^\top J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}}) \sqcup B_H U^\top_{\lceil p_U\rceil} \\
&\quad \subset B_H U^\top_{\lceil p_U\rceil} \sqcup \kappa_H^\top(\rho_\Theta B_A \sqcap \overline{B_a \mathrm{L}})\, \lambda_H\, (\lambda_H^\top J'^\top_{\lceil p_{J'}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, \underline{G'^{\blacktriangleleft p_{G'}\blacktriangleright}}}) \sqcup B_H U^\top_{\lceil p_U\rceil} \\
&\quad \subset B_H U^\top_{\lceil p_U\rceil}
\end{aligned}
$$

Variablentreue

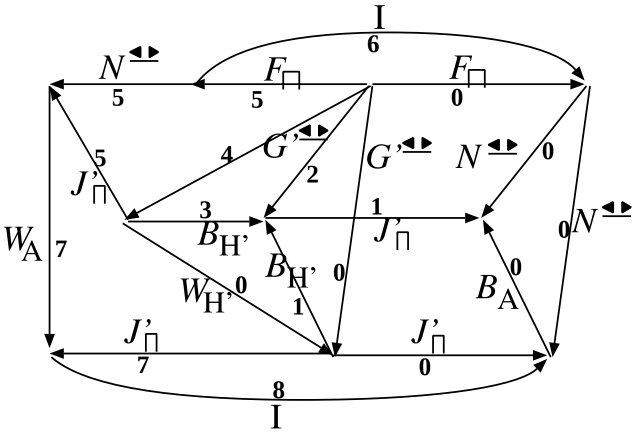
Wir werden $U^\top_{\lceil p_U\rceil} W_{H'} U_{\lceil p_U\rceil} \subset W_H$ zeigen; daraus folgt über die Totalität von $U_{\lceil p_U\rceil}$ mit $U^\top_{\lceil p_U\rceil} W_{H'} \subset U^\top_{\lceil p_U\rceil} W_{H'} U_{\lceil p_U\rceil} U^\top_{\lceil p_U\rceil} \subset W_H U^\top_{\lceil p_U\rceil}$ die Variablentreue. Zunächst gilt $W_{H'} \subset \overline{\mathrm{L}\, G'_{\lceil p_{G'}\rceil}}$, und wir erhalten mit der Variablentreue von J':

$$U^{\mathsf{T}}_{\lceil p_U \rceil} W_{H'} U_{\lceil p_U \rceil} = J_{\lceil p_J \rceil} J'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{J'} \rceil} W_{H'} J'_{\lceil p_{J'} \rceil} J_{\lceil p_J \rceil} \subset J_{\lceil p_J \rceil} W_H J'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{J'} \rceil} J'_{\lceil p_{J'} \rceil} J_{\lceil p_J \rceil} \subset J_{\lceil p_J \rceil} W_A J_{\lceil p_J \rceil}$$

Wir betrachten nun die Einschränkung auf innerhalb der Kapselgerüste gebundene Variable:

$$\begin{aligned}
U^{\mathsf{T}}_{\lceil p_U \rceil} W_{H'} U_{\lceil p_U \rceil} \sqcap \mathrm{L} B^{\mathsf{T}}_a \kappa_H &= (U^{\mathsf{T}}_{\lceil p_U \rceil} W_{H'} ((G' \xrightarrow{\blacktriangleleft p_{G'} \blacktriangleright})^{\mathsf{T}} F_{\lceil p_F \rceil} \pi^{\mathsf{T}}_{\Theta} \sqcap J'_{\lceil p_{J'} \rceil} \rho^{\mathsf{T}}_{\Theta}) \sqcap \mathrm{L} B^{\mathsf{T}}_a) \kappa_H \\
&\subset (U^{\mathsf{T}}_{\lceil p_U \rceil} W_{H'} ((G' \xrightarrow{\blacktriangleleft p_{G'} \blacktriangleright})^{\mathsf{T}} F_{\lceil p_F \rceil} \pi^{\mathsf{T}}_{\Theta} \sqcap J'_{\lceil p_{J'} \rceil} \rho^{\mathsf{T}}_{\Theta}) \sqcap \mathrm{L} (\pi_{\Theta} \pi^{\mathsf{T}}_{\Theta} \sqcap \rho_{\Theta} B^{\mathsf{T}}_A \rho^{\mathsf{T}}_{\Theta})) \kappa_H \\
&\subset \quad \langle \text{siehe Diagramm unten} \rangle \\
&\quad\ \kappa^{\mathsf{T}}_H (\rho_{\Theta} W_A \rho^{\mathsf{T}}_{\Theta} \sqcap B_a \mathrm{L} \sqcap \pi_{\Theta} \pi^{\mathsf{T}}_{\Theta}) \kappa_H \\
&= W_1
\end{aligned}$$

Das folgende Diagramm ist dabei so zu lesen, daß nur von den mit **0** markierten Kanten ausgegangen wird und für jede folgende Zahl die entsprechend markierten Kanten aus bereits vorhandenen gemäß der Erklärung unter dem Diagramm hervorgehen:



0: gegeben; die Pfeile mit $N \xrightarrow{\blacktriangleleft p_N \blacktriangleright}$ ergeben sich aus $\pi^{\mathsf{T}}_{\Theta} \rho_{\Theta}$

1: Bindungsüberdeckung von J'

2: Lemma A.2.2

3: Bindungserhaltung der Variablenidentität

4: Kapselgerüst ist Graphausschnitt (Lemma 5.3.2)

5: Selektion der zweiten Komponente von $U^{\mathsf{T}}_{\lceil p_U \rceil}$, Injektivität des Kapselgerüstes $G' \xrightarrow{\blacktriangleleft p_{G'} \blacktriangleright}$

6: Eindeutigkeit von F

7: Variablentreue von J'

8: Eindeutigkeit von J'

Aufgrund der Symmetrie von $W_{H'}$ ist damit $U^{\mathsf{T}}_{\lceil p_U \rceil} W_{H'} U_{\lceil p_U \rceil} \subset W_H$ bewiesen, woraus die Variablentreue von U folgt.

Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen

Unter Einsatz der bei Definition der Variablenidentität erwähnten Abschätzung erhalten wir sofort:

$$U_{\lceil p_U \rceil} W_H U^{\mathsf{T}}_{\lceil p_U \rceil} \sqcap B_{H'} B^{\mathsf{T}}_{H'} \subset U J_{\lceil p_J \rceil} W_A J^{\mathsf{T}}_{\lceil p_J \rceil} U^{\mathsf{T}} \sqcap B_{H'} B^{\mathsf{T}}_{H'} \subset J'_{\lceil p_{J'} \rceil} W_A J'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{J'} \rceil} \sqcap B_{H'} B^{\mathsf{T}}_{H'} \subset W_{H'}$$

Eindeutige Bestimmung von U

Sei U' eine weitere Einbettung von H' nach H mit $G'U' = G$ und $U'J = J'$. Dann gilt zunächst mit der Gerüsterhaltung von $\langle F, J'\rangle$:

$$G'\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}\,U' \subset G'\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}\,U'JJ^{\mathsf{T}} = G'\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}\,J'J^{\mathsf{T}} \subset F_{\lceil\overline{p_F}\rceil}\,N\underline{\blacktriangleleft p_N \blacktriangleright}\,J^{\mathsf{T}} \subset G\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}\,JJ^{\mathsf{T}}$$

Zusammen mit der Nachfolgertreue von U' läßt sich hieraus $G'\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}\,U' \subset G\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}$ herleiten. Dann erhalten wir:

$$\begin{array}{rcl}
U^{\mathsf{T}}U' & = & \iota_H^{\mathsf{T}}\,G'_{\lceil\overline{p_{G'}}\rceil}\,U' \sqcup \kappa_H^{\mathsf{T}}(\pi_\Theta\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil}\,G'\underline{\blacktriangleleft p_{G'} \blacktriangleright} \sqcap \rho_\Theta\,J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil})\,U' \sqcup (\lambda_H^{\mathsf{T}}\,J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\,G'\underline{\blacktriangleleft p_{G'} \blacktriangleright}})\,U' \\
 & \subset & \iota_H^{\mathsf{T}}\,G \sqcup \kappa_H^{\mathsf{T}}(\pi_\Theta\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil}\,G'\underline{\blacktriangleleft p_{G'} \blacktriangleright} \sqcap \rho_\Theta\,J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil})\,U' \sqcup \lambda_H^{\mathsf{T}}\,J^{\mathsf{T}}\,U'^{\mathsf{T}}\,U' \\
 & \subset & \mathrm{I} \sqcup \kappa_H^{\mathsf{T}}(\pi_\Theta\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil}\,G'\underline{\blacktriangleleft p_{G'} \blacktriangleright} \sqcap \rho_\Theta\,J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil})\,U' \sqcup \mathrm{I} \\
 & = & \mathrm{I} \sqcup \kappa_H^{\mathsf{T}}(\pi_\Theta\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil}\,G'\underline{\blacktriangleleft p_{G'} \blacktriangleright} \sqcap \rho_\Theta\,J^{\mathsf{T}}\,U'^{\mathsf{T}})\,U' \\
 & = & \mathrm{I} \sqcup \kappa_H^{\mathsf{T}}(\pi_\Theta\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil}\,G'\underline{\blacktriangleleft p_{G'} \blacktriangleright}\,U' \sqcap \rho_\Theta\,J^{\mathsf{T}}) \\
 & \subset & \mathrm{I} \sqcup \kappa_H^{\mathsf{T}}(\pi_\Theta\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil}\,G\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright} \sqcap \rho_\Theta\,J^{\mathsf{T}}) \\
 & = & \mathrm{I} \sqcup \kappa_H^{\mathsf{T}}(\pi_\Theta\,F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil}\,F_{\lceil\overline{p_F}\rceil}\,\pi_\Theta^{\mathsf{T}}\kappa_H \sqcap \rho_\Theta\,J^{\mathsf{T}}) \\
 & \subset & \mathrm{I} \sqcup \kappa_H^{\mathsf{T}}(\pi_\Theta\,\pi_\Theta^{\mathsf{T}}\kappa_H \sqcap \rho_\Theta\,\rho_\Theta^{\mathsf{T}}\kappa_H) \\
 & = & \mathrm{I} \sqcup \kappa_H^{\mathsf{T}}(\pi_\Theta\,\pi_\Theta^{\mathsf{T}} \sqcap \rho_\Theta\,\rho_\Theta^{\mathsf{T}})\kappa_H \\
 & = & \mathrm{I}
\end{array}$$

Da U und U' beide total sind, folgt daraus $U = U'$.

Anhang C

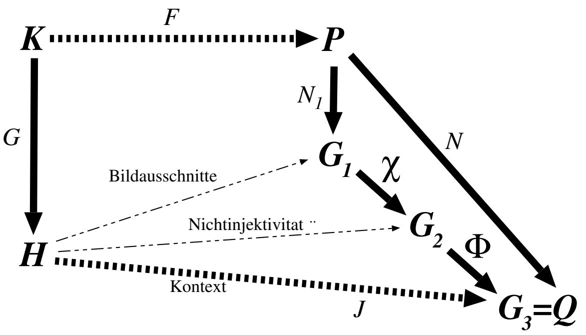
Pseudo-Pushout

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, dotted, "F"] \arrow[d, "G"'] & P \arrow[d, "N"] \\ H \arrow[r, dotted, "J"] & Q \end{tikzcd}$$

Wir gehen aus von einem virtuellen Patterngraphen $K \in \mathcal{P}_{\mathrm{V}}$ (dem Klebegraphen), einem reellen Patterngraphen $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{R}}$ (der rechten Regelseite), einem Patternpfeil F von K in P, d.h. einer semiinjektiven, variableninjektiven und basiskonsistenten v_p-Überdeckung, so daß $\mathcal{X} := \mathcal{X}_F$ eindeutig ist, einem virtuellen (Wirts-)Graphen $H \in \mathcal{O}_{\mathrm{V}}$ und einem virtuellen Homomorphismus G von K in H; G ist also nichtzyklisch, gerüstüberschneidungsfrei, gerüsteinstiegsfrei einstiegsbasiert, semiinjektiv und v_p-definitiv und H enthält nur die Platzhaltervariablen, die Bilder derer in K sind: $v_p M_H^{\mathsf{T}} = v_p M_K^{\mathsf{T}} G$.

Gesucht sind nun ein reeller (Ergebnis-)Graph $Q \in \mathcal{O}_{\mathrm{R}}$, ein reeller Homomorphismus N von P in Q, und eine v_p-Überdeckung J von H in Q, so daß obiges Diagramm ein Pseudo-Pushout ist.

Im Intervallkontext läge es nahe, die Konstruktion des Pseudo-Pushout-Graphen Q in drei Etappen aufzugliedern. Da P durch einen Homomorphismus in Q eingebettet werden muß, orientierten wir uns in erster Linie an P und erst in zweiter an H. So konstruierten wir zunächst ein homomorphes Bild G_1 des Patterngraphen P, in dem die Schemavariablen instantiiert würden. Der zweite Schritt wäre die Errechnung einer Identifizierung R, die die nichtinjektiven Anteile aus G berücksichtigte; die zweite Etappe wäre dann der Quotientengraph $G_2 = G_1/_R$. Schließlich müßten wir G_2 noch in den Kontext aus H einbetten, wofür wir einen neuen Graphen G_3 konstruierten und einen injektiven O-Homomorphismus Φ von G_2 in G_3. Damit gälte dann: $Q = G_3$.



Im Abschnittskontext tauchen bei einem solchen Vorgehen jedoch einige Probleme auf. Zunächst reicht eine reine Instantiierung der Schemavariablen nicht aus, um G_1 zu einem Graphen zu machen — auch die Vorgänger der Selbstkapselungsgrenzen müssen mit Nachfolgern versorgt werden. Dafür kämen zum Beispiel neue Platzhaltervariablen in Frage, wenn man nicht gleich mehr Kontext einführen will. Entsprechend gestaltet sich dann auch die Identifizierung zu G_2 um einiges komplizierter. Schließlich wäre Φ gerade noch semiinjektiv, aber wegen Einführung der neuen Platzhalter ggf. kein O-Homomorphismus mehr.

Statt der Vorteile einer Modularisierung handelte man sich so also nur neue Probleme ein, so daß wir Q doch in einem Schritt konstruieren werden.

C.1 Grundlagen der Konstruktion von Q

Spezifikation der Knotenmenge von Q

Wir müssen uns nun zunächst Gedanken über die Knotenmenge von Q machen. Wir werden hierzu verschiedene disjunkte Teilmengen heranziehen, was wir zuerst motivieren wollen.

Da P durch einen Homomorphismus N in Q eingebettet werden wird, orientieren wir uns in erster Linie an P und erst in zweiter an H. Die „konstanten“ Knoten aus P, also die außerhalb der Schemavariablen, müssen sozusagen direkt übernommen werden. Die Schemavariablen in P errechnen sich als die Bilder der Schemavariablen in K, die dann noch zu einem Variablenvektor abgeschlossen werden müssen:

$$p_N := p_G F W_P = \mathrm{L}\mathcal{X}^{\mathrm{T}}$$

Die Bildabschnitte dieser Schemavariablen werden Graphausschnitte sein, die solchen in H entsprechen.

Was jetzt noch nicht abgedeckt ist, ist der Kontext aus H, der außerhalb des Kapselgerüstes von K liegt. Auch diese Knoten müssen wieder direkt übernommen werden.

Wir werden die Knotenmenge von Q daher als dreigeteilte direkte Summe definieren. Als Injektionen für die direkt zu übernehmenden Knoten wählen wir partielle Funktionen:

$$\begin{array}{rlcrcl} \iota_Q : & \mathcal{V}_P \rightarrowtail\!\!\!\!\!\!\leftrightarrow \mathcal{V}_Q & \qquad & \mathrm{L}\iota_Q^{\mathrm{T}} & = & \overline{\mathrm{L}p_N} \\ \kappa_Q : & \mathcal{V}_H \rightarrowtail\!\!\!\!\!\!\leftrightarrow \mathcal{V}_Q & & \mathrm{L}\kappa_Q^{\mathrm{T}} & = & \overline{\mathrm{L}\,G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}} \\ \lambda_Q : & \Xi \rightarrowtail \mathcal{V}_Q & & & & \end{array}$$

Der Ausgangsbereich Ξ für die Bilder des dritten Teils, der die Kapselgerüste der Bilder der Schemavariablen umfassen wird, lehnen wir an die Kapselgerüste der Bilder der Schemavariablen im Klebegraph an und definieren ihn als partielles direktes Produkt (siehe Definition 2.5.8):

$$(\ \Xi : \mathbb{P}(\mathcal{V}_P \times \mathcal{V}_H)\ ,\ \pi_\Xi\ ,\ \rho_\Xi\ ,\ \mathcal{X}\,\underline{G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}}\ )\ .$$

Daraus folgt sofort: $\mathrm{L}\pi_\Xi \subset p_N$ und $\mathrm{L}\rho_\Xi = \mathrm{L}\,\underline{G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}}$.

Kandidat für N

Wie oben bereits angesprochen, müssen die „konstanten“ Knoten aus P direkt übernommen werden — dies geschieht durch ι_Q — und die Schemavariablen müssen ihre Instantiierung eines entsprechenden Graphausschnittes in H zugewiesen bekommen. Die Spitze des jeweiligen Graphausschnittes wird durch $\mathcal{X}G$ bestimmt. Anschließend muß nur noch über die Projektionen ein passender Punkt aus Ξ ausgewählt werden — falls diese Spitze innerhalb des Kapselgerüstes liegt. Dieses kann nämlich, wie im Falle von Blattvariablen, auch dann leer sein, wenn der Bildabschluß nichtleer ist, und in diesen Fällen wird das Bild durch κ_Q bestimmt (eine andere Variable kommt hier aufgrund der Gerüstüberschneidungsfreiheit nicht in Frage).

Dem Ganzen wird $\mathcal{Z}_{P,p_n}$, die in Definition 6.4.4 eingeführte p_n-Ignoration in P, vorgeschaltet. Diese sorgt nur dafür, daß den von F leer abzubildenden Schemavariablen ein konsistentes Bild zugeordnet wird. Dabei ist $p_n : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_P$ der Vektor dieser von N leer abzubildenden Schemavariablen, der sich folgendermaßen (aus den durch G leer abgebildeten $p_g := p_G \sqcap \mathrm{L}(G^{\mathrm{T}} \sqcap G^{\mathrm{T}} D_K^{\mathrm{T}})$) berechnet: $p_n := p_g F W_P$. Als Kandidaten für den Homomorphismus von P nach Q erhalten wir also:

$$N := \mathcal{Z}_{P,p_n}(\iota_Q \sqcup \mathcal{X}G\kappa_Q \sqcup (\mathcal{X}G\rho_\Xi^{\mathrm{T}} \sqcap \pi_\Xi^{\mathrm{T}})\,\lambda_Q)$$

Es gilt offensichtlich $N_{\lceil\overline{p_N}\rceil} = N \sqcap \overline{p_N^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} = \iota_Q$. Totalität von N läßt sich folgendermaßen zeigen:

$$
\begin{aligned}
N\mathrm{L} &= \mathcal{Z}_{P,p_n}(\iota_Q\mathrm{L} \sqcup \mathcal{X}G\kappa_Q\mathrm{L} \sqcup (\mathcal{X}G\rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} \sqcap \pi_{\Xi}^{\mathsf{T}})\,\lambda_Q\,\mathrm{L})\\
&= \mathcal{Z}_{P,p_n}(\overline{p_N^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcup \mathcal{X}G\overline{(G^{\blacktriangleleft p_G\blacktriangleright})^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcup (\mathcal{X}G\rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} \sqcap \pi_{\Xi}^{\mathsf{T}})\mathrm{L})\\
&= \mathcal{Z}_{P,p_n}(\overline{p_N^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcup \mathcal{X}\overline{G(G^{\blacktriangleleft p_G\blacktriangleright})^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcup (\mathcal{X}G\rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} \sqcap \pi_{\Xi}^{\mathsf{T}})\rho_{\Xi}\mathrm{L})\\
&= \mathcal{Z}_{P,p_n}(\overline{p_N^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcup \mathcal{X}\overline{G(G^{\blacktriangleleft p_G\blacktriangleright})^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcup (\mathcal{X}G \sqcap \pi_{\Xi}^{\mathsf{T}}\rho_{\Xi})\mathrm{L})\\
&= \mathcal{Z}_{P,p_n}(\overline{p_N^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcup \mathcal{X}\overline{G(G^{\blacktriangleleft p_G\blacktriangleright})^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcup (\mathcal{X}G \sqcap \mathcal{X}G^{\underline{\blacktriangleleft p_G\blacktriangleright}})\mathrm{L})\\
&= \mathcal{Z}_{P,p_n}(\overline{p_N^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcup \mathcal{X}(\overline{G(G^{\blacktriangleleft p_G\blacktriangleright})^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcup (G \sqcap G^{\underline{\blacktriangleleft p_G\blacktriangleright}})\mathrm{L}))\\
&= \mathcal{Z}_{P,p_n}(\overline{p_N^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcup \mathcal{X}\overline{p_g^{\mathsf{T}}\mathrm{L}}) \;=\; \mathcal{Z}_{P,p_n}(\overline{p_N^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \sqcup (p_N^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap \overline{p_n^{\mathsf{T}}\mathrm{L}}))\\
&= \mathcal{Z}_{P,p_n}\overline{p_n^{\mathsf{T}}\mathrm{L}} \;=\; \mathrm{L}
\end{aligned}
$$

Auch der Beweis der Eindeutigkeit birgt keine besonderen Schwierigkeiten. Als Hilfsaussage zeigen wir, daß die gemischten Terme verschwinden:

$$
\begin{aligned}
&\iota_Q^{\mathsf{T}}\mathcal{X}G\kappa_Q \;\subset\; \mathrm{L}\iota_Q^{\mathsf{T}}\mathcal{X}\mathrm{L} \;\subset\; \overline{\mathrm{L}p_N}\,p_N^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \;=\; \mathrm{O}\\
&\iota_Q^{\mathsf{T}}(\mathcal{X}G\rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} \sqcap \pi_{\Xi}^{\mathsf{T}})\,\lambda_Q \;\subset\; \mathrm{L}\iota_Q^{\mathsf{T}}\mathcal{X}\mathrm{L} \;\subset\; \overline{\mathrm{L}p_N}\,p_N^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \;\subset\; \mathrm{O}\\
&\kappa_Q^{\mathsf{T}}G^{\mathsf{T}}\mathcal{X}^{\mathsf{T}}(\mathcal{X}G\rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} \sqcap \pi_{\Xi}^{\mathsf{T}})\,\lambda_Q \;\subset\; \kappa_Q^{\mathsf{T}}G^{\mathsf{T}}G\rho_{\Xi}^{\mathsf{T}}\lambda_Q \;\subset\; \mathrm{L}\kappa_Q^{\mathsf{T}}\rho_{\Xi}^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \;\subset\; \overline{\mathrm{L}\,G^{\blacktriangleleft p_G\blacktriangleright}}(G^{\blacktriangleleft p_G\blacktriangleright})^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \;\subset\; \mathrm{O}
\end{aligned}
$$

Damit wird der eigentliche Beweis erheblich kürzer; wichtig ist noch, daß $\mathcal{Z}_{P,p_n}$ eindeutig ist, da Schemavariable in p_g aufgrund der scharfen Auflösung virtueller Homomorphismen höchstens einen Nachfolger haben:

$$
\begin{aligned}
N^{\mathsf{T}}N &= (\iota_Q^{\mathsf{T}} \sqcup \kappa_Q^{\mathsf{T}}G^{\mathsf{T}}\mathcal{X}^{\mathsf{T}} \sqcup \lambda_Q^{\mathsf{T}}(\rho_{\Xi}G^{\mathsf{T}}\mathcal{X}^{\mathsf{T}} \sqcap \pi_{\Xi}))\mathcal{Z}_{P,p_n}^{\mathsf{T}}\mathcal{Z}_{P,p_n}(\iota_Q \sqcup \mathcal{X}G\kappa_Q \sqcup (\mathcal{X}G\rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} \sqcap \pi_{\Xi}^{\mathsf{T}})\,\lambda_Q)\\
&= (\iota_Q^{\mathsf{T}} \sqcup \kappa_Q^{\mathsf{T}}G^{\mathsf{T}}\mathcal{X}^{\mathsf{T}} \sqcup \lambda_Q^{\mathsf{T}}(\rho_{\Xi}G^{\mathsf{T}}\mathcal{X}^{\mathsf{T}} \sqcap \pi_{\Xi}))(\iota_Q \sqcup \mathcal{X}G\kappa_Q \sqcup (\mathcal{X}G\rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} \sqcap \pi_{\Xi}^{\mathsf{T}})\,\lambda_Q)\\
&\subset \iota_Q^{\mathsf{T}}\iota_Q \sqcup \kappa_Q^{\mathsf{T}}G^{\mathsf{T}}\mathcal{X}^{\mathsf{T}}\mathcal{X}G\kappa_Q \sqcup \lambda_Q^{\mathsf{T}}(\rho_{\Xi}G^{\mathsf{T}}\mathcal{X}^{\mathsf{T}}\mathcal{X}G\rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} \sqcap \pi_{\Xi}\pi_{\Xi}^{\mathsf{T}})\,\lambda_Q\\
&\subset \mathrm{I} \sqcup \mathrm{I} \sqcup \lambda_Q^{\mathsf{T}}(\rho_{\Xi}\rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} \sqcap \pi_{\Xi}\pi_{\Xi}^{\mathsf{T}})\,\lambda_Q = \mathrm{I} \sqcup \lambda_Q^{\mathsf{T}}\lambda_Q = \mathrm{I}
\end{aligned}
$$

Kandidat für J

Für die Einbettung von H in Q ist die Übernahme der Kontextknoten durch κ_Q klar. Zu Knoten, die in den Kapselgerüsten von Schemavariablen enthalten sind, findet man über $G^{\underline{\blacktriangleleft p_G\blacktriangleright}}F_{\lceil\overline{p_F}\rceil}$ die entsprechende Schemavariable in P, und kann dann wieder über die Projektionen einen passenden Punkt aus Ξ selektieren. Bleiben noch die Platzhalter, die ja selbst wieder Bilder von Platzhaltern in K sind. Unter Ausnutzung dieses Faktums, also $p_J := p_F\,G$, können wir diesen Platzhaltern über $G^{\mathsf{T}}F$ zunächst die entsprechende Instantiierung in P zuordnen, um sie dann mittels N ihrem Bild in Q zuzuführen:

$$
\begin{aligned}
J &:= \kappa_Q \sqcup (\rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} \sqcap (G^{\underline{\blacktriangleleft p_G\blacktriangleright}})^{\mathsf{T}}F_{\lceil\overline{p_F}\rceil}\pi_{\Xi}^{\mathsf{T}})\,\lambda_Q \sqcup (p_J^{\mathsf{T}}\mathrm{L} \sqcap G^{\mathsf{T}}FN)\\
&= \kappa_Q \sqcup (\rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} \sqcap (G^{\underline{\blacktriangleleft p_G\blacktriangleright}})^{\mathsf{T}}F_{\lceil\overline{p_F}\rceil}\pi_{\Xi}^{\mathsf{T}})\,\lambda_Q \sqcup G_{\lceil\overline{p_G}\rceil}^{\mathsf{T}}FN
\end{aligned}
$$

Die Gleichheit gilt in dieser strengen Form nur aufgrund der Objektfreiheit von K.

Die bezüglich der Eindeutigkeit von J zunächst kritisch erscheinende zweite Komponente dieser Relation ist aufgrund der Gerüstüberschneidungsfreiheit von G eindeutig, und damit ist ganz J eindeutig.

Auch daß J total ist, läßt sich problemlos zeigen:

$$\begin{aligned}
J\mathrm{L} &= \kappa_Q \mathrm{L} \sqcup (\rho_\Xi^\mathsf{T} \sqcap (G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}})^\mathsf{T} F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \pi_\Xi^\mathsf{T})\, \lambda_Q\, \mathrm{L} \sqcup (p_J^\mathsf{T}\mathrm{L} \sqcap G^\mathsf{T} FN)\mathrm{L} \\
&= \overline{(G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright})^\mathsf{T}\mathrm{L}} \sqcup (\rho_\Xi^\mathsf{T} \sqcap (G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}})^\mathsf{T} F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \pi_\Xi^\mathsf{T})\rho_\Xi \mathrm{L} \sqcup G^\mathsf{T}_{\lceil\overline{p_G}\rceil} FN\mathrm{L} \qquad \langle\, \rho_\Xi \mathrm{L} = \mathrm{L} = \lambda_Q\, \mathrm{L} \,\rangle \\
&= \overline{(G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright})^\mathsf{T}\mathrm{L}} \sqcup (\mathrm{I} \sqcap (G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}})^\mathsf{T} F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \mathcal{X}\, G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}})\mathrm{L} \sqcup G^\mathsf{T}_{\lceil\overline{p_G}\rceil} F\mathrm{L} \\
&= \overline{(G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright})^\mathsf{T}\mathrm{L}} \sqcup (\mathrm{I} \sqcap (G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}})^\mathsf{T} G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}})\mathrm{L} \sqcup G^\mathsf{T}_{\lceil\overline{p_G}\rceil} \mathrm{L} \\
&= \overline{(G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright})^\mathsf{T}\mathrm{L}} \sqcup (G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}})^\mathsf{T}\mathrm{L} \sqcup (G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright} \sqcap \overline{p_G^\mathsf{T}\mathrm{L}})^\mathsf{T}\mathrm{L} \\
&= \mathrm{L}
\end{aligned}$$

Ebenso die Semiinjektivität von J:

$$J_{\lceil\overline{p_J}\rceil} J^\mathsf{T}_{\lceil\overline{p_J}\rceil} \subset \kappa_Q \kappa_Q^\mathsf{T} \sqcup \rho_\Xi^\mathsf{T} \lambda_Q\, \lambda_Q^\mathsf{T} \rho_\Xi \subset \mathrm{I} \sqcup \rho_\Xi^\mathsf{T} \rho_\Xi \subset \mathrm{I}$$

Kommutativität

Wir zeigen nun, daß das soweit festgelegte Pseudo-Pushout-Diagramm kommutiert, also daß $FN = GJ$ gilt. Wir betrachten zunächst nur den Teil außerhalb der von G leer abgebildeten Schemavariablen p_g:

$$\begin{aligned}
FN \sqcap \overline{p_g^\mathsf{T}\mathrm{L}} &= (FN \sqcap \overline{p_g^\mathsf{T}\mathrm{L}} \sqcap p_F^\mathsf{T}\mathrm{L}) \sqcup (FN \sqcap \overline{p_g^\mathsf{T}\mathrm{L}} \sqcap \overline{p_F^\mathsf{T}\mathrm{L}}) \\
&= (FN \sqcap p_F^\mathsf{T}\mathrm{L}) \sqcup (F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} N \sqcap \overline{p_g^\mathsf{T}\mathrm{L}}) \\
&= (FN \sqcap \overline{p_G^\mathsf{T}\mathrm{L}}) \sqcup F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} (N \sqcap \overline{p_n^\mathsf{T}\mathrm{L}}) \\
&= G_{\lceil\overline{p_G}\rceil} G^\mathsf{T}_{\lceil\overline{p_G}\rceil} FN \sqcup F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} (\iota_Q \sqcup \mathcal{X} G \kappa_Q \sqcup (\mathcal{X} G \rho_\Xi^\mathsf{T} \sqcap \pi_\Xi^\mathsf{T})\, \lambda_Q) \\
&= G_{\lceil\overline{p_G}\rceil} J \sqcup F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \iota_Q \sqcup F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \mathcal{X} G \kappa_Q \sqcup F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} (\mathcal{X} G \rho_\Xi^\mathsf{T} \sqcap \pi_\Xi^\mathsf{T})\, \lambda_Q \\
&= G_{\lceil\overline{p_G}\rceil} J \sqcup \mathrm{O} \sqcup (G\kappa_Q \sqcap p_G^\mathsf{T}\mathrm{L}) \sqcup (F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \mathcal{X} G \rho_\Xi^\mathsf{T} \sqcap F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \pi_\Xi^\mathsf{T})\, \lambda_Q \\
&= G_{\lceil\overline{p_G}\rceil} J \sqcup (G\kappa_Q \sqcap p_G^\mathsf{T}\mathrm{L}) \sqcup ((G \sqcap G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}})\rho_\Xi^\mathsf{T} \sqcap F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \pi_\Xi^\mathsf{T})\, \lambda_Q \\
&\subset G_{\lceil\overline{p_G}\rceil} J \sqcup (G\kappa_Q \sqcap p_G^\mathsf{T}\mathrm{L}) \sqcup (G \sqcap G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}})(\rho_\Xi^\mathsf{T} \sqcap (G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}})^\mathsf{T} F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \pi_\Xi^\mathsf{T})\, \lambda_Q \\
&= GJ \sqcap \overline{p_g^\mathsf{T}\mathrm{L}}
\end{aligned}$$

, Dies führen wir nun mit dem den von G leer abgebildeten Schemavariablen entsprechenden Teil zusammen. Wegen der Eindeutigkeit beider Seiten und der Gleichheit ihrer Definitionsbereiche gilt auch insgesamt Gleichheit: $FN \sqcap \overline{p_g^\mathsf{T}\mathrm{L}} = GJ \sqcap \overline{p_g^\mathsf{T}\mathrm{L}}$ und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
GJ &= \mathcal{Z}_{K,p_g}(G \sqcap \overline{p_g^\mathsf{T}\mathrm{L}})J \;=\; \mathcal{Z}_{K,p_g}(GJ \sqcap \overline{p_g^\mathsf{T}\mathrm{L}}) \\
&= \mathcal{Z}_{K,p_g}(FN \sqcap \overline{p_g^\mathsf{T}\mathrm{L}}) \;=\; \mathcal{Z}_{K,p_g}(F \sqcap \overline{p_g^\mathsf{T}\mathrm{L}})N \\
&= F\mathcal{Z}_{P,p_n}(N \sqcap \overline{p_n^\mathsf{T}\mathrm{L}}) \;=\; FN
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt, da die Knoten in p_G, also insbesondere auch in p_g, für die Einbettung F Konstante sind, auf denen F nachfolgertreu ist. Dabei gehen natürlich noch die Konsistenz von G und auch die Konsistenz von N mit ein.

Knotenmarkierung

Die Knotenmarkierung von Q ergibt sich für die Bildknoten von ι_Q aus der von P, sonst aus der von H:

$$M_Q := \iota_Q^{\mathsf{T}} M_P \sqcup \kappa_Q^{\mathsf{T}} M_H \sqcup \lambda_Q^{\mathsf{T}} \rho_\Xi M_H$$

Totalität und Eindeutigkeit sind offensichtlich.

Markierungstreue von N: $N^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_N}\rceil} M_P = \iota_Q^{\mathsf{T}} M_P \subset M_Q$

Markierungstreue von J: $J^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_J}\rceil} M_H \subset \kappa_Q^{\mathsf{T}} M_H \sqcup \lambda_Q^{\mathsf{T}} \rho_\Xi M_H \subset M_Q$

C.2 Nachfolgerfunktionen

Definition

Auf aus P übernommenen konstanten Knoten orientiert sich $S_{Q,i}$ an P:

$$S_{a,i} := \iota_Q^{\mathsf{T}} S_{P,i} N$$

Ein Knoten x innerhalb des Kapselgerüstes einer Schemavariablen orientiert sich an seinem Urbildknoten $x\lambda_Q^{\mathsf{T}}\rho_\Xi$, sofern dessen Nachfolger im gleichen Bild liegt:

$$S_{b,i} := \lambda_Q^{\mathsf{T}} (\rho_\Xi S_{H,i} \rho_\Xi^{\mathsf{T}} \sqcap \pi_\Xi \pi_\Xi^{\mathsf{T}})\, \lambda_Q \supset \lambda_Q^{\mathsf{T}} (\rho_\Xi S_{H,i} \sqcap \pi_\Xi \pi_\Xi^{\mathsf{T}} \rho_\Xi) J$$

Wenn ein Nachfolger des Urbildknotens von x nicht im Kapselgerüst einer der Schemavariablen aus $x\pi_\Xi$ liegt, gibt es zwei Möglichkeiten. Die erste ist, daß der Nachfolger Bild des Nachfolgers der Schemavariablen ist. Wie schon bei der Wirtskonstruktion müssen wir uns auch hier des Bildausganges — siehe Definition 8.7.2 — bedienen:

$$\begin{array}{rcl} S_{c,i} & := & \lambda_Q^{\mathsf{T}} (((\rho_\Xi S_{H,i} \sqcap \overline{\pi_\Xi \pi_\Xi^{\mathsf{T}} \rho_\Xi})\, G^{\mathsf{T}} S_K^{\mathsf{T}} \sqcap \rho_\Xi \mathcal{I}_{G,i})(\mathcal{X}^{\mathsf{T}} \| \mathrm{I}) \sqcap \pi_\Xi \pi^{\mathsf{T}}) S_P N \\ & = & \lambda_Q^{\mathsf{T}} \llbracket\, \pi^{\mathsf{T}}, \mathcal{I}_{G,i}(\mathcal{X}^{\mathsf{T}} \| \mathrm{I})\, \rrbracket S_P N \\ & \supset & \lambda_Q^{\mathsf{T}} (\rho_\Xi S_{H,i} \sqcap \overline{\pi_\Xi \pi_\Xi^{\mathsf{T}} \rho_\Xi} \sqcap \pi_\Xi \mathcal{X} D_K G) J \end{array}$$

Die zweite Möglichkeit ist, daß der Nachfolger des Urbildes von x z.B. in der Selbstkapselungsgrenze oder einfach sonst außerhalb des Kapselgerüstes liegt. Aufgrund der Gerüstüberschneidungsfreiheit von G und Lemma 7.5.2 (zusammen mit der Tatsache, daß keine Selbstkapselungsgrenze von G Bild eines konstanten Knotens aus K sein kann) kann der entsprechende Nachfolgerknoten für x in jedem Fall über κ_Q bestimmt werden:

$$S_{d,i} := \lambda_Q^{\mathsf{T}} (\rho_\Xi S_{H,i} \sqcap \overline{\pi_\Xi \pi_\Xi^{\mathsf{T}} \rho_\Xi} \sqcap \overline{\pi_\Xi \mathcal{X} D_K G}) \kappa_Q$$

Statt κ_Q kann man hier natürlich auch J schreiben.

Die Nachfolger von Kontextknoten werden über die Einbettung J bestimmt:

$$S_{e,i} := \kappa_Q^{\mathsf{T}} S_{H,i} J$$

Die Nachfolgerfunktionen von Q setzen sich nun aus diesen fünf Bestandteilen zusammen:

$$S_{Q,i} := S_{a,i} \sqcup S_{b,i} \sqcup S_{c,i} \sqcup S_{d,i} \sqcup S_{e,i}$$

Die bei $S_{b,i}$ und $S_{c,i}$ zusätzlich angegebenen und leicht nachzuprüfenden Abschätzungen ergeben zusammen mit der Definition von $S_{d,i}$ die Gesamtabschätzung $S_{Q,i} \supset \lambda_Q^{\mathsf{T}} \rho_\Xi S_{H,i} J$, die für den Nachweis der Nachfolgertreue von J nützlich sein wird.

Eigenschaften der Nachfolgerfunktionen

Die Eindeutigkeit der Nachfolgerfunktionen ergibt sich ohne Probleme. Die Markierungskompatibilität zeigt man wie folgt:

$$\begin{aligned}
n \subset \mathrm{L}S^{\top}_{Q,i} &\Leftrightarrow n \subset \mathrm{L}S^{\top}_{a,i} \sqcup \mathrm{L}(S_{b,i} \sqcup S_{c,i} \sqcup S_{d,i})^{\top} \sqcup \mathrm{L}S^{\top}_{e,i} \\
&\Leftrightarrow n \subset \mathrm{L}N^{\top}S^{\top}_{P,i}\iota_Q \sqcup \mathrm{L}S^{\top}_{H,i}\rho^{\top}_{\Xi}\lambda_Q \sqcup \mathrm{L}J^{\top}S^{\top}_{H,i}\kappa_Q \\
&\Leftrightarrow n \subset \mathrm{L}S^{\top}_{P,i}\iota_Q \sqcup \mathrm{L}S^{\top}_{H,i}\rho^{\top}_{\Xi}\lambda_Q \sqcup \mathrm{L}S^{\top}_{H,i}\kappa_Q \\
&\Leftrightarrow (n \subset \mathrm{L}\iota_Q \ \wedge\ n\iota^{\top}_Q \subset \mathrm{L}S^{\top}_{P,i}) \ \vee\ (n \subset \mathrm{L}\,\lambda_Q \ \wedge\ n\lambda^{\top}_Q\rho_{\Xi} \subset \mathrm{L}S^{\top}_{H,i}) \ \vee \\
&\qquad (n \subset \mathrm{L}\kappa_Q \ \wedge\ n\kappa^{\top}_Q \subset \mathrm{L}S^{\top}_{H,i}) \\
&\Leftrightarrow (n \subset \mathrm{L}\iota_Q \ \wedge\ i \subset n\iota^{\top}_Q M_P E) \ \vee\ (n \subset \mathrm{L}\,\lambda_Q \ \wedge\ i \subset n\lambda^{\top}_Q\rho_{\Xi} M_H E) \ \vee \\
&\qquad (n \subset \mathrm{L}\kappa_Q \ \wedge\ i \subset n\kappa^{\top}_Q M_H E) \\
&\Leftrightarrow \quad \langle \text{stärkste Bedingung der konjunktiven Normalform} \rangle \\
&\qquad i \subset n\iota^{\top}_Q M_P E \ \vee\ i \subset n\lambda^{\top}_Q\rho_{\Xi} M_H E \ \vee\ i \subset n\kappa^{\top}_Q M_H E \\
&\Leftrightarrow i \subset n(\iota^{\top}_Q M_P \sqcup \lambda^{\top}_Q\rho_{\Xi} M_H \sqcup \kappa^{\top}_Q M_H)E \\
&\Leftrightarrow i \subset nM_1E
\end{aligned}$$

Eigenschaften von N und J

Nachfolgertreue von N: $N^{\top}_{\lceil \overline{p_N} \rceil} S_{P,i} = \iota^{\top}_Q S_{P,i} \subset \iota^{\top}_Q S_{P,i} N N^{\top} = S_{a,i}N^{\top} \subset S_{Q,i}N^{\top}$

Nachfolgertreue von J:

$$J^{\top}_{\lceil \overline{p_J} \rceil} S_{H,i} \subset \kappa^{\top}_Q S_{H,i} \sqcup \lambda^{\top}_Q(\rho_{\Xi} \sqcap \pi_{\Xi} F^{\top} G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}) S_{H,i} \subset \kappa^{\top}_Q S_{H,i} J J^{\top} \sqcup \lambda^{\top}_Q \rho_{\Xi} S_{H,i} J J^{\top} \subset S_{Q,i} J^{\top}$$

J ist überdeckend, da $J_{\lceil \overline{p_J} \rceil}$ den gesamten Kontext erfaßt und durch den Intervallkontext Überdeckung von $\mathrm{L}ND^{*}_{Q}$ gewährleistet ist.

C.3 Bindung

Definition

Knoten aus $\mathrm{L}N_{\lceil \overline{p_N} \rceil}$ können nur ebensolche binden:

$$B_a := \iota^{\top}_Q B_P \iota_Q$$

Bindung nach innerhalb der Kapselgerüste der Schemavariablen wegen Konformität auch nur von dort (sei $B_h := \rho_{\Xi} B_H \rho^{\top}_{\Xi} \sqcap \pi_{\Xi}\pi^{\top}_{\Xi}$):

$$B_b := \lambda^{\top}_Q B_h \lambda_Q$$

Von Kontextknoten gebundene Variable können im Kapselgerüst von Schemavariablen liegen:

$$B_c := \lambda^{\top}_Q \rho_{\Xi} B_H \kappa_Q$$

oder wieder im Kontext:

$$B_d := \kappa^{\top}_Q B_H \kappa_Q$$

Die Bindungsfunktion von Q setzt sich nun aus diesen vier Teilen zusammen:

$$B_Q := B_a \sqcup B_b \sqcup B_c \sqcup B_d$$

Insbesondere folgt damit $\iota_Q B_Q \kappa_Q^\top = \mathbb{O}$ und sogar $\overline{B_P^\top} \iota_Q B_Q = \mathbb{O}$, d.h. in P freie Variable können in Q nicht gebunden sein. Bei der Umsetzung von Termgraphregeln in Fiberregeln wirkt sich dies dahingehend aus, daß freie (Objekt-)Variable nicht im Bereich des Sharing der beiden Regelseiten liegen dürfen, da ihre Bindungen im Bild der linken Regelseite durch die Ersetzung verlorengingen. Damit erhalten wir eine Bedingung, die der bei Combinatory Reduction Systems vorhandenen Beschränkung der Regelseiten auf geschlossene Terme ähnelt. (Genauer entspricht dies dem Verbot der „Interferenz“ in [Wol].)

Bindungseigenschaften

Eindeutigkeit von B_h und damit auch von B_1 ist offensichtlich; auch die Bindung nur an konstante Konstruktoren ist ohne weiteres gewährleistet:

$$\begin{aligned}
\mathbb{L} B_Q M_Q &= \mathbb{L} B_a M_Q \sqcup \mathbb{L} B_b M_Q \sqcup \mathbb{L} B_c M_Q \sqcup \mathbb{L} B_d M_Q \\
&= \mathbb{L} \iota_Q^\top B_P \iota_Q \iota_Q^\top M_P \sqcup \mathbb{L} \lambda_Q^\top B_h \lambda_Q \lambda_Q^\top \rho_\Xi M_H \sqcup \mathbb{L} \lambda_Q^\top \rho_\Xi B_H \kappa_Q \kappa_Q^\top M_H \sqcup \mathbb{L} \kappa_Q^\top B_H \kappa_Q \kappa_Q^\top M_H \\
&\subset \mathbb{L} B_P M_P \sqcup \mathbb{L} B_h \rho_\Xi M_H \sqcup \mathbb{L} B_H M_H \\
&= \mathbb{L} k \sqcup \mathbb{L} \rho_\Xi B_H M_H \\
&= \mathbb{L} k
\end{aligned}$$

Erreichbarkeit der gebundenen Variablen vom bindenden Konstruktor aus folgt für den konstant aus P übernommenen Teil aus der Totalität und Kohärenz von N:

$$B_a^\top = \iota_Q^\top B_P^\top \iota_Q \subset \iota_Q^\top D_P^+ \iota_Q \subset (N^\top D_P N)^+ \subset D_Q^+$$

In die letzte Inklusion geht noch $B_Q \subset \overline{\mathbb{I}}$ ein, was allerdings gemäß der Definition von B_Q offensichtlich ist. Innerhalb der (bindungsabgeschlossenen) Bilder der Schemavariablen überträgt sich die Erreichbarkeit direkt von H:

$$B_b^\top = \lambda_Q^\top B_h^\top \lambda_Q \subset \lambda_Q^\top D_h^+ \lambda_Q \subset D_Q^+$$

Der Anteil von B_d, für den ein Pfad rein innerhalb von $\mathbb{L}\kappa_Q^\top$ verläuft, bereitet auch keine Probleme. Für B_c und die übrigen Fälle von B_d gilt, daß der Bindungsknoten oberhalb des Bildes unter N der kapselungsfreien Basis von P liegen muß (d.h. es gibt einen Basisknoten, dessen Bild von diesem Bindungsknoten aus erreichbar ist). Die gebundene Variable aber ist in diesen Fällen von einem der Bilder von Basisknoten aus erreichbar. Aus der Kapselungseinheitlichkeit von G zusammen mit der Tatsache, daß F eine Überdeckung ist, folgt dann die Erreichbarkeit der gebundenen Variablen von ihren Bindungsknoten aus.

Dominierung innerhalb von $\mathbb{L}\lambda_Q$ ist trivial, da es keine „Seiteneinstiege“ in die Komponenten gibt. Für $\mathbb{L}\iota_Q$ überträgt sich die Dominierung von B_P wegen der Kohärenz (und mangels anderer „Einstiege“ in die Gerüste der Bilder der Schemavariablen). Für $\mathbb{L}\kappa_Q$ muß man wieder auf die Kapselungseinheitlichkeit von G zurückgreifen.

Eigenschaften von N

Ohne den uninteressanten und sehr länglichen Beweis geben wir den Bildabschluß von N an (G ist v_p-definitiv!):

$$N^{\lfloor p_N \rfloor} = \iota_Q \sqcup \mathcal{X}(G^{\lfloor p_G \rfloor} \sqcap \overline{G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}}) J_{\lceil \overline{p_J} \rceil} \sqcup \pi_\Xi^\top \lambda_Q \quad .$$

Dies gilt, da wir die Selbstkapselungsgrenze von N direkt aus der von G gewinnen:

$$\underline{N^{\rfloor p_N \lfloor}} = \underline{G^{\rfloor p_G \lfloor}}\kappa_Q \quad .$$

Auch das Kapselgerüst überträgt sich von G (über die Definition von Ξ):

$$\underline{N^{\blacktriangleleft p_N \blacktriangleright}} = \pi_\Xi^\top \lambda_Q \quad .$$

Die Konsistenz von N zu überprüfen erübrigt sich, da P v_s-zulässig ist. Die Kohärenz von N ist aus der Konstruktion heraus offensichtlich; der Beweis ist extrem aufwendig ohne interessant zu sein, so daß wir ihn auslassen.

Bindungstreue: $N_{\lceil p_N \rceil}^\top B_P = \iota_Q^\top B_P = \iota_Q^\top B_P \sqcap \overline{\mathrm{L}\, p_N} = \iota_Q^\top B_P \iota_Q \iota_Q^\top = B_a \iota_Q^\top = B_Q \iota_Q^\top = B_Q N_{\lceil p_N \rceil}^\top$

Bindungsbeherrschung:

$$\begin{aligned}
N_{\lceil p_N \rceil} B_Q \subset B_P N_{\lceil p_N \rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L}\, N^{\lfloor p_N \rfloor}} \quad &\Leftrightarrow \quad N_{\lceil p_N \rceil} B_Q \sqcap \overline{B_P N_{\lceil p_N \rceil}} \subset \overline{\mathrm{L}\, N^{\lfloor p_N \rfloor}} \\
&\Leftrightarrow \quad \iota_Q B_Q \sqcap \overline{B_P \iota_Q} \subset \overline{\mathrm{L}\, N^{\lfloor p_N \rfloor}} \\
&\Leftrightarrow \quad (\iota_Q \iota_Q^\top B_P \iota_Q \sqcap \overline{B_P \iota_Q}) \subset \overline{\mathrm{L}\, N^{\lfloor p_N \rfloor}} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{O} \subset \overline{\mathrm{L}\, N^{\lfloor p_N \rfloor}}
\end{aligned}$$

Kapselungseinheitlichkeit ist problemlos auf die von G zurückführbar, da es aufgrund der Basiskonsistenz des Patternpfeiles F zu P eine kapselungsfreie Basis gibt, die unter F im Bild der kapselungsfreien Basis von K enthalten ist.

Konformität ist offensichtlich, da in den Bildern der Schemavariablen nur lokale Bindungen $(B_b \sqcup B_d)$ bestehen, die auch durch Selbstkapselungsgrenzen nicht unterbrochen werden können, da dies sich sonst auf G übertragen würde und dort einen Widerspruch zur Konformität ergäbe.

Eigenschaften von J

Bindungstreue:

$$\begin{aligned}
B_Q J_{\lceil p_J \rceil}^\top &= B_Q \kappa_Q^\top \sqcup B_Q \lambda_Q^\top (\rho_\Xi \sqcap \pi_\Xi F_{\lceil p_F \rceil}^\top G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}) \\
&= (\kappa_Q^\top \sqcup \lambda_Q^\top \rho_\Xi) B_H \kappa_Q \kappa_Q^\top \sqcup \lambda_Q^\top B_h (\rho_\Xi \sqcap \pi_\Xi F_{\lceil p_F \rceil}^\top G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}) \\
&\supset J_{\lceil p_J \rceil}^\top B_H \kappa_Q \kappa_Q^\top \sqcup \lambda_Q^\top (\rho_\Xi \sqcap \pi_\Xi F_{\lceil p_F \rceil}^\top G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}) B_H (\mathrm{I} \sqcap \mathrm{L} \rho_\Xi) \\
&= J_{\lceil p_J \rceil}^\top B_H \kappa_Q \kappa_Q^\top \sqcup \lambda_Q^\top (\rho_\Xi \sqcap \pi_\Xi F_{\lceil p_F \rceil}^\top G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}) B_H (\mathrm{I} \sqcap \mathrm{L}\, G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}) \\
&= J_{\lceil p_J \rceil}^\top B_H
\end{aligned}$$

Bindungsüberdeckung:

$$\begin{aligned}
J_{\lceil p_J \rceil} B_Q &= \kappa_Q B_Q \sqcup (\rho_\Xi^\top \sqcap (G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright})^\top F_{\lceil p_F \rceil} \pi_\Xi^\top)\, \lambda_Q\, B_Q \\
&= B_H \kappa_Q \sqcup B_H \kappa_Q \sqcup (\rho_\Xi^\top \sqcap (G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright})^\top F_{\lceil p_F \rceil} \pi_\Xi^\top) B_h\, \lambda_Q \\
&\subset B_H J_{\lceil p_J \rceil}
\end{aligned}$$

Eigenschaften von $\langle F, J \rangle$

Überlappungsfreiheit ergibt sich aus dem Bildabschluß von N:

$$\overline{\mathrm{L}\, G^{\lfloor p_G \rfloor}}\, J_{\lceil p_J \rceil} = \overline{\mathrm{L}\, G^{\lfloor p_G \rfloor}}\, \kappa_Q \subset \overline{\mathrm{L}\, N^{\lfloor p_N \rfloor}} \quad .$$

Gerüsterhaltung folgt aus der Injektivität des Kapselgerüstes von G:

$$\underline{G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}} J_{\lceil p_J \rceil} = \underline{G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}} (\rho_\Xi^\top \sqcap (\underline{G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}})^\top F_{\lceil p_F \rceil} \pi_\Xi^\top)\, \lambda_Q \subset F_{\lceil p_F \rceil} \pi_\Xi^\top \lambda_Q = F_{\lceil p_F \rceil} \underline{N^{\blacktriangleleft p_N \blacktriangleright}} \quad .$$

C.4 Variablenidentität

Definition

Im Bild von $N_{\lceil \overline{p_N} \rceil}$ trivial:

$$W_a := \iota_Q^\top W_P \iota_Q$$

Innerhalb des Kapselgerüstes einer Schemavariablen gebundene Variablen liegen komplett innerhalb dieses Kapselgerüstes:

$$W_b := \lambda_Q^\top (\rho_\Xi W_H \rho_\Xi^\top \sqcap B_h \mathrm{L} \sqcap \pi_\Xi \pi_\Xi^\top)\, \lambda_Q$$

Innerhalb des Kapselgerüstes einer Schemavariablen freie Variable erstrecken sich mindestens über die Bilder aller parallelen Knoten der Schemavariablen:

$$W_c := \lambda_Q^\top (\rho_\Xi W_H \rho_\Xi^\top \sqcap \overline{B_h \mathrm{L}})\, \lambda_Q$$

Bei selbstkapselnden Bildern — also im allgemeinen im Intervallkontext — hätte die Unterscheidung statt nach $B_h \mathrm{L}$ nach $\lbag \text{€}_H, \mathcal{X} G \rbag \mathrm{L}$ durchgeführt werden müssen (siehe auch Lemma 5.3.4).

Auch dann hätte es noch Probleme gegeben — erst mit Lemma 7.3.5 erhalten wir dank der Kapselungseinheitlichkeit hier im Abschnittskontext eine konsistente Unterscheidung; im Intervallkontext wäre es noch möglich gewesen, daß eine Variable im Bild der einen Schemavariablen frei, in dem einer anderen aber gebunden vorkommt.

Im Kontext erhalten wir zunächst:

$$W_d := J_{\lceil \overline{p_J} \rceil}^\top W_H J_{\lceil \overline{p_J} \rceil}$$

Dieser Anteil kann auf W_c übergreifen:

$$W_e := (W_c \sqcup \mathrm{I})\, W_d (W_c \sqcup \mathrm{I})$$

Dabei kommt wegen der Variableninjektivität von F keine Gefahr für intern gebundene Variablen auf.

Die Variablenidentität in Q ist die Vereinigung dieser Teile:

$$W_Q := W_a \sqcup W_b \sqcup W_c \sqcup W_e \quad .$$

Eigenschaften der Variablenidentität

Symmetrie und Transitivität sind nach der Konstruktion offensichtlich. Die Markierungskompatibilität läßt sich problemlos herrechnen. Zunächst erhalten wir:

$$(W_b \sqcup W_c) M_Q \subset \lambda_Q^\top \rho_\Xi W_H \rho_\Xi^\top \lambda_Q \lambda_Q^\top \rho_\Xi M_H \subset \lambda_Q^\top \rho_\Xi W_H M_H \subset \lambda_Q^\top \rho_\Xi M_H \subset M_Q$$

und

$$W_d M_Q \subset J_{\lceil \overline{p_J} \rceil}^\top W_H J_{\lceil \overline{p_J} \rceil} M_Q \subset J_{\lceil \overline{p_J} \rceil}^\top W_H M_H \subset J_{\lceil \overline{p_J} \rceil}^\top M_H \subset M_Q$$

und damit

$$\begin{aligned}
W_Q M_Q &= W_a M_Q \sqcup (W_b \sqcup W_c) M_Q \sqcup W_e M_Q \\
&\subset \iota_Q^\top W_P M_P \sqcup M_Q \sqcup (W_c \sqcup \mathrm{I})\, W_d (W_c \sqcup \mathrm{I}) M_Q \\
&\subset \iota_Q^\top M_P \sqcup M_Q \sqcup (W_c \sqcup \mathrm{I})\, W_d M_Q \\
&\subset M_Q \sqcup (W_c \sqcup \mathrm{I}) M_Q \\
&\subset M_Q
\end{aligned}$$

Die Bindungskompatibilität ist innerhalb des Bildes von $N_{\lceil p_N \rceil}$ trivial:

$$W_Q B_a = W_Q \iota_Q^\top W_P B_P \iota_Q \subset \iota_Q^\top W_P B_P \iota_Q \subset \iota_Q^\top B_P \iota_Q \subset B_Q$$

Bindungen nach innerhalb der Bilder der Schemavariablen können aufgrund der Variablenabgeschlossenheit von N, die ja aus der Konformität folgt, nur von Variablen aus W_b ausgehen:

$$W_Q B_b = W_Q \lambda_Q^\top B_h \lambda_Q = W_b \lambda_Q^\top B_h \lambda_Q \subset \lambda_Q^\top (\rho_\Xi W_H \rho_\Xi^\top) B_h \lambda_Q \subset \lambda_Q^\top B_h \lambda_Q \subset B_Q$$

Auch mit B_d gibt es keine Probleme:

$$W_Q B_d = W_d B_d = J_{\lceil p_J \rceil}^\top W_H J_{\lceil p_J \rceil} \kappa_Q^\top B_H \kappa_Q \subset J_{\lceil p_J \rceil}^\top W_H B_H \kappa_Q \subset J_{\lceil p_J \rceil}^\top B_H \kappa_Q \subset B_c \sqcup B_d$$

Für B_c schlüsseln wir W_Q auch noch auf, wobei wir W_a und W_b gar nicht erst zu betrachten brauchen:

$$\begin{aligned}
W_c B_c &\subset \lambda_Q^\top (\rho_\Xi W_H \rho_\Xi^\top \sqcap \overline{B_h \mathrm{L}}) \rho_\Xi B_H \kappa_Q \subset \lambda_Q^\top \rho_\Xi W_H B_H \kappa_Q \subset B_c \\
W_d B_c &\subset J_{\lceil p_J \rceil}^\top W_H J_{\lceil p_J \rceil} \lambda_Q^\top \rho_\Xi B_H \kappa_Q \subset J_{\lceil p_J \rceil}^\top W_H B_H \kappa_Q \subset J_{\lceil p_J \rceil}^\top B_H \kappa_Q \subset B_c \sqcup B_d \\
W_e B_c &\subset (W_c \sqcup \mathrm{I}) W_d (W_c \sqcup \mathrm{I}) B_c \subset (W_c \sqcup \mathrm{I}) W_d B_c \subset (W_c \sqcup \mathrm{I}) B_c \subset B_c \\
W_Q B_c &= (W_c \sqcup W_e) B_c \subset B_c
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt dies die Bindungskompatibilität der Variablenidentität W_Q.

Eigenschaften von N

Variablentreue: $N_{\lceil p_N \rceil}^\top W_Q = \iota_Q^\top W_Q = \iota_Q^\top W_P \iota_Q \iota_Q^\top = W_a \iota_Q^\top \subset W_Q N_{\lceil p_N \rceil}^\top$

Erhaltung gleich gebundener Variablen:

$$N_{\lceil p_N \rceil} W_Q N_{\lceil p_N \rceil}^\top \sqcap B_P B_P^\top = \iota_Q W_Q \iota_Q^\top \sqcap B_P B_P^\top = W_P \sqcap B_P B_P^\top \subset W_P$$

Erhaltung freier Variablen:

$$N_{\lceil p_N \rceil} W_Q N_{\lceil p_N \rceil}^\top \sqcap \overline{B_P \mathrm{L}} = \iota_Q W_Q \iota_Q^\top \sqcap \overline{B_P \mathrm{L}} = W_P \sqcap \overline{B_P \mathrm{L}} \subset W_P$$

Variablenbeherrschung:

$$(N^{\underline{\lfloor p_N \rfloor}} \sqcap N \epsilon_Q^\top) W_Q \subset N^{\underline{\lfloor p_N \rfloor}} W_Q \subset (\mathrm{L}\lambda_Q \sqcup \mathrm{L}\kappa_Q) W_Q \subset \mathrm{L}\lambda_Q \sqcup \mathrm{L} J_{\lceil p_J \rceil} \subset \overline{\mathrm{L}\iota_Q} \subset \overline{\mathrm{L} N_{\lceil p_N \rceil}}$$

Eigenschaften von J

Variablentreue: $W_Q J_{\lceil p_J \rceil}^\top \supset J_{\lceil p_J \rceil}^\top W_H J_{\lceil p_J \rceil} J_{\lceil p_J \rceil}^\top \supset J_{\lceil p_J \rceil}^\top W_H$

Erhaltung gleich gebundener Variablen: Aufgrund der Semiinjektivität von J trivial:

$$\begin{aligned}
J_{\lceil p_J \rceil} (W_b \sqcup W_c) J_{\lceil p_J \rceil}^\top &\subset J_{\lceil p_J \rceil} \lambda_Q^\top \rho_\Xi W_H \rho_\Xi^\top \lambda_Q J_{\lceil p_J \rceil}^\top \subset W_H \\
J_{\lceil p_J \rceil} W_d J_{\lceil p_J \rceil}^\top &= J_{\lceil p_J \rceil} J_{\lceil p_J \rceil}^\top W_H J_{\lceil p_J \rceil} J_{\lceil p_J \rceil}^\top \subset W_H \\
J_{\lceil p_J \rceil} W_e J_{\lceil p_J \rceil}^\top &= J_{\lceil p_J \rceil} (W_c \sqcup \mathrm{I}) J_{\lceil p_J \rceil}^\top W_H J_{\lceil p_J \rceil} (W_c \sqcup \mathrm{I}) J_{\lceil p_J \rceil}^\top \\
&\subset W_H W_H W_H \subset W_H
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir daher:

$$J_{\lceil p_J \rceil} W_Q J_{\lceil p_J \rceil}^\top \sqcap B_H B_H^\top = J_{\lceil p_J \rceil} (W_b \sqcup W_c \sqcup W_d \sqcup W_e) J_{\lceil p_J \rceil}^\top \sqcap B_H B_H^\top \subset W_H$$

Erhaltung freier Variablen: Aufgrund der Semiinjektivität von J trivial:

$$\begin{aligned} J_{\lceil\overline{p_J}\rceil} W_Q J^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_J}\rceil} \sqcap \overline{B_H \mathrm{L}} &\subset J_{\lceil\overline{p_J}\rceil} (W_Q \sqcap \overline{B_Q \mathrm{L}}) J^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_J}\rceil} \sqcap \overline{B_H \mathrm{L}} \\ &\subset J_{\lceil\overline{p_J}\rceil} W_d J^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_J}\rceil} \sqcap \overline{B_H \mathrm{L}} \subset J_{\lceil\overline{p_J}\rceil} J^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_J}\rceil} W_H J_{\lceil\overline{p_J}\rceil} J^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_J}\rceil} \subset W_H \end{aligned}$$

C.5 Korrespondenzen zu N

Wir können, gestützt auf den Bildabschluß von N, die Korrespondenzen zwischen den Bildern der Schemavariablen explizit angeben.

Zunächst definieren wir zu einer Schemavariablen aus P, also zu einem Punkt $x : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_P$ mit $x \subset p_N$, die *Bildübernahme* $j_x : \mathcal{V}_H \twoheadrightarrow \mathcal{V}_Q$ *zu* x und die *gemäß* x *umgelenkte Version* $J_x : \mathcal{V}_H \to \mathcal{V}_Q$ von J:

$$\begin{aligned} j_x &:= (\rho^{\mathsf{T}}_{\Xi} \sqcap \mathrm{L} x \pi^{\mathsf{T}}_{\Xi}) \lambda_Q \\ J_x &:= j_x \sqcup (J \sqcap \overline{j_x \mathrm{L}}) = j_x \sqcup (J \sqcap \overline{\rho^{\mathsf{T}}_{\Xi} \pi_{\Xi} x^{\mathsf{T}} \mathrm{L}}) \end{aligned}$$

J_x ist total und eindeutig:

$$\begin{aligned} \mathrm{L} J^{\mathsf{T}}_x &= \mathrm{L} x \pi^{\mathsf{T}}_{\Xi} \rho_{\Xi} \sqcup (\mathrm{L} J^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L} x \pi^{\mathsf{T}}_{\Xi} \rho_{\Xi}}) = \mathrm{L} \\ J^{\mathsf{T}}_x J_x &= j^{\mathsf{T}}_x j_x \sqcup (J^{\mathsf{T}} \sqcap \overline{\mathrm{L} j^{\mathsf{T}}_x})(J \sqcap \overline{j_x \mathrm{L}}) \subset \lambda^{\mathsf{T}}_Q (\rho_{\Xi} \sqcap \pi_{\Xi} x^{\mathsf{T}} \mathrm{L})(\rho^{\mathsf{T}}_{\Xi} \sqcap \mathrm{L} x \pi^{\mathsf{T}}_{\Xi}) \lambda_Q \sqcup \mathrm{I} \\ &\subset \lambda^{\mathsf{T}}_Q (\rho_{\Xi} \rho^{\mathsf{T}}_{\Xi} \sqcap \pi_{\Xi} x^{\mathsf{T}} \mathrm{L} x \pi^{\mathsf{T}}_{\Xi}) \lambda_Q \sqcup \mathrm{I} \subset \lambda^{\mathsf{T}}_Q (\rho_{\Xi} \rho^{\mathsf{T}}_{\Xi} \sqcap \pi_{\Xi} \pi^{\mathsf{T}}_{\Xi}) \lambda_Q \sqcup \mathrm{I} \subset \lambda^{\mathsf{T}}_Q \lambda_Q \sqcup \mathrm{I} \subset \mathrm{I} \end{aligned}$$

und semiinjektiv: Mit

$$\begin{aligned} \mathrm{L} j_x \sqcap \mathrm{L}(J_{\lceil\overline{p_J}\rceil} \sqcap \overline{j_x \mathrm{L}}) &= \mathrm{L} x \pi^{\mathsf{T}}_{\Xi} \lambda_Q \sqcap ((\mathrm{L} \kappa_Q \sqcup (\rho^{\mathsf{T}}_{\Xi} \sqcap (G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}})^{\mathsf{T}} F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \pi^{\mathsf{T}}_{\Xi}) \lambda_Q) \sqcap \overline{\rho^{\mathsf{T}}_{\Xi} \pi_{\Xi} x^{\mathsf{T}} \mathrm{L}}) \\ &\subset \mathrm{O} \sqcup (\mathrm{L} x \pi^{\mathsf{T}}_{\Xi} \lambda_Q \sqcap (\rho^{\mathsf{T}}_{\Xi} \sqcap \overline{\rho^{\mathsf{T}}_{\Xi} \pi_{\Xi} x^{\mathsf{T}} \mathrm{L}})) \subset \mathrm{L} x \pi^{\mathsf{T}}_{\Xi} \lambda_Q \sqcap (\rho^{\mathsf{T}}_{\Xi} \sqcap \overline{\mathrm{L} x \pi^{\mathsf{T}}_{\Xi} \rho_{\Xi} \rho^{\mathsf{T}}_{\Xi}}) \\ &\subset \mathrm{L} x \pi^{\mathsf{T}}_{\Xi} \lambda_Q \sqcap \rho^{\mathsf{T}}_{\Xi} \sqcap \overline{\mathrm{L} x \pi^{\mathsf{T}}_{\Xi}} \subset \mathrm{O} \end{aligned}$$

gilt (es sei $J_{x\sqcap} := J^{\mathsf{T}}_x \sqcap \overline{p^{\mathsf{T}}_J \mathrm{L}}$):

$$J_{x\sqcap} J^{\mathsf{T}}_{x\sqcap} = J_x J^{\mathsf{T}}_x \sqcap \overline{p^{\mathsf{T}}_J \mathrm{L}} \sqcap \overline{\mathrm{L} p_J} = j_x j^{\mathsf{T}}_x \sqcup (J_{\lceil\overline{p_J}\rceil} \sqcap \overline{j_x \mathrm{L}})(J^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_J}\rceil} \sqcap \overline{\mathrm{L} j^{\mathsf{T}}_x}) \subset \rho^{\mathsf{T}}_{\Xi} \lambda_Q \lambda^{\mathsf{T}}_Q \rho_{\Xi} \sqcup J_{\lceil\overline{p_J}\rceil} J^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_J}\rceil} \subset \mathrm{I} \ .$$

Weiter gilt mit $j_x \mathcal{X} F \subset J$ noch $J_x \mathcal{X} F = J$ und für $x \subset p_N$ mit $xN \subset xN^{\lfloor p_N \rfloor}$ gilt

$$\begin{aligned} x N J^{\mathsf{T}}_x &= x(\mathcal{X} G \rho^{\mathsf{T}}_{\Xi} \sqcap \pi^{\mathsf{T}}_{\Xi}) \lambda_Q \lambda^{\mathsf{T}}_Q (\rho_{\Xi} \sqcap \pi_{\Xi} x^{\mathsf{T}} \mathrm{L}) \sqcup x \mathcal{X} G \kappa_Q (J_{\lceil\overline{p_J}\rceil} \sqcap \overline{j_x \mathrm{L}}) \\ &= x \mathcal{X} G \end{aligned}$$

Damit kommen wir nun zur

Definition der Korrespondenzen: Seien $x, y : \mathbb{1} \to \mathcal{V}_P$ zwei Punkte mit $x \sqcup y \subset p_N$ und $x^{\mathsf{T}} y \subset W_P$, so gilt

$$\mathcal{C}_N(x, y) = J^{\mathsf{T}}_{x\sqcap} \mathcal{C}_G(x\mathcal{X}, y\mathcal{X}) J_{y\sqcap} \qquad \square$$

Aus dieser Definition folgt sofort, daß die Korrespondenzen $\mathcal{C}_N(x\mathcal{X}F, x)$ eindeutig und injektiv sind. Die Eindeutigkeit zeigen wir direkt über die Definition:

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_N(x\mathcal{X}F, x))^{\mathsf{T}} \mathcal{C}_N(x\mathcal{X}F, x) &= J^{\mathsf{T}}_{x\sqcap} (\mathcal{C}_G(x\mathcal{X}F\mathcal{X}, x\mathcal{X}))^{\mathsf{T}} J_{\sqcap} x \mathcal{X} F J^{\mathsf{T}}_{\sqcap} x \mathcal{X} F \mathcal{C}_G(x\mathcal{X}F\mathcal{X}, x\mathcal{X}) J_{x\sqcap} \\ &= J^{\mathsf{T}}_{x\sqcap} (\mathcal{C}_G(x\mathcal{X}, x\mathcal{X}))^{\mathsf{T}} J J^{\mathsf{T}} \mathcal{C}_G(x\mathcal{X}, x\mathcal{X}) J_{x\sqcap} \\ &\subset J^{\mathsf{T}}_{x\sqcap} \mathrm{I} J J^{\mathsf{T}} \mathrm{I} J_{x\sqcap} \\ &\subset \mathrm{I} \end{aligned}$$

Der Beweis der Injektivität verläuft analog. Damit ergibt sich bereits die Zügelung des Matchingpfeils $\langle F, J\rangle$, da die Korrespondenzen gemäß Konstruktion sharing-konservativ sind.

Die Korrespondenzeneigenschaften leiten sich aus den Eigenschaften der Korrespondenzen zu G ab, vermittelt durch die Bildübernahmen. Die Beweise selbst sind technisch aufwendig, aber nicht weiter interessant, so daß wir sie hier auslassen.

C.6 Universelle Eigenschaft

Bisher haben wir gezeigt, daß $Q \in \mathcal{O}_{\mathrm{R}}$ ein reeller Graph ist, N ein reeller Homomorphismus von P in Q, und J eine v_p-Überdeckung von H in Q, so daß $\langle F, J\rangle$ ein semiinjektiver, gezügelter, gerüsterhaltender und überlappungsfreier Matchingpfeil ist und damit in $\mathcal{M}_>$ liegt.

Wir müssen natürlich noch zeigen, daß dieser Graph Q zusammen mit dem Homomorphismus N und der Einbettung J die universelle Eigenschaft des Pseudo-Pushouts erfüllt. Sei also Q' ein Graph, zu dem es einen Homomorphismus N' von P in Q' und eine Einbettung J' von H in Q' gibt, so daß auch $\langle F, J'\rangle$ ein Matchingpfeil in $\mathcal{M}_>$ ist. Dann definieren wir:

$$U := \iota_Q^{\mathsf{T}} N' \sqcup \kappa_Q^{\mathsf{T}} J' \sqcup \lambda_Q^{\mathsf{T}} \Theta$$

wobei

$$\Theta = \bigsqcup \{x : \mathbb{1} \to \Xi \bullet x^{\mathsf{T}} x \rho_\Xi J'_{\lceil \overline{p_{J'}} \rceil} \mathcal{C}_{N'}(x \pi_\Xi \mathcal{X} F, x \pi_\Xi)\}$$

Dabei hätte man in der Definition von Θ statt $J'_{\lceil \overline{p_{J'}} \rceil}$ auch J' schreiben können, doch wird sich die Verwendung der eingeschränkten Form in den folgenden Beweisen als nützlich erweisen.

Wir werden nun zeigen, daß U eine p_U-Einbettung ist, wobei $p_U := p_{N'} N_{\lceil \overline{p_N} \rceil}$ $(\subset \mathrm{L}\iota_Q)$, da dies genau die von N' instantiierten, von N aber konstant abgebildeten Schemavariablen sind. Damit erhalten wir $U_{\lceil \overline{p_U} \rceil} = \iota_Q^{\mathsf{T}} N'_{\lceil \overline{p_{N'}} \rceil} \sqcup \kappa_Q^{\mathsf{T}} J' \sqcup \lambda_Q^{\mathsf{T}} \Theta$.

Nach der Konstruktion von p_N und N gilt offensichtlich $p_N \subset p_{N'}$ und analog $p_J \subset p_{J'}$.
Hilfsaussage: $N^{\mathsf{T}} N' \subset U$

$$\begin{array}{rcl}
N^{\mathsf{T}} N' & = & (\iota_Q^{\mathsf{T}} \sqcup \kappa_Q^{\mathsf{T}} G^{\mathsf{T}} \mathcal{X}^{\mathsf{T}} \sqcup \lambda_Q^{\mathsf{T}} (\rho_\Xi G^{\mathsf{T}} \mathcal{X}^{\mathsf{T}} \sqcap \pi_\Xi)) \mathcal{Z}_{P,p_n}^{\mathsf{T}} N' \\
& = & \quad \langle N' \text{ konsistent} \rangle \\
& & (\iota_Q^{\mathsf{T}} \sqcup \kappa_Q^{\mathsf{T}} G^{\mathsf{T}} \mathcal{X}^{\mathsf{T}} \sqcup \lambda_Q^{\mathsf{T}} (\rho_\Xi G^{\mathsf{T}} \mathcal{X}^{\mathsf{T}} \sqcap \pi_\Xi)) N' \\
& = & \iota_Q^{\mathsf{T}} N' \sqcup \kappa_Q^{\mathsf{T}} G^{\mathsf{T}} \mathcal{X}^{\mathsf{T}} N' \sqcup \lambda_Q^{\mathsf{T}} (\rho_\Xi G^{\mathsf{T}} \mathcal{X}^{\mathsf{T}} \sqcap \pi_\Xi) N' \\
& = & \quad \langle FN' = GJ',\ N' \text{ Homom.; Zügelung} \rangle \\
& & \iota_Q^{\mathsf{T}} N' \sqcup \kappa_Q^{\mathsf{T}} J' \sqcup \lambda_Q^{\mathsf{T}} \bigsqcup \{x : \mathbb{1} \to \Xi \bullet x^{\mathsf{T}} x \rho_\Xi J'_{\lceil \overline{p_{J'}} \rceil} \mathcal{C}_{N'}(x \pi_\Xi \mathcal{X} F, x \pi_\Xi)\} \\
& = & \iota_Q^{\mathsf{T}} N' \sqcup \lambda_Q^{\mathsf{T}} \Theta \\
& \subset & U
\end{array}$$

Hilfsaussage: $J^{\mathsf{T}} J' \subset U$

$$\begin{array}{rcl}
J^{\mathsf{T}} J' & = & \kappa_Q^{\mathsf{T}} J' \sqcup \lambda_Q^{\mathsf{T}} (\rho_\Xi \sqcap \pi_\Xi F^{\mathsf{T}} G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}) J' \sqcup N^{\mathsf{T}} F^{\mathsf{T}} G_{\lceil \overline{p_G} \rceil} J' \\
& \subset & U \sqcup \lambda_Q^{\mathsf{T}} \rho_\Xi J' \sqcup N^{\mathsf{T}} F^{\mathsf{T}} F N' \\
& \subset & U \sqcup \lambda_Q^{\mathsf{T}} \Theta \sqcup N^{\mathsf{T}} N' \\
& \subset & U
\end{array}$$

Faktorisierung

$$
\begin{aligned}
NU &= \mathcal{Z}_{P,p_n}\,(\iota_Q \sqcup \mathcal{X}G\kappa_Q \sqcup (\mathcal{X}G\rho_\Xi^\top \sqcap \pi_\Xi^\top)\,\lambda_Q)\,U \\
&= \mathcal{Z}_{P,p_n}\,(\iota_Q\iota_Q^\top N' \sqcup \mathcal{X}G\kappa_Q\kappa_Q^\top J' \sqcup (\mathcal{X}G\rho_\Xi^\top \sqcap \pi_\Xi^\top)\,\lambda_Q\,\lambda_Q^\top\Theta) \\
&\subset \quad \langle\text{Zügelung}\rangle \\
&\qquad \mathcal{Z}_{P,p_n}\,(N' \sqcup N' \sqcup (\mathcal{X}G\rho_\Xi^\top \sqcap \pi_\Xi^\top)\Theta) \\
&\subset \mathcal{Z}_{P,p_n}\,N' \\
&= N'
\end{aligned}
$$

Aus Totalität von NU und Eindeutigkeit von N' folgt nach Lemma 2.1.7 Gleichheit.

$$
\begin{aligned}
JU &= (\kappa_Q \sqcup (\rho_\Xi^\top \sqcap (G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright})^\top F\pi_\Xi^\top)\,\lambda_Q \sqcup (p_J^\top \mathrm{L} \sqcap G^\top_{\lceil p_G \rceil}FN))\,U \\
&= \kappa_Q\kappa_Q^\top J' \sqcup (\rho_\Xi^\top \sqcap (G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright})^\top F\pi_\Xi^\top)\,\lambda_Q\,\lambda_Q^\top\Theta \sqcup (p_J^\top \mathrm{L} \sqcap G^\top_{\lceil p_G \rceil}FNU) \\
&\subset J' \sqcup (\rho_\Xi^\top \sqcap (G^{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright})^\top F\pi_\Xi^\top)\Theta \sqcup G^\top_{\lceil p_G \rceil}FN' \\
&\subset J' \sqcup \rho_\Xi^\top\rho_\Xi J' \sqcup G^\top_{\lceil p_G \rceil}GJ' \\
&\subset J'
\end{aligned}
$$

Gleichheit folgt wieder aus Totalität von JU und Eindeutigkeit von J'.

Eindeutigkeit

$$
\begin{aligned}
U^\top U &= N'^{\pi}\iota_Q\iota_Q^\top N' \sqcup J'^{\pi}\kappa_Q\kappa_Q^\top J' \sqcup \Theta^\top\lambda_Q\,\lambda_Q^\top\Theta \;\subset\; N'^{\pi}N' \sqcup J'^{\pi}J' \sqcup \Theta^\top\Theta \\
&\subset \mathrm{I} \sqcup \mathrm{I} \sqcup \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_\Xi\mathcal{X}F, x\pi_\Xi)^\top J'^\top_{\lceil p_{J'} \rceil}\rho_\Xi^\top x^\top x\rho_\Xi J'_{\lceil p_{J'} \rceil}\mathcal{C}_{N'}(x\pi_\Xi\mathcal{X}F, x\pi_\Xi)\} \\
&\subset \mathrm{I} \sqcup \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_\Xi\mathcal{X}F, x\pi_\Xi)^\top\mathcal{C}_{N'}(x\pi_\Xi\mathcal{X}F, x\pi_\Xi)\} \\
&\subset \mathrm{I}
\end{aligned}
$$

Markierungstreue

$$
\begin{aligned}
U^\top_{\lceil p_U \rceil}M_Q &= N'^{\top}_{\lceil p_{N'} \rceil}\iota_Q M_Q \sqcup J'^{\pi}\kappa_Q M_Q \sqcup \Theta^\top\lambda_Q\,M_Q \\
&= N'^{\top}_{\lceil p_{N'} \rceil}M_P \sqcup J'^{\pi}M_H \sqcup \Theta^\top\rho_\Xi M_H \\
&\subset M_{Q'} \sqcup M_{Q'} \sqcup \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_\Xi\mathcal{X}F, x\pi_\Xi)^\top J'^\top_{\lceil p_{J'} \rceil}\rho_\Xi^\top x^\top x\rho_\Xi M_H\} \\
&\subset M_{Q'} \sqcup \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_\Xi\mathcal{X}F, x\pi_\Xi)^\top J'^\top_{\lceil p_{J'} \rceil}M_H\} \\
&\subset M_{Q'} \sqcup \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_\Xi\mathcal{X}F, x\pi_\Xi)^\top M_{Q'}\} \\
&\subset M_{Q'}
\end{aligned}
$$

Nachfolgertreue

Nach Aufspaltung von $U^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_U}\rceil}$ lösen sich die ersten beiden Anteile problemlos auf; nur der dritte Teil benötigt eingehendere Beschäftigung:

$$
\begin{array}{rcl}
U^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_U}\rceil} S_{Q,i} & = & N'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{N'}}\rceil} \iota_Q S_{Q,i} \sqcup J^{\pi} \kappa_Q S_{Q,i} \sqcup \Theta^{\mathsf{T}} \lambda_Q\, S_{Q,i} \\
& = & N'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{N'}}\rceil} S_{P,i} N \sqcup J^{\pi} S_{H,i} J \sqcup \Theta^{\mathsf{T}} \lambda_Q\, S_{Q,i} \\
& \subset & S_{Q',i} N^{\pi} N \sqcup S_{Q',i} J^{\pi} J \sqcup \Theta^{\mathsf{T}} \lambda_Q\, S_{Q,i} \\
& \subset & S_{Q',i} U \sqcup \Theta^{\mathsf{T}} \lambda_Q\, S_{b,i} \sqcup \Theta^{\mathsf{T}} \lambda_Q\, S_{c,i} \sqcup \Theta^{\mathsf{T}} \lambda_Q\, S_{d,i}
\end{array}
$$

Wir behandlen diese Komponenten nun einzeln:

$$
\begin{array}{rcl}
\Theta^{\mathsf{T}} \lambda_Q\, S_{b,i} & = & \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, x\pi_{\Xi})^{\mathsf{T}} J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil} \rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} x^{\mathsf{T}} x\, \lambda_Q\, S_{b,i}\} \\
& = & \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, x\pi_{\Xi})^{\mathsf{T}} J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil} \rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} x^{\mathsf{T}} x (\rho_{\Xi} S_{H,i} \rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} \sqcap \pi_{\Xi}\pi_{\Xi}^{\mathsf{T}})\, \lambda_Q\} \\
& = & \bigsqcup\{x, y : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, x\pi_{\Xi})^{\mathsf{T}} J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil} \rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} x^{\mathsf{T}} x (\rho_{\Xi} S_{H,i} \rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} \sqcap \pi_{\Xi}\pi_{\Xi}^{\mathsf{T}}) y^{\mathsf{T}} y\, \lambda_Q\} \\
& = & \bigsqcup\{y : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(y\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, y\pi_{\Xi})^{\mathsf{T}} J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil} \rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} (\rho_{\Xi} S_{H,i} \rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} \sqcap \pi_{\Xi}\pi_{\Xi}^{\mathsf{T}}) y^{\mathsf{T}} y\, \lambda_Q\} \\
& = & \bigsqcup\{y : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(y\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, y\pi_{\Xi})^{\mathsf{T}} J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil} S_{H,i} \rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} y^{\mathsf{T}} y\, \lambda_Q\} \\
& \subset & \bigsqcup\{y : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(y\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, y\pi_{\Xi})^{\mathsf{T}} S_{Q',i} J^{\pi} \rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} y^{\mathsf{T}} y\, \lambda_Q\} \\
& \subset & \bigsqcup\{y : \mathbb{1} \to \Xi \bullet S_{Q',i}(\mathcal{C}_{N'}(y\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, y\pi_{\Xi})^{\mathsf{T}} \sqcup \bot_{[y\pi_{\Xi}\mathcal{X}F]N',[y\pi_{\Xi}]N'}) J^{\pi} \rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} y^{\mathsf{T}} y\, \lambda_Q\} \\
& = & \left\langle \bot_{[y\pi_{\Xi}\mathcal{X}F]N',[y\pi_{\Xi}]N'} J^{\pi} \rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} y^{\mathsf{T}} = \mathrm{O} \right\rangle \\
& & \bigsqcup\{y : \mathbb{1} \to \Xi \bullet S_{Q',i} \mathcal{C}_{N'}(y\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, y\pi_{\Xi})^{\mathsf{T}} J^{\pi} \rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} y^{\mathsf{T}} y\, \lambda_Q\} \\
& = & S_{Q',i} \Theta^{\mathsf{T}} \lambda_Q \;\subset\; S_{Q',i} U^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_U}\rceil}
\end{array}
$$

Für den Anteil von $S_{c,i}$ schätzen wir als Vorbereitung zunächst für beliebiges $x : \Xi$ ab:

$$
\begin{array}{rcl}
J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil} \rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} x^{\mathsf{T}} x\, \lambda_Q\, S_{c,i} & \subset & J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil} \rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} x^{\mathsf{T}} x (((\rho_{\Xi} S_{H,i} \sqcap \overline{\pi_{\Xi}\pi_{\Xi}^{\mathsf{T}}\rho_{\Xi}})\, G^{\mathsf{T}} S_K^{\mathsf{T}} \sqcap \rho_{\Xi} \mathcal{I}_{G,i})(\mathcal{X}^{\mathsf{T}} \| \mathrm{I}) \sqcap \pi_{\Xi}\pi^{\mathsf{T}}) S_P N \\
& \subset & J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil} (((S_{H,i} \sqcap \rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} x^{\mathsf{T}} x \overline{\pi_{\Xi}\pi_{\Xi}^{\mathsf{T}}\rho_{\Xi}})\, G^{\mathsf{T}} S_K^{\mathsf{T}} \sqcap \mathcal{I}_{G,i})(\mathcal{X}^{\mathsf{T}} \| \mathrm{I}) \sqcap \rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} x^{\mathsf{T}} x \pi_{\Xi}\pi^{\mathsf{T}}) S_P N \\
& \subset & (((J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil} S_{H,i} \sqcap J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil} \rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} x^{\mathsf{T}} x \overline{\pi_{\Xi}\pi_{\Xi}^{\mathsf{T}}\rho_{\Xi}})\, G^{\mathsf{T}} S_K^{\mathsf{T}} \sqcap J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil} \mathcal{I}_{G,i})(\mathcal{X}^{\mathsf{T}} \| \mathrm{I}) \\
& & \quad \sqcap\ J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil} (\rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} \pi_{\Xi} \sqcap \mathrm{L} x \pi_{\Xi}) \pi^{\mathsf{T}}) S_P N \\
& \subset & (((S_{Q',i} J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil} \sqcap J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil} \rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} x^{\mathsf{T}} x \overline{\pi_{\Xi}\pi_{\Xi}^{\mathsf{T}}\rho_{\Xi}})\, G^{\mathsf{T}} S_K^{\mathsf{T}} \sqcap \mathcal{I}_{N',i}(F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \| \mathrm{I}))(\mathcal{X}^{\mathsf{T}} \| \mathrm{I}) \\
& & \quad \sqcap\ (J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil} (G^{\underline{\blacktriangleleft p_G \blacktriangleright}})^{\mathsf{T}} \mathcal{X}^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L} x \pi_{\Xi}) \pi^{\mathsf{T}}) S_P N \\
& \subset & (((S_{Q',i} J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil} \sqcap J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil} \rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} x^{\mathsf{T}} x \overline{\pi_{\Xi}\pi_{\Xi}^{\mathsf{T}}\rho_{\Xi}})\, G^{\mathsf{T}} S_K^{\mathsf{T}} (F_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \| \mathrm{I}) \sqcap \mathcal{I}_{N',i})(F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \mathcal{X}^{\mathsf{T}} \| \mathrm{I}) \\
& & \quad \sqcap\ ((N'^{\underline{\blacktriangleleft p_{N'} \blacktriangleright}})^{\mathsf{T}} F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \mathcal{X}^{\mathsf{T}} \sqcap \mathrm{L} x \pi_{\Xi}) \pi^{\mathsf{T}}) S_P N \\
& \subset & (((S_{Q',i} J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil} \sqcap J'^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil} \rho_{\Xi}^{\mathsf{T}} x^{\mathsf{T}} x \overline{\pi_{\Xi}\pi_{\Xi}^{\mathsf{T}}\rho_{\Xi}})\, G^{\mathsf{T}} F S_P^{\mathsf{T}})(F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \mathcal{X}^{\mathsf{T}} \| \mathrm{I}) \\
& & \quad \sqcap\ (N'^{\underline{\blacktriangleleft p_{N'} \blacktriangleright}})^{\mathsf{T}} F^{\mathsf{T}}_{\lceil\overline{p_F}\rceil} \mathcal{X}^{\mathsf{T}} \pi^{\mathsf{T}}) S_P N
\end{array}
$$

Damit ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\Theta^{\top}\lambda_{Q}\, S_{c,i} \;&=\; \bigsqcup\{x:\mathbb{1}\to\Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, x\pi_{\Xi})^{\top} J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}\rho_{\Xi}^{\top}x^{\top}x\,\lambda_{Q}\, S_{c,i}\}\\
&\subset\; \bigsqcup\{x:\mathbb{1}\to\Xi \bullet\\
&\qquad (\mathcal{C}_{N'}(x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, x\pi_{\Xi})^{\top}((S_{Q',i}J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}\sqcap J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}\rho_{\Xi}^{\top}x^{\top}x\overline{\pi_{\Xi}\pi_{\Xi}^{\top}\rho_{\Xi}})\,G^{\top}FS_{P}^{\top})(F^{\top}_{\lceil p_{F}\rceil}\mathcal{X}^{\top}\|\mathrm{I})\\
&\qquad\ \sqcap\ \mathcal{C}_{N'}(x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, x\pi_{\Xi})^{\top}(\underline{N'^{\blacktriangleleft p_{N'}\blacktriangleright}})^{\top}F^{\top}_{\lceil p_{F}\rceil}\mathcal{X}^{\top}\pi^{\top})S_{P}N \qquad\qquad \}\\
&\subset\; \bigsqcup\{x:\mathbb{1}\to\Xi \bullet\\
&\qquad (S_{Q',i}N'^{\top}Q^{\top}_{P,x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F}Q_{P,x\pi_{\Xi}}N'J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}G^{\top}FS_{P}^{\top}(F^{\top}_{\lceil p_{F}\rceil}\mathcal{X}^{\top}\|\mathrm{I})\sqcap(\underline{N'^{\blacktriangleleft p_{N'}\blacktriangleright}})^{\top}\pi^{\top})S_{P}N\ \}\\
&\subset\; \bigsqcup\{x:\mathbb{1}\to\Xi \bullet S_{Q',i}N'^{\top}Q^{\top}_{P,x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F}Q_{P,x\pi_{\Xi}}S_{P}^{\top}(F^{\top}_{\lceil p_{F}\rceil}\mathcal{X}^{\top}\|\mathrm{I})S_{P}N\}\\
&\subset\; \bigsqcup\{x:\mathbb{1}\to\Xi \bullet S_{Q',i}N'^{\top}S_{P}^{\top}S_{P}N\}\ \subset\ S_{Q',i}N'^{\top}N\ \subset\ S_{Q',i}U^{\top}
\end{aligned}
$$

Der letzte Teil geht wieder direkt:

$$
\begin{aligned}
\Theta^{\top}\lambda_{Q}\, S_{d,i} \;&=\; \bigsqcup\{x:\mathbb{1}\to\Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, x\pi_{\Xi})^{\top} J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}\rho_{\Xi}^{\top}x^{\top}x\,\lambda_{Q}\, S_{d,i}\}\\
&=\; \bigsqcup\{x:\mathbb{1}\to\Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, x\pi_{\Xi})^{\top} J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}\rho_{\Xi}^{\top}x^{\top}x(\rho_{\Xi}S_{H,i}\sqcap\overline{\pi_{\Xi}\pi_{\Xi}^{\top}\rho_{\Xi}}\sqcap\overline{\pi_{\Xi}\mathcal{X}D_{K}G})J\}\\
&=\; \bigsqcup\{x:\mathbb{1}\to\Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, x\pi_{\Xi})^{\top} J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}\rho_{\Xi}^{\top}x^{\top}(x\rho_{\Xi}S_{H,i}\sqcap x(\overline{\pi_{\Xi}\pi_{\Xi}^{\top}\rho_{\Xi}}\sqcap\overline{\pi_{\Xi}\mathcal{X}D_{K}G}))J\}\\
&=\; \bigsqcup\{x:\mathbb{1}\to\Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, x\pi_{\Xi})^{\top} J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}(S_{H,i}\sqcap\rho_{\Xi}^{\top}x^{\top}x(\overline{\pi_{\Xi}\pi_{\Xi}^{\top}\rho_{\Xi}}\sqcap\overline{\pi_{\Xi}\mathcal{X}D_{K}G}))J\}\\
&=\; \bigsqcup\{x:\mathbb{1}\to\Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, x\pi_{\Xi})^{\top}(J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}S_{H,i}\sqcap J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}\rho_{\Xi}^{\top}x^{\top}x(\overline{\pi_{\Xi}\pi_{\Xi}^{\top}\rho_{\Xi}}\sqcap\overline{\pi_{\Xi}\mathcal{X}D_{K}G}))J\}\\
&\subset\; \bigsqcup\{x:\mathbb{1}\to\Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, x\pi_{\Xi})^{\top}(S_{Q',i}J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}\sqcap \mathrm{L}x(\overline{\pi_{\Xi}\pi_{\Xi}^{\top}\rho_{\Xi}}\sqcap\overline{\pi_{\Xi}\mathcal{X}D_{K}G}))J\}\\
&\subset\; \bigsqcup\{x:\mathbb{1}\to\Xi \bullet\\
&\qquad (S_{Q',i}(\mathcal{C}_{N'}(x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, x\pi_{\Xi})^{\top}\sqcup\perp_{[x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F]\!]N',[x\pi_{\Xi}]\!]N'})J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}\sqcap \mathrm{L}x(\overline{\pi_{\Xi}\pi_{\Xi}^{\top}\rho_{\Xi}}\sqcap\overline{\pi_{\Xi}\mathcal{X}D_{K}G}))J\ \}\\
&\subset\quad \langle\text{Der Vektor selektiert die SKG, auf der } \perp_{\ldots,\ldots} \text{ ja identisch abbildet}\rangle\\
&\qquad \bigsqcup\{x:\mathbb{1}\to\Xi \bullet (S_{Q',i}J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}J\}\\
&\subset\; S_{Q',i}J'^{\top}_{\lceil p_{J'}\rceil}J\ \subset\ S_{Q',i}U^{\top}
\end{aligned}
$$

Bindungstreue

Auch hier ergibt sich wieder eine Aufspaltung nach den Komponenten von $U^{\top}_{\lceil p_{U}\rceil}$:

$$
\begin{aligned}
U^{\top}_{\lceil p_{U}\rceil}B_{Q} \;&=\; N'^{\top}_{\lceil p_{N'}\rceil}\iota_{Q}B_{Q}\sqcup J'^{\top}\kappa_{Q}B_{Q}\sqcup\Theta^{\top}\lambda_{Q}\,B_{Q}\\
&=\; N'^{\top}_{\lceil p_{N'}\rceil}B_{P}\iota_{Q}\sqcup(J'^{\top}\kappa_{Q}\sqcup\Theta^{\top}\lambda_{Q})(\kappa_{Q}^{\top}\sqcup\lambda_{Q}^{\top}\rho_{\Xi})B_{H}\kappa_{Q}\sqcup\Theta^{\top}B_{h}\,\lambda_{Q}
\end{aligned}
$$

Diese drei Teile betrachten wir nun getrennt:

$$
N'^{\top}_{\lceil p_{N'}\rceil}B_{P}\iota_{Q}\subset B_{Q'}N'^{\top}_{\lceil p_{N'}\rceil}\iota_{Q}\subset B_{Q'}U^{\top}_{\lceil p_{U}\rceil}
$$

$$
\begin{aligned}
&(J^{\pi}\kappa_Q \sqcup \Theta^{\mathsf{T}}\lambda_Q)(\kappa_Q^{\mathsf{T}} \sqcup \lambda_Q^{\mathsf{T}}\rho_\Xi)B_H\kappa_Q \\
&\quad\subset\ (J^{\pi} \sqcup \Theta^{\mathsf{T}}\rho_\Xi)(B_H \sqcap \overline{p_J^{\mathsf{T}}\mathrm{L}})\kappa_Q \\
&\quad\subset\ J^{\pi}(B_H \sqcap \overline{p_J^{\mathsf{T}}\mathrm{L}})\kappa_Q \sqcup \Theta^{\mathsf{T}}\rho_\Xi B_H\kappa_Q \\
&\quad\subset\ B_{Q'}J^{\pi}\kappa_Q \sqcup \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_\Xi\mathcal{X}F, x\pi_\Xi)^{\mathsf{T}}J'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{J'}\rceil}\rho_\Xi^{\mathsf{T}}x^{\mathsf{T}}x\rho_\Xi B_H\kappa_Q\} \\
&\quad\subset\ B_{Q'}J^{\pi}J \sqcup \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_\Xi\mathcal{X}F, x\pi_\Xi)^{\mathsf{T}}J'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{J'}\rceil}B_H\kappa_Q\} \\
&\quad\subset\ B_{Q'}U^{\mathsf{T}}_{\lceil p_U\rceil} \sqcup \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_\Xi\mathcal{X}F, x\pi_\Xi)^{\mathsf{T}}B_{Q'}J'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{J'}\rceil}\kappa_Q\} \\
&\quad\subset\ \quad\langle\text{externe Bindung}\rangle \\
&\qquad\ \ B_{Q'}U^{\mathsf{T}}_{\lceil p_U\rceil} \sqcup \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \Xi \bullet B_{Q'}J'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{J'}\rceil}\kappa_Q\} \\
&\quad\subset\ B_{Q'}U^{\mathsf{T}}_{\lceil p_U\rceil}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Theta^{\mathsf{T}}B_h\lambda_Q\ &\subset\ \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_\Xi\mathcal{X}F, x\pi_\Xi)^{\mathsf{T}}J'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{J'}\rceil}\rho_\Xi^{\mathsf{T}}x^{\mathsf{T}}xB_h\lambda_Q\} \\
&\subset\ \bigsqcup\{x, y : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_\Xi\mathcal{X}F, x\pi_\Xi)^{\mathsf{T}}J'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{J'}\rceil}\rho_\Xi^{\mathsf{T}}x^{\mathsf{T}}xB_h y^{\mathsf{T}}y\}\lambda_Q \\
&\subset\ \quad\left\langle y\pi_\Xi N'^{\lfloor p_{N'}\rfloor}\ \text{bindungsabgeschlossen}\right\rangle \\
&\qquad \bigsqcup\{x, y : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(y\pi_\Xi\mathcal{X}F, y\pi_\Xi)^{\mathsf{T}}J'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{J'}\rceil}\rho_\Xi^{\mathsf{T}}x^{\mathsf{T}}xB_h y^{\mathsf{T}}y\}\lambda_Q \\
&\subset\ \bigsqcup\{y : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(y\pi_\Xi\mathcal{X}F, y\pi_\Xi)^{\mathsf{T}}J'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{J'}\rceil}\rho_\Xi^{\mathsf{T}}B_h y^{\mathsf{T}}y\}\lambda_Q \\
&\subset\ \bigsqcup\{y : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(y\pi_\Xi\mathcal{X}F, y\pi_\Xi)^{\mathsf{T}}J'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{J'}\rceil}B_H\rho_\Xi^{\mathsf{T}}y^{\mathsf{T}}y\}\lambda_Q \\
&\subset\ \bigsqcup\{y : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(y\pi_\Xi\mathcal{X}F, y\pi_\Xi)^{\mathsf{T}}B_{Q'}J'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{J'}\rceil}\rho_\Xi^{\mathsf{T}}y^{\mathsf{T}}y\}\lambda_Q \\
&\subset\ \quad\left\langle G^{\blacktriangleleft p_G\blacktriangleright}J' \subset FN'^{\lfloor p_{N'}\rfloor}\right\rangle \\
&\qquad \bigsqcup\{y : \mathbb{1} \to \Xi \bullet B_{Q'}\mathcal{C}_{N'}(y\pi_\Xi\mathcal{X}F, y\pi_\Xi)^{\mathsf{T}}J'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{J'}\rceil}\rho_\Xi^{\mathsf{T}}y^{\mathsf{T}}y\}\lambda_Q \\
&=\ B_{Q'}\Theta\lambda_Q \\
&\subset\ B_{Q'}U^{\mathsf{T}}_{\lceil p_U\rceil}
\end{aligned}
$$

Variablentreue

$$
\begin{aligned}
U^{\mathsf{T}}_{\lceil p_U\rceil}W_Q\ &=\ N'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{N'}\rceil}\iota_Q W_Q \sqcup J^{\pi}\kappa_Q W_Q \sqcup \Theta^{\mathsf{T}}\lambda_Q W_Q \\
&=\ N'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{N'}\rceil}W_P\iota_Q \sqcup J^{\pi}\kappa_Q W_e \sqcup \Theta^{\mathsf{T}}\lambda_Q W_Q \\
&=\ W_{Q'}N'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{N'}\rceil}\iota_Q \sqcup J^{\pi}\kappa_Q W_d(W_c \sqcup \mathrm{I}) \sqcup \Theta^{\mathsf{T}}\lambda_Q W_Q \\
&\subset\ W_{Q'}N'^{\mathsf{T}}_{\lceil p_{N'}\rceil}N \sqcup W_Q J^{\pi}J_{\lceil p_J\rceil}(W_c \sqcup \mathrm{I}) \sqcup \Theta^{\mathsf{T}}\lambda_Q W_Q \\
&\subset\ W_{Q'}U^{\mathsf{T}}_{\lceil p_U\rceil} \sqcup W_Q J^{\pi}J_{\lceil p_J\rceil} \sqcup W_Q J^{\pi}J_{\lceil p_J\rceil}W_c \sqcup \Theta^{\mathsf{T}}\lambda_Q W_Q \\
&\subset\ W_{Q'}U^{\mathsf{T}}_{\lceil p_U\rceil} \sqcup W_Q J^{\pi}J_{\lceil p_J\rceil}W_c \sqcup \Theta^{\mathsf{T}}\lambda_Q W_Q
\end{aligned}
$$

Wir betrachten zunächst den Anteil von W_c in der letzten Komponente gesondert:

$$\begin{aligned}
\Theta^{\top}\lambda_Q\, W_c &= \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, x\pi_{\Xi})^{\top} J'^{\top}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil}\rho^{\top}_{\Xi} x^{\top} x\, \lambda_Q\, W_c\} \\
&\subset \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, x\pi_{\Xi})^{\top} J'^{\top}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil}\rho^{\top}_{\Xi} x^{\top} x(\rho_{\Xi}\, W_H \rho^{\top}_{\Xi} \sqcap \overline{B_h \mathrm{L}})\, \lambda_Q\} \\
&\subset \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, x\pi_{\Xi})^{\top} J'^{\top}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil}(W_H \sqcap \overline{B_H(x\pi_{\Xi}\mathcal{X}G^{\lfloor p_G \rfloor})^{\top}\mathrm{L}})\rho^{\top}_{\Xi}\lambda_Q\} \\
&\subset \quad \langle\text{Einbettungseigenschaften von } J',\ GJ' = FN'\rangle \\
&\qquad \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \Xi \bullet \mathcal{C}_{N'}(x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, x\pi_{\Xi})^{\top}(W_{Q'} \sqcap \overline{B_{Q'}(x\pi_{\Xi}N'^{\lfloor p_{N'} \rfloor})^{\top}\mathrm{L}})J'^{\top}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil}\rho^{\top}_{\Xi}\lambda_Q\} \\
&\subset \quad \langle\text{Erhaltung nicht intern geb. Variablen durch Korrespondenzen}\rangle \\
&\qquad \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \Xi \bullet (W_{Q'} \sqcap \overline{B_{Q'}(x\pi_{\Xi}N'^{\lfloor p_{N'} \rfloor})^{\top}\mathrm{L}})J'^{\top}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil}\rho^{\top}_{\Xi}\lambda_Q\} \\
&\subset \bigsqcup\{x : \mathbb{1} \to \Xi \bullet W_{Q'}\mathcal{C}_{N'}(x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F)^{\top} J'^{\top}_{\lceil\overline{p_{J'}}\rceil}\rho^{\top}_{\Xi}\lambda_Q\} \\
&\subset W_{Q'}\Theta^{\top}\lambda_Q
\end{aligned}$$

Die entsprechende Aussage für W_d läßt sich ebenso beweisen, und damit ist auch W_e erledigt. W_b geht analog, nur wird statt der Erhaltung nicht intern gebundener Variablen die Variablentreue der Korrespondenzen angewandt, so daß sogar ein Schritt gespart wird. Insgesamt erhalten wir also $\Theta^{\top}\lambda_Q\, W_Q \subset W_Q\, U^{\top}_{\lceil\overline{p_U}\rceil}$, und mit dem eben bewiesenen auch

$$W_Q\, J^{\Pi} J_{\lceil\overline{p_J}\rceil}\, W_c = W_Q\, J^{\Pi}\rho^{\top}_{\Xi}\lambda_Q\, W_c \subset W_Q\,\Theta^{\top}\lambda_Q\, W_c \subset W_Q\, W_Q\, U^{\top}_{\lceil\overline{p_U}\rceil} \subset W_Q\, U^{\top}_{\lceil\overline{p_U}\rceil}\ .$$

Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen

Zunächst zerfällt die Bindungsgleichheit in:

$$B_Q B^{\top}_Q = \iota^{\top}_Q B_P B^{\top}_P \iota_Q \sqcup \lambda^{\top}_Q B_h B^{\top}_h \lambda_Q \sqcup (\lambda^{\top}_Q \rho_{\Xi} \sqcup \kappa^{\top}_Q) B_H \kappa_Q \kappa^{\top}_Q B^{\top}_H (\kappa_Q \sqcup \rho^{\top}_{\Xi}\lambda_Q)$$

Einfach ergeben sich damit die Anteile zu ι_Q und κ_Q:

$$\begin{aligned}
\iota^{\top}_Q N' W_{Q'} N'^{\Pi}\iota_Q \sqcap \iota^{\top}_Q B_P B^{\top}_P \iota_Q &= \iota^{\top}_Q(N' W_{Q'} N'^{\Pi} \sqcap B_P B^{\top}_P)\iota^{\top}_Q \subset \iota^{\top}_Q W_P \iota^{\top}_Q \subset W_Q \\
\kappa^{\top}_Q J' W_{Q'} J'^{\Pi}\kappa^{\top}_Q \sqcap \kappa_Q B_H B^{\top}_H \kappa^{\top}_Q &= \kappa^{\top}_Q(J' W_{Q'} J'^{\Pi} \sqcap B_H B^{\top}_H)\kappa^{\top}_Q \subset \kappa^{\top}_Q W_H \kappa^{\top}_Q \subset W_Q
\end{aligned}$$

Durch Zurückführung auf die Erhaltung der Verschiedenheit gleich gebundener Variablen der Korrespondenzen $\mathcal{C}_{N'}(x\pi_{\Xi}\mathcal{X}F, x\pi_{\Xi})$ erhalten wir:

$$\lambda^{\top}_Q \Theta\, W_{Q'}\Theta^{\top}\lambda_Q \sqcap \lambda^{\top}_Q B_h B^{\top}_h \lambda_Q \subset W_b$$

Schließlich gewinnt man noch durch Analyse der in W_e verborgenen Fälle die Aussage:

$$\lambda^{\top}_Q \Theta\, W_{Q'}\Theta^{\top}\lambda_Q \sqcap \lambda^{\top}_Q \rho_{\Xi} B_H \kappa_Q \kappa^{\top}_Q B^{\top}_H \rho^{\top}_{\Xi}\lambda_Q \subset W_e$$

Insgesamt erhalten wir:

$$U_{\lceil\overline{p_U}\rceil}\, W_{Q'}\, U^{\top}_{\lceil\overline{p_U}\rceil} \sqcap B_Q B^{\top}_Q \subset W_Q$$

Eindeutige Bestimmung von U

Von oben her wissen wir, daß auch für eine zweite Einbettung U' von Q nach Q' gelten müßte:

$$JU' = J' \qquad \text{und} \qquad NU' = N'$$

Damit wären U und U' eingeschränkt auf $\mathrm{L}J \sqcup \mathrm{L}N$ gleich. Es blieben also nur noch die „kopierten“ Kapselgerüste der Schemavariablen, wo U' von U verschieden sein könnte.

Aufgrund der Definitivität von N jedoch sind U und U' hier allein schon durch ihre Nachfolgertreue eindeutig festgelegt und daher gleich.

Literaturverzeichnis

[ACCL] M. Abadi, L. Cardelli, P.-L. Curien, and J.-J. Lévy. Explicit substitutions. In Hudak [POPL '90], S. 31–46.

[Acz78] P. Aczel. A general Church-Rosser theorem. Technical report, University of Manchester, 1978.

[AK94] Zena M. Ariola and Jan Willem Klop. Cyclic lambda graph rewriting. In *Proceedings, Ninth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, S. 416–425, Paris, France, 4–7 Juli 1994. IEEE Computer Society Press.

[AL93] Andrea Asperti and Cosimo Laneve. Interaction Systems II, The Practice of Optimal Reductions. Technical Report UBLCS-93-12, Laboratory for Computer Science, University of Bologna, 1993.

[Ban94] Richard Banach. Term graph rewriting and garbage collection using opfibrations. *Theoretical Computer Science*, 131(1):29–94, August 1994.

[Bay87] Ludwig J. Bayer. Entwicklung von komplexen Werkzeugen zur interaktiven Auswertung von DAGs im Programmiersystem HOPS. Diplomarbeit, TU München, 1987.

[BBK90] Ludwig J. Bayer, Rudolf Berghammer, and Peter Kempf. Programmieren mit höheren Objekten: Bausteine und Regeln im HOPS-System. Technischer Bericht 9003, Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Informatik, Mai 1990.

[BHSV93] Rudolf Berghammer, Armando M. Haeberer, Gunther Schmidt, and Paulo A. S. Veloso. Comparing two different approaches to products in abstract relation algebra. In G. Scollo, editor, *Proc. 3rd Int. Conf. Algebraic Methodology and Software Technology, Enschede, June 21 – June 25*, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1993. Springer. to appear.

[BK94] Arne Bayer and Wolfram Kahl. The **H**igher-**O**bject **P**rogramming **S**ystem "HOPS". In Bettina Buth and Rudolf Berghammer, editors, *Systems for Computer-Aided Specification, Development and Verification*, Bericht Nr. 9416, S. 154–171. Universität Kiel, 1994. URL: http://inf2-www.informatik.unibw-muenchen.de/HOPS/papers/Bayer-Kahl-94.ps.gz.

[Bou70] Nicolas Bourbaki. *Éléments de Mathématique, Livre 1: Théorie des Ensembles*. Hermann, 1970.

[BS92] Erik Barendsen and Sjaak Smetsers. Graph rewriting and copying. Technical Report 92-20, Department of Computer Science, University of Nijmegen, 1992.

[BW84] Friedrich L. Bauer and Hans Wössner. *Algorithmische Sprache und Programmentwicklung*. Springer-Verlag, 2. Auflage, 1984.

[BW90] Michael Barr and Charles Wells. *Category Theory for Computing Science*. Prentice Hall International Series in Computer Science. Prentice Hall, 1990.

[CAAP '91] S. Abramsky and T. S. E. Maibaum, editors. *TAPSOFT '91, Volume 1: Colloquium on Trees in Algebra and Programming, LNCS* 493, Brighton, UK, April 1991. Springer-Verlag.

[CD95] Andrea Corradini and Frank Drewes. (Cyclic) term graph rewriting is adequate for rational parallel term rewriting. Draft, 1995.

[CEL+95] Andrea Corradini, Hartmut Ehrig, Martin Löwe, Ugo Montanari, and Julia Padberg. Typed graph grammars and their adjunction with categories of derivations. In *Fifth International Workshop on Graph Grammars and Their Application to Computer Science, Williamsburg, Virginia, November 13–18, 1994*, LNCS. Springer-Verlag, 1995.

[Chu41] Alonzo Church. *The Calculi of Lambda Conversion*. Princeton University Press, Princeton, 1941.

[CIP-L] F.L. Bauer, R. Berghammer, M. Broy, W. Dosch, F. Geiselbrechtinger, R. Gnatz, E. Hangel, W. Hesse, B. Krieg-Brückner, A. Laut, T. Matzner, B. Möller, F. Nickl, H. Partsch, P. Pepper, K. Samelson, M. Wirsing, and H. Wössner. *The Munich Project CIP. Volume I: The Wide Spectrum Language CIP-L, LNCS* 183. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1985.

[CIP-S] F.L. Bauer, H. Ehler, A. Horsch, B. Möller, H. Partsch, O. Paukner, and P. Pepper. *The Munich Project CIP. Volume II: The Transformation System CIP-S*, *LNCS* 292. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[CMR+] Andrea Corradini, Ugo Montanari, Francesca Rossi, Hartmut Ehrig, and Michael Löwe. Graph grammars and logic programming. In Ehrig et al. [GG '90], S. 221–237.

[Cur30] H.B. Curry. Grundlagen der Kombinatorischen Logik. *American Journal of Mathematics*, 52:509–536, 789–834, 1930.

[DJ90] Nachum Dershowitz and Jea-Pierre Jouannaud. Rewrite systems. In Jan van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science*, Band B, S. 243–320. Elsevier Science Publishers B. V., 1990.

[Dug93] Dominic Duggan. Higher-order substitutions. Technical Report CS-93-44, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, October 1993. Revised September 1994.

[EHKPP] Hartmut Ehrig, Annegret Habel, Hans-Jörg Kreowski, and Francesco Parisi-Presicce. From graph grammars to high level replacement systems. In Ehrig et al. [GG '90], S. 269–287.

[Ehr] Hartmut Ehrig. Introduction to the algebraic theory of graph grammars. In Claus et al. [GG '78], S. 1–69.

[EKL] Hartmut Ehrig, Martin Korff, and Michael Löwe. Tutorial introduction to the algebraic approach of graph grammars based on double and single pushouts. In Ehrig et al. [GG '90], S. 24–37.

[EPS73] Hartmut Ehrig, M. Pfender, and H. J. Schneider. Graph grammars: An algebraic approach. In *Proc. IEEE Conf. SWAT'73*, S. 167–180, Iowa City, 1973.

[GAL] Georges Gonthier, Martín Abadi, and Jean-Jacques Lévy. The geometry of optimal lambda reduction. In [POPL '92], S. 15–26.

[GG '78] Volker Claus, Hartmut Ehrig, and Grzegorz Rozenberg, editors. *Graph-Grammars and Their Application to Computer Science and Biology, International Workshop*, *Lecture Notes in Computer Science* 73, Bad Honnef, November 1978. Springer-Verlag.

[GG '82] Hartmut Ehrig, Manfred Nagl, and Grzegorz Rozenberg, editors. *Graph-Grammars and Their Application to Computer Science, 2nd International Workshop*, *Lecture Notes in Computer Science* 153, Haus Ohrbeck, Osnabrück, Oktober 1982. Springer-Verlag.

[GG '86] Hartmut Ehrig, Manfred Nagl, Grzegorz Rozenberg, and Azriel Rosenfeld, editors. *Graph-Grammars and Their Application to Computer Science, 3rd International Workshop*, *Lecture Notes in Computer Science* 291, Warrenton,Virginia, USA, Dezember 1986. Springer-Verlag.

[GG '90] Hartmut Ehrig, Hans-Jörg Kreowski, and Grzegorz Rozenberg, editors. *Graph-Grammars and Their Application to Computer Science, 4th International Workshop*, *Lecture Notes in Computer Science* 532, Bremen, Germany, 1990. Springer-Verlag.

[GO] Yexuan Gui and Mitsuhiro Okada. LAMBDALG: Higher order algebraic specification language. In Kirchner [RTA '93], S. 462–466.

[Hel91] Christian Held. Spezifikation und Implementierung eines Vergleichs- und Transformationssystems für eine typisierte DAG-Sprache als HOPS-Teilsystem. Diplomarbeit, Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Informatik, Dezember 1991. ID 38/91.

[HOA '93] Jan Heering, Karl Meinke, Bernhard Möller, and Tobias Nipkow, editors. *Higher-Order Algebra, Logic and Term Rewriting, First International Workshop, HOA '93, Amsterdam, The Netherlands, September 1993, Selected Papers*, *LNCS* 816. Springer-Verlag, 1993.

[HPJW+92] Paul Hudak, Simon L. Peyton Jones, Philip Wadler, et al. Report on the programming language Haskell, a non-strict purely functional language, version 1.2. *ACM SIGPLAN Notices*, 27(5), 1992.

[IEE91] IEEE Computer Society Press. *Proceedings, Sixth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, Amsterdam, The Netherlands, 15–18 Juli 1991.

[IVZ94] Paola Inverardi and Marisa Venturini Zilli. Rational rewriting. In Igor Prívara, Branislav Rovan, and Peter Ružička, editors, *Mathematical Foundations of Computer Science 1994, 19th Internatioanl Symposium, MFCS '94, Košice, Slovakia, August 1994, Proceedings*, *LNCS* 841, S. 433–442. Springer-Verlag, 1994.

[Kah] Wolfram Kahl. Can functional programming be liberated from the applicative style? In Bjørn Pehrson and Imre Simon, editors, *Technology and Foundations, Information*

Processing '94, Proceedings of the IFIP 13th World Computer Congress, Hamburg, Germany, 28 August – 2 September 1994, Volume I, IFIP Transactions A-51, S. 330–335. IFIP, North-Holland, 1994.

[Kah91] Wolfram Kahl. *HOPS — Higher Object Programming System, Functional Graphics-Based Interactive Programming, User Manual.* Fakultät für Informatik, Universität der Bundeswehr München, Januar 1991. (internal manual).

[Kah94] Wolfram Kahl. The **H**igher-**O**bject **P**rogramming **S**ystem "HOPS". In Gregor Snelting and Uwe Meyer, editors, *Semantikgestützte Analyse, Entwicklung und Generierung von Programmen, Workshop der GI-Fachgruppe 2.1.3, Schloß Rauischholzhausen*, Bericht Nr. 9402, S. 1–10. AG Informatik/FB Mathematik, Justus-Liebig-Universität Gießen, 1994.

[Kah96] Wolfram Kahl. *Algebraische Termgraphersetzung mit gebundenen Variablen.* Reihe Informatik. Herbert Utz Verlag Wissenschaft, München, 1996. ISBN 3-931327-60-4; also doctoral dissertation at Fakultät für Informatik, Universität der Bundeswehr München.

[Kat90] Vinod Kathail. *Optimal Interpreters for Lambda-Calculus Based Functional Languages.* PhD thesis, MIT, Mai 1990.

[Ken] Richard Kennaway. Graph rewriting in some categories of partial morphisms. In Ehrig et al. [GG '90], S. 490–504.

[Ken87] Richard Kennaway. On "On Graph Rewritings". *Theoretical Computer Science*, 52:37–58, 1987.

[Klo80] Jan Willem Klop. Combinatory reduction systems. Mathematical Centre Tracts 127, Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, 1980. PhDThesis.

[Kni89] Kevin Knight. Unification: A multidisciplinary survey. *ACM Computing Surveys*, 21(1):93–124, 1989.

[Küh92] Christoph Kühn. Durchlaufalgorithmen für programmiersprachliche Graphen in C und C++. Diplomarbeit, Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Informatik, November 1992. ID 09/92.

[Lam] John Lamping. An algorithm for optimal lambda calculus reduction. In Hudak [POPL '90], S. 16–30.

[Les] Pierre Lescanne. From $\lambda\sigma$ to $\lambda\upsilon$, a journey through calculi of explicit substitutions. In [POPL '94], S. 60–69.

[Lév80] Jean-Jacques Lévy. Optimal reductions in the lambda-calculus. In J. P. Seldin and J. R. Hindley, editors, *To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, S. 159–191, New York/London, 1980. Academic Press.

[Lib87] Klaus Libera. DAG-Transformationen für benutzerdefinierte Typen im graphisch gestützten Dialog. Diplomarbeit, TU München, 1987.

[MT91] Robin Milner and Mads Tofte. *Commentary on Standard ML.* MIT Press, 1991.

[New42] M.H.A. Newman. On theories with a combinatorial definition of "equivalence". *Annals of Mathematics*, 43(2):223–243, 1942.

[Nip91] Tobias Nipkow. Higher-order critical pairs. In *Proceedings, Sixth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science* [IEE91], S. 342–349.

[Nol76] H. Noltemeier, editor. *Graphen, Algorithmen, Datenstrukturen. Ergebnisse der 2. Fachtagung über graphentheoretische Konzepte der Informatik, Göttingen.* Hanser, 1976.

[Plu93] Detlef Plump. *Evaluation of Functional Expressions by Hypergraph Rewriting.* Dissertation, Universität Bremen, 1993.

[POPL '90] P. Hudak, editor. *17th Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages*, San Francisco, California, Januar 1990. acm press.

[POPL '92] *19th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages*, Albuquerque, New Mexico, Januar 1992. acm press.

[POPL '94] *POPL '94: 21th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages, Portland, Oregon, January 17–21, 1994.* acm press, 1994.

[PPEM] Francesco Parisi-Presicce, Hartmut Ehrig, and Ugo Montanari. Graph rewriting with unification and composition. In Ehrig et al. [GG '86], S. 496–515.

[PR69] J. L. Pfaltz and A. Rosenfeld. Web grammars. In *Proc. Int. Joint Conf. Art. Intelligence*, S. 609–619, Washington, 1969.

[RTA '91] *Rewriting Techniques and Applications: 4th international conference, RTA 4, LNCS* 488, Berlin, 1991. Springer.

[RTA '93] Claude Kirchner, editor. *Rewriting Techniques and Applications: 5th international conference, RTA 5, Montreal, Canada, June 16–18, 1993, LNCS* 690, Berlin, 1993. Springer.

[SBK90] Gunther Schmidt, Ludwig J. Bayer, and Peter Kempf. Hinweise zur interaktiven Konstruktion von Bereichen, Objekten und Programmtexten im HOPS-System. Technischer Bericht 9004, Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Informatik, Mai 1990.

[Sch24] M. Schönfinkel. Über die Bausteine der mathematischen Logik. *Mathematische Annalen*, 92:305–316, 1924.

[Sch70] H. J. Schneider. Chomsky-Systeme für partielle Ordnungen. Arbeitsber. d. Inst. f. Math. Masch. u. Datenver. 3, 3, Erlangen, 1970.

[Sch76] Gunther Schmidt. Eine relationenalgebraische Auffassung der Graphentheorie. In Noltemeier [Nol76], S. 315–325.

[Sch77] Gunther Schmidt. Programme als partielle Graphen. Habil. Thesis, Fachbereich Mathematik der Techn. Univ. München, Bericht 7813, 1977.

[SE93] Hans Jürgen Schneider and Hartmut Ehrig, editors. *Graph Transformations in Computer Science, Proc. International Workshop Dagstuhl Castle, Germany, January 1993*, LNCS 776. Springer-Verlag, 1993.

[SH80] J. P. Seldin and J. R. Hindley, editors. *To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism.* Academic Press, New York/London, 1980.

[Spi89] J. M. Spivey. *The Z Notation: A Reference Manual.* Prentice Hall International Series in Computer Science. Prentice Hall, 1989.

[SPvE93] M.R. Sleep, M.J. Plasmeijer, and M.C.J.D. van Eekelen, editors. *Term Graph Rewriting: Theory and Practice.* John Wiley, 1993.

[SS89] Gunther Schmidt and Thomas Ströhlein. *Relationen und Graphen.* Mathematik für Informatiker. Springer-Verlag, 1989. Englisch als [SS93].

[SS93] Gunther Schmidt and Thomas Ströhlein. *Relations and Graphs, Discrete Mathematics for Computer Scientists.* EATCS-Monographs on Theoretical Computer Science. Springer Verlag, 1993.

[Staa] John Staples. A graph-like lambda calculus for which leftmost-outermost reduction is optimal. In Claus et al. [GG '78], S. 440–455.

[Stab] John Staples. Two-level expression representation for faster evaluation. In Ehrig et al. [GG '82], S. 392–404.

[Sta80] John Staples. Computation on graph-like expressions. *Theoretical Computer Science*, 10:171–185, 1980.

[Ste80] R. Steinbrüggen. The use of nested scheme parameters in the system CIP. In R. Wilhelm, editor, *GI-10 Jahrestagung Saarbrücken, Informatik Fachberichte* 33. Springer-Verlag, New York, 1980. Extended Abstract.

[Tal93] Carolyn L. Talcott. A theory of binding structures and applications to rewriting. *Theoretical Computer Science*, 112:68–81, 1993. Short version in: Second International Conference on Algebraic Methodology and Software Technology, AMAST91.

[vOvR] Vincent van Oostrom and Femke van Raamsdonk. Comparing combinatory reduction systems and higher-order rewrite systems. In Heering et al. [HOA '93], S. 276–304.

[Wad71] Christopher Peter Wadsworth. *Semantics and Pragmatics of the Lambda Calculus.* D.Phil. thesis, Oxford University, September 1971.

[Wol] D. A. Wolfram. Rewriting, and equational unification: the higher-order cases. In [RTA '91], S. 25–36.

[Wol93] D. A. Wolfram. *The Clausal Theory of Types*, Band 21. Cambridge University Press, 1993.

[Zam94] Alexandre Zamulin. The database specification language Ruslan (a preliminary communication). Preprint 28, Sibirian Division of the Russian Acadamy of Sciences, Institute of Informatics Systems, Novosibirsk, 1994.

[Zie88] Hans Zierer. *Programmierung mit Funktionsobjekten: Konstruktive Erzeugung semantischer Bereiche und Anwendung auf die partielle Auswertung.* Dissertation, Technische Universität München, Fakultät für Informatik, 1988. Report TUM-I8803.

[Zie91] Hans Zierer. Relation-algebraic domain constructions. *Theoretical Computer Science*, 87:163–188, 1991.

[ZSB] Hans Zierer, Gunther Schmidt, and Rudolf Berghammer. An interactive graphical manipulation system for higher objects based on relational algebra. In Gottfried Tinhofer and Gunther Schmidt, editors, *Proc. 12th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, LNCS 246, S. 68–81, Bernried, Starnberger See, Juni 1986. Springer-Verlag.

Symbolverzeichnis

Mengen und Relationen

Graphen

S, S_G	$\mathcal{V} \times \mathcal{E} ⇸ \mathcal{V}$	Nachfolgerfunktion	22
$S_i, S_{G,i}$	$\mathcal{V} ⇸ \mathcal{V}$	Nachfolgerfunktion zur Kantenmarkierung i	22
$\mathcal{V}$		Knotenmenge	22
v_b	$\mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{N}$	Knotenmarkierungen für Objektvariable	21
v_p	$\mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{N}$	Knotenmarkierungen für Platzhaltervariable	21
v_s	$\mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{N}$	Knotenmarkierungen für Schemavariable	21
W, W_G	$\mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{V}$	Variablenbindung	22
Z, Z_G	$\mathcal{V} \times \mathcal{E}^* ⇸ \mathcal{V}$	Pfadfunktion	29
$Z_m, Z_{G,m}$	$\mathcal{V} ⇸ \mathcal{V}$	Pfadfunktion zum Pfad m	29
$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_G$	$\mathcal{V} \times \mathcal{E}^* \leftrightarrow \mathcal{V}$	Pfadrelation	29
$\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_{G,m}$	$\mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{V}$	Pfadrelation zum Pfad m	29
Z, Z_G	$\mathcal{V} \times \mathcal{E}^* ⇸ \mathcal{V}$	Pfadfunktion ohne Kreis um Anfang	29
$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_G$	$\mathcal{V} \times \mathcal{E}^* \leftrightarrow \mathcal{V}$	Pfadrelation zu nichtleeren Pfaden	29
$\underline{dominates}$	$\mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{V}$	Dominierung	30
Δ, Δ_G	$\mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{V}$	kapselungsfreie Erreichbarkeit	32

Intervalle

$\mathfrak{a}.\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots$	Intervalle oder Abschnitte	52,57
$t_{\mathfrak{a}}$	obere Grenze von $\mathfrak{a}$	52,57
$b_{\mathfrak{a}}$	untere Grenze von $\mathfrak{a}$	52,57
$[\_, \_]$	Intervall mit oberer und unterer Grenze	52
$[\_, \_]\!]$	Abschnitt mit oberer und unterer Grenze	57
$[\_]$	Punktintervall	53
$[\_]\!]$	Punktabschnitt	57
$\underline{\mathfrak{a}}$	Zugangsrelation zu $\mathfrak{a}$	52,57
$\underline{\mathfrak{a}}$	(Nachfolger-)Gerüst von $\mathfrak{a}$	53,57
$\underline{\mathfrak{a}}$	Kapselgerüst von $\mathfrak{a}$	55,57
$\widehat{\mathfrak{a}}$	Selbstkapselungsgrenze von $\mathfrak{a}$	58
$\rceil\mathfrak{a}\lceil$	Konversion in Intervall	57
$\rfloor\mathfrak{a}\lfloor$	Konversion in Abschnitt	57
$\perp_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$	untere Grenze einer Korrespondenz zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$	104

Graphmorphismen

Sei $F : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ eine p-Einbettung zu einem Variablenvektor $p : \mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_1$.

$F_{\lceil\overline{p}\rceil}$	$\mathcal{V}_1 ⇸ \mathcal{V}_2$	konstanter Anteil	60
$F_{\sqcap}$	$\mathcal{V}_1 ⇸ \mathcal{V}_2$	kurz für $F_{\lceil\overline{p}\rceil}$ in Bildern	65
$F^{\lfloor p \rfloor}$	$\mathcal{V}_1 \leftrightarrow \mathcal{V}_2$	Bildabschluß	64
$F^{\sqcup}$	$\mathcal{V}_1 \leftrightarrow \mathcal{V}_2$	kurz für $F^{\lfloor p \rfloor}$ in Bildern	65
$F^{\underline{\lfloor p \rfloor}}$	$\mathcal{V}_1 \leftrightarrow \mathcal{V}_2$	Bildabschluß auf p	64
$F^{<p>}$	$\mathcal{V}_1 \leftrightarrow \mathcal{V}_2$	Gerüst	71
$F^{\underline{<p>}}$	$\mathcal{V}_1 \leftrightarrow \mathcal{V}_2$	Gerüst auf p	71
$F^{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}$	$\mathcal{V}_1 \leftrightarrow \mathcal{V}_2$	Kapselgerüst	71
$F^{\underline{\blacktriangleleft p \blacktriangleright}}$	$\mathcal{V}_1 \leftrightarrow \mathcal{V}_2$	Kapselgerüst auf p	71
$F^{\underline{]p[}}$	$\mathcal{V}_1 \leftrightarrow \mathcal{V}_2$	Selbstkapselungsgrenze	71
$F^{\lceil\!\lceil p \rceil\!\rfloor}$	$\mathcal{V}_1 \leftrightarrow \mathcal{V}_2$	falscher Bildabschluß	90
$F^{\square}$	$\mathcal{V}_1 \leftrightarrow \mathcal{V}_2$	Bildabschluß ohne Kapselgerüst	144

$E_{\_,\_}$	$\mathcal{V}_1 \leftrightarrow \mathcal{V}_1$	Blockadenausgang	69
θ_F	$\mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_2$	erweiterter Kontext	65
η_F	$\mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_2 \times \mathcal{E}$	Einstiegskantenvektor	140
$\mathcal{A}_{F,x}$	$\mathcal{E} \leftrightarrow \mathcal{E}$	Auflösung	129
$\mathcal{C}_F(x,y)$	$\mathcal{V}_2 \leftrightarrow \mathcal{V}_2$	Korrespondenz zwischen den Bildern von x und y	121
$\mathcal{C}_F$	$\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \leftrightarrow \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$	Korrespondenzenrelation	121
e_F	$\mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{V}_2$	Einstiegsvektor	140
$\mathcal{I}_{F,i}(x)$	$\mathcal{V}_2 \leftrightarrow \mathcal{E}$	Bildausgang	130
$\mathcal{I}_F$	$\mathcal{V}_2 \times \mathcal{E} \leftrightarrow \mathcal{V}_1 \times \mathcal{E}$	Bildausgang	130
$\mathcal{P}$	$\mathbb{1} \leftrightarrow \mathcal{N}$	Variablenschema	63
$\mathcal{W}_F$	$\mathcal{V}_1 \leftrightarrow \mathcal{V}_1$	Variablenidentität mit Bildkorrespondenzen	121
$\mathcal{X}_F$	$\mathcal{V}_2 \leftrightarrow \mathcal{V}_1$	Zuordnung von Schemavariablen	140
$\mathcal{Z}_{G_1,q}$	$\mathcal{V}_1 \leftrightarrow \mathcal{V}_1$	q-Ignoration	69

Graphersetzung

$\mathcal{E}$		Einbettungskategorie	139
$\mathcal{E}_{\mathrm{H}}$		Einbettungskategorie, horizontal	139
$\mathcal{E}_{\mathrm{V}}$		Einbettungskategorie, vertikal	139
$\mathcal{H}$		Homomorphismenklasse	140
$\mathcal{H}_{\mathrm{R}}$		reelle Homomorphismen	140
$\mathcal{H}_{\mathrm{V}}$		virtuelle Homomorphismen	140
$\mathcal{M}$		Kategorie aller Matchings	140
$\mathcal{M}_{\mathrm{H}}$		Kategorie horizontaler Matchings	135
$\mathcal{M}_{\mathrm{V}}$		Kategorie vertikaler Matchings	135
$\mathcal{M}_{\equiv}$		horizontale Matchingkategorie	135, 141
$\mathcal{M}_{<}$		Wirtsmatchingkategorie	143
$\mathcal{M}_{>}$		PPO-Matchingkategorie	143
$\mathcal{O}_{\mathrm{R}}$		Reelle Objekte	139
$\mathcal{O}_{\mathrm{V}}$		Virtuelle Objekte	139
$\mathcal{P}$		Patternfunktor	136
$\mathcal{P}_{\mathrm{R}}$		reelle Patterns	139
$\mathcal{P}_{\mathrm{V}}$		virtuelle Patterns	139
$\mathcal{T}$		Patternkategorie	139
ζ	$\mathcal{V}_A \nrightarrow \mathcal{V}_K$	(Klebebasis-Zuordnung)	144
ω_K	$\mathbb{1} \rightarrow \mathcal{V}_K$	Basis des Klebegraphen	144

Index